# *Нелинейные системы*

**© 2026 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)**
**(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

## КРИТЕРИЙ ПОПОВА АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ *S*-ПРОЦЕДУРЫ[1]

Для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями критерий Попова абсолютной устойчивости получен с использованием теоремы о свертывании без использования $S$-процедуры.

*Ключевые слова*: системы Лурье, устойчивость, критерий Попова, функции Лурье–Постникова, матричные неравенства.

**DOI:** 10.7868/S2413977726120013

### 1. Введение

Теория абсолютной устойчивости является важной частью теории автоматического регулирования и занимает значительное место в общей теории управления. Библиография по теории абсолютной устойчивости насчитывает сотни публикаций [1]. Интересный подробный очерк развития этой теории приводится в [2]. Теория абсолютной устойчивости берет свое начало с работы [3], в которой была рассмотрена задача абсолютной устойчивости системы автоматического управления с одним нелинейным стационарным элементом (системы Лурье). Первоначально критерий Попова был получен именно для таких систем. Как отмечено в [4], среди частотных условий абсолютной устойчивости «центральным результатом является критерий Попова». Если судить по известности и популярности, то с этим мнением можно согласиться и сейчас. При получении этого критерия методами функций Ляпунова критерий Попова является достаточным (и необходимым в случае одной нелинейности) условием существования для системы Лурье функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» (в случае нескольких нелинейностей – плюс сумма интегралов от нелинейностей). Такие функции Ляпунова получили название функций Лурье–Постникова (ФЛП). Для исследования отрицательной определенности производной ФЛП в силу системы используется специальный прием, в [5] названный $S$-процедурой. $S$-процедура позволяет перейти от неравенства на квадратичную форму, которое должно выполняться в области, выделяемой квадратичными ограничениями,

[1] В 2026 г. исполняется 90 лет со дня рождения Е.С. Пятницкого и 100 лет со дня рождения В.А. Якубовича. Статья посвящается памяти этих ученых.

к неравенству на квадратичную форму, которое должно выполняться во всем пространстве, т.е. к матричному неравенству (МН). Роль и значение $S$-процедуры для математической теории систем, а не только теории абсолютной устойчивости, освещаются в обзоре [6]. Полученные с помощью частотной теоремы (лемма Калмана–Якубовича–Попова, KYP лемма, см. [6, 7]) частотные условия разрешимости этого МН и являются частотными условиями критерия Попова.

Целью работы является получение критерия Попова для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями с использованием теоремы о свертывании без использования $S$-процедуры. Теорема о свертывании основана на теореме Пятницкого о переходе от системы из двух МН к одному МН, эквивалентному этой системе [8].

Здесь в разделе 2 формулируется задача абсолютной устойчивости для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями и описывается класс ФЛП, используемый при получении критерия Попова.

В качестве исходного материала для дальнейших рассуждений критерий Попова выводится стандартным методом с использованием $S$-процедуры. Этому посвящен раздел 3.

В разделах 4–6 рассматриваются случаи систем с одной, двумя и произвольным конечным числом нелинейностей соответственно.

## 2. Задача абсолютной устойчивости

Система Лурье с несколькими стационарными нелинейностями имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(\sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x\rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b_j, c_j \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j = 1, \ldots, m$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Используется стандартное определение абсолютной устойчивости [5, 7]: система (1) абсолютно устойчива в классе $N_\varphi$ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$0 \leqslant \varphi_j \sigma_j \leqslant \sigma_j^2, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

если эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

Известный частотный критерий Попова является достаточным (при $m = 1$ и необходимым) [4, 7] условием существования для системы (1) функции Ляпунова, роль которой в данном случае выполняет ФЛП

$$v(x) = x^\top L x + \sum_{j=1}^{m} \theta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

представляющая собой квадратичную форму ($L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L^\top = L$) плюс сумму интегралов от нелинейностей, $\theta = \|\theta_j\|_{j=1}^m$ – вектор параметров, $\{\cdot\}^\top$ – символ транспонирования матриц.

