



Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)

ISSN 2413-9777 (Online)

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год



ноябрь

Москва

2026

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г.,
Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США),
Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А.,
Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я.,
Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю.,
Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А.,
Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Чхатишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2026 г. О.Ю. СУМЕНКОВ (sumenkov.oy@talantiuspeh.ru),
И.М. ТАРАБУКИН (tarabukin.im@talantiuspeh.ru),
С.В. ГУСЕВ, канд. физ.-мат. наук (gusev.sv@talantiuspeh.ru)
(Научно-технологический университет “Сириус”, Сириус),
Л.М. ФРИДМАН, д-р техн. наук (lfridman@unam.mx)
(Национальный автономный университет Мексики, Мехико)

ПРИЛОЖЕНИЕ ЛЯПУНОВСКОГО СИНТЕЗА К РЕЛЕЙНОМУ УПРАВЛЕНИЮ КЛАССОМ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Рассматривается задача стабилизации класса периодических линейных систем с неопределенностями в матрицах состояния/управления и незатухающими согласованными возмущениями. Предложен метод на основе квадратичной функции Ляпунова, построенной для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния, существование которой доказывается с помощью дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. Показано, что любая стабилизирующая обратная связь на его основе определяет семейство линейных многообразий (скольжения), где траектории системы асимптотически устойчивы. Синтезируются разрывные регуляторы, обеспечивающие сходимость решений к выбранному многообразию за конечное время в присутствии неопределенности в матрице управления и внешних возмущениях. Эффективность методики подтверждена численным моделированием.

Ключевые слова: скользящие режимы, разрывное управление, неопределенные системы, Ляпуновские методы, линейные системы с периодическими коэффициентами.

DOI: 10.7868/S2413977726110014

1. Введение

В классическом подходе к построению вынужденного скользящего режима, предложенном В. И. Уткиным [1], первым шагом является выбор многообразия пониженной размерности (поверхности скольжения), которое должно обладать желаемыми динамическими свойствами. Это можно осуществить, например, путем последовательного преобразования системы в регулярную форму [2] и последующего задания собственных значений или же, альтернативно, используя формулу Аккерманна и т.д. После чего формируется разрывный (релейный) закон управления, обеспечивающий достижение поверх-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20009).

ности скольжения за конечное время. Изначально, для доказательства использовались негладкие функции Ляпунова, требующие анализа устойчивости на пересечениях поверхностей скольжения, позже были получены достаточные условия для систем с доминирующей диагональю [3]. Таким образом, данный подход обеспечивает сходимость за конечное время к многообразию с желаемым поведением, а кроме того, инвариантность по отношению к *согласованным* возмущениям [4].

Группа Г. Лейтманна впоследствии развила метод [5], позже названный *Ляпуновским синтезом*. В данном подходе рассматривается система с неопределенностью, для устойчивой номинальной части которой предполагается известной (номинальная) функция Ляпунова. После чего строится унитарное управление [6], с тем чтобы компенсировать согласованные возмущения, а также обеспечить применимость номинальной функции Ляпунова для исследования устойчивости исходной неопределенной системы. Следует отметить, что существование или возникновение скользких режимов вследствие добавления разрывного унитарного управления в рамках данного метода авторами не рассматривалось.

1.1. Мотивационный пример управления с позиций Ляпуновского синтеза и скользких режимов

Рассмотрим автономную систему $(x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m)$ аффинную по управлению с неопределенностью в матрице управления и ограниченным возмущением $\delta(t, x)$, действующим в канале управления,

$$(1) \quad \dot{x} = f(x) + B(x) ((\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x)),$$

где $f(x)$, $B(x)$ – известные гладкие непрерывные функции, а функция $\Delta B(t)$ неизвестна, но ограничена. Пусть существует *вспомогательный* закон управления по обратной связи $u_{\text{aux}} \triangleq \varphi(x)$ такой, что при замыкании системы

$$(2) \quad \dot{x} = f(x) + B(x)u_{\text{aux}}$$

ее решения асимптотически устойчивы. Также предположим, что известна непрерывная функция Ляпунова $V(x)$, такая что для ее производной на решениях замкнутой системы (2) выполняется неравенство $\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|)$, где α – $\mathcal{K}$ -функция.