### 3. Критерий Попова с использованием $S$-процедуры

Здесь используется следующая формулировка из [7]: $S$-процедура состоит в замене условия

$$x^\top G_0 x < 0 \ \text{ при } \ x^\top G_j x \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

на условие

$$\exists\, \tau_j > 0 \ (j = 1, \ldots, m) : x^\top G_0 x + \sum_{j=1}^m \tau_j\, x^\top G_j x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \tag{5}$$

где $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_j^\top = G_j$, $j = 0, \ldots, m$. Очевидно, что из выполнения (5) следует выполнение (4). В случае $m = 1$ доказывается [7, гл. I, § 1.7, п. 1.7.2], что условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения условия (4) ($S$-процедура неущербна).

Вопросы, касающиеся свойств $S$-процедуры, рассматриваются во многих публикациях (см., например, [2, 6, 7, 9]).

Секторные ограничения (2) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$F_j(x, \varphi_j) = \varphi_j(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

В соответствии с теоремой Барбашина–Красовского [7] для производной $\dot v(x, \varphi)$ ФЛП (3) в силу системы (1) должно выполняться неравенство

$$\dot v(x, \varphi) = \left(2x^\top L + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j^\top\right)\left(Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j\right) < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0, \tag{7}$$

при всех $(x, \varphi)$, удовлетворяющих (6). Использование $S$-процедуры приводит к неравенству на квадратичную форму

$$\left(2x^\top L + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j^\top\right)\left(Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j\right) + \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j \left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) < 0, \ (x, \varphi) \neq 0, \tag{8}$$

где $\tau_j > 0$ – неопределенные параметры, $j = 1, \ldots, m$.

Преобразуем (7):

$$2Lx + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j = 2Lx + C\Theta\varphi, \quad Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j = Ax + B\varphi,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix},\ \Theta = \operatorname{diag}\Big\{\theta_1, \dots, \theta_m\Big\}.$$

Следующий шаг:

$$\dot v(x,\varphi) = (2Lx + C\Theta\varphi)^\top (Ax + B\varphi) = 2x^\top LAx + \varphi^\top \Theta C^\top Ax + 2x^\top LB\varphi + \\ + \varphi^\top \Theta C^\top B\varphi = x^\top \Big(A^\top L + LA\Big) x + \frac{1}{2}\Big(x^\top A^\top C\Theta\varphi + \varphi^\top \Theta C^\top Ax\Big) + \\ + x^\top LB\varphi + \varphi^\top B^\top Lx + \frac{1}{2}\varphi^\top \Big(\Theta C^\top B + B^\top C\Theta\Big)\varphi.$$

Как в [8], функцию ограничений $F(x,\varphi,\mathcal{T})$ представим в виде

$$F(x,\varphi,\mathcal{T}) = \sum_{j=1}^m \tau_j\varphi_j\left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C\mathcal{T} \\ \frac{1}{2}\mathcal{T}\,C^\top & -\mathcal{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{T} = \operatorname{diag}\Big\{\tau_1, \dots, \tau_m\Big\}$.

В новых обозначениях неравенство (8) можно записать в виде следующего МН:

$$I_P^m = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2 \\ B^\top L + \Theta C^\top A/2 + \mathcal{T}\,C^\top/2 & \Theta C^\top B/2 + B^\top C\Theta/2 - \mathcal{T} \end{pmatrix} < 0. \tag{9}$$

Это неравенство (9) назовем МН Попова.

Условия разрешимости МН (9) определяются из частотной теоремы (KYP лемма) [6, 7]. Используемая здесь версия частотной теоремы приведена в следствии 1 [7, гл. I, § 1.2, п. 1.2.2]. Из частотной теоремы следует, что при гурвицевой $A$ и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства

$$\begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + R \\ B^\top L + R^\top & -\Gamma \end{pmatrix} < 0 \tag{10}$$

эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$\Gamma + 2\operatorname{Re} W(i\omega) > 0,\ \ W(i\omega) = R^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B,\ \ \omega \in [-\infty, +\infty], \tag{11}$$

где $\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ – эрмитово сопряженная к $W$, $E_n$ – единичная $(n \times n)$-матрица. Здесь и далее используется обозначение $\omega \in \in [-\infty, +\infty]$. При $\omega = \pm\infty$ имеются в виду предельные значения выражений в левых частях соответствующих неравенств (см. [7, с. 36]).

Так как неравенство (9) записано в форме (10), то условие разрешимости (9) выпишем в виде частотного неравенства (11):

$$\mathcal{T} - \Theta C^\top B/2 - B^\top C\Theta/2 + 2\operatorname{Re}\Big(A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2\Big)^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B = \\ = \mathcal{T} + \operatorname{Re}\,(\mathcal{T} + i\omega\Theta)\, W(i\omega) > 0,\ \ \omega \in [-\infty, +\infty], \tag{12}$$

где $W(i\omega) = C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B$. При дополнительном условии на неопределенные параметры $\mathcal{T} - \Theta C^\top B/2 - B^\top C\Theta/2 > 0$, получим, что разрешимость МН (9) эквивалентна выполнению частотного неравенства (12).

Таким образом, частотное условие (12) представляет собой критерий Попова для системы (1).

## 4. Системы с одной нелинейностью

В случае одной нелинейности ($m = 1$) система (1) и ФЛП (3) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \varphi(\sigma), \quad \sigma = \langle c, x\rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b, c \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

$$v(x) = x^\top L x + \theta \int_0^\sigma \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

Неравенство на производную (7) переходит в неравенство

$$\begin{aligned} \dot{v}(x,\varphi) &= x^\top \left(A^\top L + LA\right) x + x^\top Lb\varphi + \varphi^\top b^\top Lx + \\ &+ \frac{\theta}{2}\left(x^\top A^\top c\varphi + \varphi c^\top Ax\right) + \theta c^\top b\varphi^2 < 0, \ (x,\varphi) \neq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Применим $S$-процедуру, получим аналог выражения (8)

$$\begin{aligned} &x^\top \left(A^\top L + LA\right) x + x^\top Lb\varphi + \varphi b^\top Lx + \\ &+ \frac{\theta}{2}\left(x^\top A^\top c\varphi + \varphi c^\top Ax\right) + \theta\delta\varphi^2 + \tau\varphi\left(\langle c, x\rangle - \varphi\right), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\delta = c^\top b$. Отрицательная определенность формы (16) эквивалентна МН (аналог (9))

$$I_P^1 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb + \dfrac{\theta}{2}A^\top c + \dfrac{\tau}{2}c \\ b^\top L + \dfrac{\theta}{2}c^\top A + \dfrac{\tau}{2}c^\top & \theta\delta - \tau \end{pmatrix} < 0 \tag{17}$$

– МН Попова для случая $m = 1$. Условие разрешимости (17) следует из частотной теоремы в виде частотного неравенства

$$\begin{aligned} &\tau - \theta\delta + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\theta}{2}A^\top c + \frac{\tau}{2}c\right)^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b = \\ &= \tau + \mathrm{Re}\,(\tau + \theta i\omega) W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty], \end{aligned} \tag{18}$$

где $W(i\omega) = c^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b$. Если сократить полученное выражение на $\tau > 0$, то получим классическую форму критерия Попова

$$1 + \mathrm{Re}\,(1 + \mu\, i\omega) W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty], \quad \mu = \theta/\tau. \tag{19}$$

В [10] показано, как в случае системы (1) с одной нелинейностью критерий Попова получить без использования $S$-процедуры. Здесь кратко изложим этот результат, используя формулировку теоремы о свертывании из [8].

*Теорема 1* (теорема о свертывании). *Для выполнения системы двух МН*

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n), \tag{20}$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $\widetilde{\varepsilon} > 0$, *при котором выполнено одно МН*

$$I_1 + Q^+(\widetilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\widetilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon^2} q. \tag{21}$$

Легко видеть, что из (21), выполненном неважно при каком $\varepsilon > 0$, следует выполнение системы (20).