Следуя процедуре Ляпуновского синтеза, обозначив $(\partial V(x)/\partial x)^\top B(x)$ как $w^\top(x)$, вычислим производную функции Ляпунова $V(x)$ на решениях исходной *возмущенной* системы (1), замкнутой $u = \varphi(x) + v$:

$$(3) \quad \dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) + 2w^\top(x) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))v + \delta(t, x) + \Delta B(t)\varphi(x) \right].$$

Тогда цель нового управления v , изначально реализованного в виде унитарного регулятора [6]

$$v = -\kappa_{\text{unit}}(t, x) \frac{w(x)}{\|w(x)\|},$$

где $\kappa_{\text{unit}}(t, x) \in \mathbb{R}_{++}$ (здесь и далее $\mathbb{R}_{++}$ ($\mathbb{R}_+$) обозначает множество положительных (неотрицательных) вещественных чисел), при его подстановке в (3)

$$\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) - 2w^\top(x) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) \kappa_{\text{unit}}(t, x) \frac{w(x)}{\|w(x)\|} - \delta(t, x) - \Delta B(t)\varphi(x) \right]$$

состоит в том, чтобы обеспечить неотрицательность выражения в скобках, предполагая ограниченность $\|\delta(t, x) + \Delta B(t)\varphi(x)\| \leq \Delta(t, x)$. Откуда будет следовать: $\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) < 0$ – асимптотическая устойчивость замкнутой системы (1).

При рассмотрении (3) заметим, что идейно альтернативный подход к обеспечению неравенства $\dot{V}(x) < 0$ на решениях замкнутой системы предлагается в теории скользящих режимов. Выбрав $w(x) \triangleq B(x)^\top (\partial V(x)/\partial x)$ в качестве *переменной скольжения*, синтезируем **разрывное** управление, например векторное

$$u = \kappa_{\text{rel}}(t, x) \text{Sign}(w(x)),$$

где

$\kappa_{\text{rel}}(t, x) = \text{diag}\{\kappa_{\text{rel}_1}, \dots, \kappa_{\text{rel}_m}\}$, $\text{Sign}(w(x)) = [\text{sign}(w_1(x)), \dots, \text{sign}(w_m(x))]^\top$, такое что равенство $w(t, x) = 0$ *будет выполняться* для всех $t \geq t_w \geq 0$. Соответственно для $\forall t \geq t_w$ будет справедливо неравенство $\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|)$.

Таким образом, процедура Ляпуновского синтеза предоставляет естественный выбор переменной скольжения в виде $w(x) = B(x)^\top (\partial V(x)/\partial x)$. Более того, любая функция Ляпунова для вспомогательной системы позволяет сгенерировать поверхность разрыва, которая гарантирует устойчивость возмущенной системы. В свою очередь, если задана переменная скольжения (поверхность скольжения), то в теории скользящих режимов предлагается множество регуляторов, в том числе непрерывные, Липшицевы и даже алгоритмы на высших порядков [7, 8]. Соответственно, независимо развиваемые подходы – Ляпуновский синтез и скользящие режимы – могут существенным образом обогатить друг друга.

С точки зрения данной парадигмы первым примером можно считать работу [9], где для *линейной автономной системы с неопределенностями* авторами была предпринята попытка продемонстрировать возможность выбора множества линейных поверхностей скольжения на основе квадратичной функции Ляпунова, используя алгебраическое уравнение Риккати. Более детально данный подход был развит в [10], где для аналогичных целей применялся аппарат линейно-матричных неравенств (ЛМН), а также были получены необходимые и достаточные условия на существование такого множества поверхностей скольжения. Значительно позже утверждение о том, что существование стабилизирующей обратной связи на основе квадратичной функции Ляпунова эквивалентно существованию регулятора на скользящих режимах (существованию многообразия скольжения), было сформулировано в [11], а затем приложено к задаче синтеза отказоустойчивого управления в [8].

Обобщение подхода к стабилизации систем с неопределенными коэффициентами в присутствии согласованных возмущений с позиций теории скользящих режимов [11] для систем с *периодическими* коэффициентами находится на начальной стадии.

В частности, в [12] исследовалась робастная орбитальная стабилизация в контексте управления неполноприводными системами с помощью метода виртуальных сервосвязей [13]. В работе с использованием преобразования Флоке–Ляпунова периодическая линеаризованная трансверсальная динамика приводилась к автономной системе, после чего происходил синтез линейной поверхности скольжения. Позднее в [14] для линейной системы с периодическими коэффициентами и скалярным управлением была предложена процедура построения скользящего режима, служащего для компенсации ограниченных согласованных возмущений, зависящих от времени.