Существование для системы (13) ФЛП (14), для производной которой при ограничениях (6) выполнено неравенство (15), эквивалентно [10] разрешимости системы из двух МН

$$\begin{aligned} &I_1 = A^\top L + LA < 0, \\ &I_2 = A^\top L + LA + Lbc^\top + c\, b^\top L + \frac{\theta}{2}\left(A^\top cc^\top + cc^\top A\right) + \theta\delta cc^\top < 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Покажем, что из выполнения МН (17) при некотором $\tau > 0$ следует разрешимость системы (22). Положим

$$Lb + \frac{\theta}{2}\left(A^\top c + \delta c\right) = p, \quad c = q.$$

Подставив эти $p$ и $q$ в (21), по теореме 1 получим, что разрешимость системы (22) эквивалентна разрешимости одного МН

$$A^\top L + LA + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(p + \frac{1}{\varepsilon^2} q\right)\left(p + \frac{1}{\varepsilon^2} q\right)^\top < 0, \tag{23}$$

где $p + \frac{1}{\varepsilon^2} q = Lb + \frac{\theta}{2} A^\top c + \left(\frac{\theta\delta}{2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) c$. По лемме Шура последнее МН (23) эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb + \dfrac{\theta}{2} A^\top c + \dfrac{\theta\delta}{2} c + \dfrac{1}{\varepsilon^2} c \\ b^\top L + \dfrac{\theta}{2} c^\top A + \dfrac{\theta\delta}{2} c^\top + \dfrac{1}{\varepsilon^2} c^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon^2} \end{pmatrix} < 0. \tag{24}$$

Чтобы (24) совпало с (17), положим $2/\varepsilon^2 = \tau - \theta\delta$. Это можно сделать, так как условие $\tau - \theta\delta > 0$ является необходимым условием для выполнения МН (17). Таким образом, разрешимость МН (24) определяется частотным неравенством (19) и критерий Попова при $m = 1$ получен без использования $S$-процедуры.

С другой стороны, из неущербности $S$-процедуры следует, что при $m = 1$ критерий Попова является и необходимым для существования ФЛП для системы (1). Покажем это с помощью теоремы 1. Для этого докажем, что из выполнения системы (22) следует, что существует $\tau > 0$, при котором выполнено МН (17).

Уже показано, что из выполнения системы (22) следует выполнение МН (24). Если $\theta\delta > 0$, то при $\tau = 2/\varepsilon^2 + \theta\delta > 0$ МН (24) совпадает с (17). Если нет, то в (24) сделаем замену $2/\varepsilon^2 = \tau - \theta\delta$, не акцентируя внимания на знаке параметра $\tau$. Тогда (24) совпадает с (17) и выполнение МН (24) эквивалентно выполнению частотного условия (18). Из гурвицевости матрицы $A$ и выполнения системы (22) следует гурвицевость всех матриц $A + hbc^\top$ при $h \in [0, 1]$, а значит $\det(A + hbc^\top) \neq 0$, $h \in [0, 1]$. При $\omega = 0$ неравенство (18) переходит в $\tau + \tau \mathrm{Re}\, W(0) = \tau(1 + c^\top A^{-1} b) > 0$. Опуская банальные выкладки, сошлемся на формулу Шермана–Моррисона [11, с. 410], из которой следует, что $\det(A + hbc^\top) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(1 + hc^\top A^{-1} b) \neq 0$. Следовательно, $(1 + c^\top A^{-1} b) > 0$ и $\tau > 0$. Таким образом, для $m = 1$ без использования свойства неущербности $S$-процедуры в этом случае показано, что критерий Попова является необходимым условием существования ФЛП для системы (1).

## 5. Системы с двумя нелинейностями

В случае системы (1) с двумя нелинейностями основой для критерия Попова, дающего достаточные условия существования ФЛП (3) с отрицательной производной (7) при ограничениях (6), является соответствующий случаю $m = 2$ вариант МН (9), где

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \mathrm{diag}\Big\{\theta_1, \theta_2\Big\}, \quad \mathcal{T} = \mathrm{diag}\Big\{\tau_1, \tau_2\Big\}.$$

Выпишем подробно МН Попова для случая $m = 2$:

$$I_P^2 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2} A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2} c_1 & Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2} A^\top c_2 + \dfrac{\tau_2}{2} c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1 \delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2 \delta_{21} + \theta_1 \delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & \theta_2 \delta_{22} - \tau_2 \end{pmatrix} < 0. \tag{25}$$

Здесь и далее $\delta_{ij} = c_i^\top b_j$ и символы «$\bullet$» заменяют элементы, симметричные относительно главной диагонали.

Существование для системы (1) ФЛП (3), для производной которой в случае $m = 2$ выполнено неравенство (7) при всех $(x, \varphi)$, удовлетворяющих (6), эквивалентно [10] разрешимости системы из четырех МН

$$I_s = A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, 4, \tag{26}$$

где

$$A_1 = A,\ \ A_2 = A + b_1 c_1^\top,\quad A_3 = A + b_2 c_2^\top,\quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top,$$
$$L_1 = L,\ \ L_2 = L + \frac{\theta_1}{2} c_1 c_1^\top,\ \ L_3 = L + \frac{\theta_2}{2} c_2 c_2^\top,\ \ L_4 = L + \frac{\theta_1}{2} c_1 c_1^\top + \frac{\theta_2}{2} c_2 c_2^\top.$$

Без использования $S$-процедуры покажем, что выполнение МН (25) достаточно для отрицательной определенности производной (7) при (6).

*Теорема 2. Пусть МН* (25) *разрешимо относительно* $L$ *и* $\Theta$ *при некоторых* $\tau_1 > 0$ *и* $\tau_2 > 0$, *тогда разрешима система МН* (26).

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Таким образом, критерий Попова при $m = 2$ получен без использования $S$-процедуры.

## 6. Системы с $m$ нелинейностями

Из раздела 3 следует, что условиями критерия Попова являются частотные условия разрешимости МН Попова (9). В [10] показано, что выполнение неравенства (7) для производной ФЛП (3) в случае произвольного $m$ эквивалентно [10] разрешимости системы из $2^m$ МН

$$I_s = A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, N, \quad N = 2^m, \tag{27}$$

с матрицами $A_s$ и $L_s$ следующего вида:

$$A_s = A + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} b_j c_j^\top, \quad L_s = L + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} \frac{\theta_j}{2} c_j c_j^\top, \quad s = 1, \ldots, N,$$

где $h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m$ и $h_{sj}$ независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Считаем, что $h_1 = (0, \ldots, 0)$, т.е. $A_1 = A$, $L_1 = L$.

Заметим, что случай критерия Попова существенно сложнее случаев кругового критерия и критерия Цыпкина, рассмотренных в [8], так как в (27) от индекса $s$ зависят как матрицы $A_s$, так и матрицы $L_s$ в отличие от упомянутых случаев, где матрица $L$ одна и та же во всех МН.

*Теорема 3. Из разрешимости МН Попова* (9) *при некоторых дополнительных параметрах* $\mathcal{T} = \operatorname{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $\tau_j > 0$, *и* $\Theta = \operatorname{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ *следует разрешимость системы* (27).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

## 7. Заключение

Показано, что без S-процедуры, которая более 60 лет считалась незаменимым инструментом при получении критерия Попова в рамках теории Ляпунова, можно обойтись.

*Доказательство теоремы 2.* Из результатов раздела 4 следует, что для выполнения системы из двух МН $I_1 < 0$ и $I_2 < 0$ из системы (26) достаточно выполнения МН (17), в котором добавились индексы

$$\text{(П.1)} \qquad I_P = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 \\ b_1^\top L + \dfrac{\theta_1}{2}c_1^\top A + \dfrac{\tau_1}{2}c_1^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 \end{pmatrix} < 0.$$

Поскольку $A_4 = A_3 + b_1c_1^\top$ и $L_4 = L_3 + \frac{\theta_1}{2}c_1c_1^\top$, то система из двух МН $I_3 < 0$ и $I_4 < 0$ из системы (26) совпадает с системой из двух МН $I_1 < 0$ и $I_2 < 0$, если в последней заменить матрицу $A$ на $A_3$, а матрицу $L$ на $= L_3$. Поэтому для выполнения системы из двух МН $I_3 < 0$ и $I_4 < 0$ достаточно выполнения МН (17), в котором произведена указанная замена

$$\text{(П.2)} \qquad \widehat{I}_P = \begin{pmatrix} A_3^\top L_3 + L_3A_3 & L_3b_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A_3^\top c_1 + \dfrac{\widehat{\tau}_1}{2}c_1 \\ b_1^\top L_3 + \dfrac{\theta_1}{2}c_1^\top A_3 + \dfrac{\widehat{\tau}_1}{2}c_1^\top & \theta_1\delta_{11} - \widehat{\tau}_1 \end{pmatrix} < 0.$$

Рассмотрим разницу $\Delta = \widehat{I}_P - I_P$, считая значения дополнительных параметров $\widehat{\tau}_1 = \tau_1$ одинаковыми в обеих матрицах (последним обусловлена достаточность). Покажем, что матрица $\Delta$ допускает представление $\Delta = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top$. Матрицы (П.1) и (П.2) имеют блочную структуру, выражение для $\Delta$ весьма громоздко, поэтому распишем его поблочно. Для упрощения записи введем обозначение $A_3^\top L_3 - A^\top L \triangleq Z$, тогда

$$\Delta_{11} = Z + Z^\top,$$

$$Z = \Big(A^\top + c_2b_2^\top\Big)\Big(L + \frac{\theta_2}{2}c_2c_2^\top\Big) - A^\top L = c_2b_2^\top L + \frac{\theta_2}{2}A^\top c_2c_2^\top + \frac{\theta_2}{2}\delta_{22}c_2c_2^\top,$$

$$\Delta_{12} = (L_3 - L)b_1 + \frac{\theta_1}{2}(A_3^\top - A^\top)c_1 = \frac{\theta_2}{2}c_2c_2^\top b_1 + \frac{\theta_1}{2}c_2b_2^\top c_1 = \frac{\theta_2}{2}\delta_{21}c_2 + \frac{\theta_1}{2}\delta_{12}c_2,$$

$$\Delta_{22} = 0_{1\times 1}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \widehat{I}_P - I_P = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^\top & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{p}\,\widehat{q}^\top + \widehat{q}\,\widehat{p}^\top & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12})c_2 \\ (\bullet)^\top & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{p} = Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2}(A^\top c_2 + \delta_{22}c_2)$ и $\widehat{q} = c_2$. Теперь легко видеть, что

$$\Delta = \widehat{I}_P - I_P = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top, \;\; \widetilde{p} = \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \end{pmatrix}, \;\; \widetilde{q} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе из двух МН (П.1) и (П.2) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого $\varepsilon_2 > 0$, что разрешимо одно МН

$$I_P + \frac{\varepsilon_2^2}{2}\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)^\top < 0.$$

По лемме Шура последнее МН эквивалентно следующему:

$$\widetilde{I}_P = \begin{pmatrix} I_P & \widetilde{p} + (1/\varepsilon_2^2)\widetilde{q} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{П.3}$$

Матрицу $\widetilde{I}_P$ выпишем подробно:

$$\widetilde{I}_P = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 & \widehat{p} + (1/\varepsilon_2^2)c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 & Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2}(A^\top c_2 + \delta_{22}c_2) + \dfrac{1}{\varepsilon_2^2}c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix}.$$

Если выполнено МН (25), то $\theta_2\delta_{22} - \tau_2 < 0$. Тогда МН (П.3) будет выполнено, если в нем положить $-2/\varepsilon_2^2 = \theta_2\delta_{22} - \tau_2$, так как в этом случае эти неравенства совпадают. Следовательно, выполнена система из двух МН (П.1) и (П.2), а значит, и система (26).

Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 3.* Получим утверждение теоремы 3 с помощью теоремы 1 без использования $S$-процедуры и результатов раздела 3. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ рассмотрены в разделах 4 и 5. Отметим, что шаги приводимого ниже доказательства очень похожи на шаги доказательства теоремы 4 из [8], в которой критерий Цыпкина получен без $S$-процедуры.

По предположению индукции будем считать, что достаточным условием разрешимости системы (27) при некотором конечном $m$ является разрешимость МН Попова (9).

При увеличении количества нелинейностей в системе на единицу количество неравенств в системе (27) увеличится в два раза, т.е. при $N = 2^{m+1}$ систему (27) можно представить в виде

$$A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, 2^m, \tag{П.4}$$

$$A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1}. \tag{П.5}$$

МН Попова для системы с $m+1$ нелинейностью имеет вид

$$(\text{П}.6)\quad I_P^{m+1}=\begin{pmatrix} A^\top L+LA & LB_{m+1}+\frac{1}{2}\left(A^\top C_{m+1}\Theta_{m+1}+C_{m+1}\mathcal{T}_{m+1}\right)\\ (\bullet)^\top & \frac{1}{2}\left(\Theta C_{m+1}^\top B_{m+1}+B_{m+1}^\top C_{m+1}\Theta_{m+1}\right)-\mathcal{T}_{m+1}\end{pmatrix}<0,$$

где

$B_{m+1}=\left(b_1\,b_2\,\ldots\,b_m\,b_{m+1}\right)$, $C_{m+1}=\left(c_1\,c_2\,\ldots\,c_m\,c_{m+1}\right)$,

$\Theta_{m+1}=\operatorname{diag}\{\theta_1,\ldots,\theta_m,\theta_{m+1}\}$, $\mathcal{T}_{m+1}=\operatorname{diag}\{\tau_1,\ldots,\tau_m,\tau_{m+1}\}$.

Покажем, что из разрешимости МН (П.6) следует разрешимость объединенной системы (П.4)–(П.5). Будем считать, что система (П.4) в точности совпадает с (27), а матрицы $A_s$ в системе (П.5) пронумерованы таким образом, что $A_{s+2^m}=A_s+b_{m+1}c_{m+1}^\top$, $s=1,\ldots,2^m$. Получим автоматически, что $L_{s+2^m}=L_s+\frac{\theta_{m+1}}{2}c_{m+1}c_{m+1}^\top$, $s=1,\ldots,2^m$. Таким образом, система (П.5) совпадает с (П.4), если в системе (П.4) в выражениях для матриц $A_s$ и $L_s$ матрицу $A$ заменить на $A_{1+2^m}=A+b_{m+1}c_{m+1}^\top$, а матрицу $L$ на $L_{1+2^m}=$ $=L+\frac{\theta_{m+1}}{2}c_{m+1}c_{m+1}^\top$. Обозначим $1+2^m\triangleq\xi$, т.е. $A_\xi=A_{1+2^m}$ и $L_\xi=L_{1+2^m}$. Следовательно, по предположению индукции достаточным условием разрешимости системы (П.5) является разрешимость МН

$$(\text{П}.7)\qquad \widehat{I}_P^m=\begin{pmatrix} A_\xi^\top L_\xi+L_\xi A_\xi & L_\xi B+A_\xi^\top C\Theta/2+C\widehat{\mathcal{T}}/2\\ (\bullet)^\top & \Theta C^\top B/2+B^\top C\Theta/2-\widehat{\mathcal{T}}\end{pmatrix}<0,$$

где $B$, $C$ и $\Theta$ те же, что и в (9). Рассмотрим разницу $\Delta^m=\widehat{I}_P^m-I_P^m$, считая значения дополнительных параметров $\widehat{\mathcal{T}}=\mathcal{T}$ одинаковыми в обеих матрицах. Для краткости введем обозначения $A_\xi^\top L_\xi-A^\top L\triangleq Z_\xi$ и $m+1\triangleq\nu$, тогда

$$Z_\xi=\left(A^\top+c_\nu b_\nu^\top\right)\left(L+\frac{\theta_\nu}{2}c_\nu c_\nu^\top\right)-A^\top L=c_\nu b_\nu^\top L+\frac{\theta_\nu}{2}A^\top c_\nu c_\nu^\top+\frac{\theta_\nu}{2}\delta_{\nu\nu}c_\nu c_\nu^\top.$$

Распишем выражение для $\Delta^m$ поблочно:

$$\Delta_{11}^m=Z_\xi+Z_\xi^\top=\widehat{p}_m\widehat{q}_m^\top+\widehat{q}_m\widehat{p}_m^\top,\ \text{где}\ \widehat{p}_m=Lb_\nu+\frac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu+\delta_{\nu\nu}c_\nu\right),\ \widehat{q}_m=c_\nu,$$

$$\Delta_{12}^m=(L_\xi-L)B+(A_\xi^\top-A^\top)C\Theta/2=\frac{\theta_\nu}{2}c_\nu c_\nu^\top B+\frac{1}{2}c_\nu b_\nu^\top C\Theta=$$

$$=\frac{1}{2}c_\nu\left(\theta_\nu c_\nu^\top B+b_\nu^\top C\Theta\right),$$

$$\Delta_{22}^m=0_{m\times m}.$$

Следовательно,

$$\Delta^m=\begin{pmatrix}\Delta_{11}^m & \Delta_{12}^m\\ (\bullet)^\top & \Delta_{22}^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widehat{p}_m\,\widehat{q}_m^\top+\widehat{q}_m\,\widehat{p}_m^\top & \frac{1}{2}c_\nu\left(\theta_\nu c_\nu^\top B+b_\nu^\top C\Theta\right)\\ (\bullet)^\top & 0_{m\times m}\end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Delta^m = \widetilde{p}_m\,\widetilde{q}_m^\top + \widetilde{q}_m\,\widetilde{p}_m^\top,\ \ \widetilde{p}_m = \begin{pmatrix} \widehat{p}_m \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix},\ \ \widetilde{q}_m = \begin{pmatrix} c_\nu \\ 0_{m\times 1} \end{pmatrix},$$

т.е. к системе из двух МН (9) и (П.7) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого $\varepsilon_\nu > 0$, что разрешимо одно МН

$$\widehat{I}_P^{m+1} = I_P^m + \frac{\varepsilon_\nu^2}{2}\left(\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m\right)\left(\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m\right)^\top < 0, \tag{П.8}$$

где

$$\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m = \begin{pmatrix} \widehat{p}_m + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lb_\nu + \dfrac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu + \delta_{\nu\nu} c_\nu\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix}.$$

По лемме Шура МН (П.8) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$\widehat{I}_P^{m+1} \cong \widetilde{I}_P^{m+1} = \begin{pmatrix} I_P^m & \widetilde{p}_m + (1/\varepsilon_\nu^2)\,\widetilde{q}_m \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_\nu^2 \end{pmatrix} = \tag{П.9}$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2 & Lb_\nu + \dfrac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu + \delta_{\nu\nu} c_\nu\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ (\bullet)^\top & \Theta C^\top B/2 + B^\top C\Theta/2 - \mathcal{T} & \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_\nu^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Из выполнения (П.6) следует $\theta_{m+1}\delta_{m+1m+1} - \tau_{m+1} < 0$, поэтому в (П.9) можно положить $-2/\varepsilon_{m+1}^2 = \theta_{m+1}\delta_{m+1m+1} - \tau_{m+1}$. В результате МН (П.9) будет совпадать с МН (П.6). Утомительное упражнение по перемножению матриц, из которого это следует, здесь опустим. Таким образом, из разрешимости МН (П.6) следует разрешимость МН (П.9), следовательно, следует разрешимость системы из двух МН (9) и (П.7), а значит, и разрешимость объединенной системы (П.4)–(П.5).

Теорема 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Либерзон М.Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // АиТ. 2006. № 10. С. 86–119.

2. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143937
3. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8. № 3. С. 246–248.
4. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. 1967. № 6. С. 5–30.
5. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 11. С. 77–121.
7. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
8. *Каменецкий В.А.* Круговой критерий и критерий Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями без использования S-процедуры // Матем. сб. 2024. Т. 215. № 2. С. 33–47.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.
10. *Каменецкий В.А.* Метод свертывания матричных неравенств и критерии абсолютной устойчивости стационарных систем управления // АиТ. 1989. № 5. С. 28–39.
11. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.*

Поступила в редакцию 08.12.2025

После доработки 20.08.2026

Принята к публикации 10.09.2026