Задача стабилизации систем с *периодическими коэффициентами* при наличии внешних возмущений рассматривалась теоретически в [15], а для нестационарных систем в [16]. Подобная задача в случае неопределенностей представляет интерес для ряда приложений, таких как стабилизация периодических траекторий шагающих механизмов [17], сферических роботов [18], маятниковых систем [13], манипуляторов [19, 20] и др.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается возмущенная линейная система с неопределенными [21] *периодическими* коэффициентами

$$(4) \quad \dot{x} = [A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)]x + B(t)[(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x)],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих воздействий, $A(t) = A(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) = B(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – известные непрерывные T -периодические матричные функции. Неопределенность в матрице состояния принадлежит образу $B(t)$; $E(t) = E(t+T) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ есть известная непрерывная T -периодическая матричная функция; матричная функция $\Gamma(t) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ неизвестна. Неопределенность в матрице управления определяется неизвестным $\Delta B(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $\delta(t, x) \in \mathbb{R}^m$ – вектор возмущений, действующих в канале управления (*согласованных*) [4].

Допущение 1. Относительно неопределенностей и вектора возмущения системы (4) предполагается выполненным следующее:

Д.1.1 Неопределенность в матрице состояний удовлетворяет оценке

$$\Gamma(t)^\top \Gamma(t) \leq \mathbb{I};$$

Д.1.2 Неопределенность в матрице управления удовлетворяет оценке²

$$\|\Delta B(t)\|_* \leq \bar{\varepsilon} < 1;$$

² Через $\|W\|_2$ обозначена спектральная норма W , а через $\|W\|_\infty$ – максимальная сумма абсолютных значений элементов строк W .

Д.1.3 Возмущение $\delta(t, x)$ ограничено известной неотрицательной функцией $\rho(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$, так что

$$0 \leq \|\delta(t, x)\|_2 \leq \rho(t, x).$$

Отметим, что допущение **Д.1.1** не умаляет общности неопределенности в матрице состояния, поскольку можно провести ее масштабирование за счет соответствующего выбора матричных функций $B(t)$ и $E(t)$.

Задача 1. Синтезировать закон управления линейной системы с периодическими коэффициентами при наличии ограниченных согласованных возмущений и неопределенностей заданной структуры в матрицах состояния и управления (4), который гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

В данной работе предлагается решение задачи 1 на основе Ляпуновского синтеза, включающее три этапа. На первом этапе для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния строятся квадратичные функции Ляпунова на основе анализа дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. На втором этапе указанные функции используются для построения семейства периодических многообразий скольжения пониженной размерности, на которых замкнутая система асимптотически устойчива. На третьем этапе синтезируется разрывный регулятор (векторный и унитарный), обеспечивающий достижение выбранного многообразия за конечное время при наличии неопределенностей в матрице управления и ограниченных согласованных возмущений.

Ключевые особенности подхода заключаются в следующем: 1. Разделение неопределенностей между этапами синтеза: неопределенности в матрице состояния учитываются на этапе построения функции Ляпунова и поверхности скольжения, тогда как неопределенности в матрице управления и согласованные внешние возмущения компенсируются средствами скользящих режимов. 2. Синтез разрывного управления осуществляется без приведения системы к регулярной форме [1, 2]. Переменная скольжения задается непосредственно в исходных координатах, это сохраняет структуру системы (включая структуру неопределенностей) и исключает необходимость введения дополнительных нестационарных преобразований координат, что особенно важно для систем с периодическими коэффициентами.

3. Стабилизация вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния

Сначала рассмотрим систему (4) без учета неопределенности в матрице управления и возмущения

$$(5) \quad \dot{x} = \left[A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t) \right] x + B(t)u.$$

Определение 1 [22, 23]. Пара $A(t)$, $B(t)$ называется стабилизируемой тогда и только тогда, когда существует T -периодическая $m \times n$ матричная функция $K(t) = K(t + T)$, такая что система $\dot{x} = (A(t) + B(t)K(t))x$ устойчива.

С учетом этого определения сформулируем следующее содержательное утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) Пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема на периоде $[0, T]$;
- 2) Неопределенная матричная функция $\Gamma(t)$ удовлетворяет допущению **Д.1.1**.

Тогда система (5), замкнутая линейной обратной связью с периодическими коэффициентами

$$(6) \quad u = -R^{-1}(t) B^{\top}(t) P(t)x,$$

асимптотически устойчива. Здесь $P(t) \in \mathbb{S}_{++}^n$ ³ является непрерывным T -периодическим положительно определенным решением периодического дифференциального уравнения Риккати

$$(7) \quad \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\top}(t)P(t) - P(t)B(t) (R^{-1}(t) - \mu(t)\mathbb{I}) B^{\top}(t)P(t) + \\ + \frac{1}{\mu(t)} E^{\top}(t) E(t) + Q(t) = 0$$

для заданных непрерывных $Q(t) = Q(t + T) \in \mathbb{S}_{++}^n$, $R(t) = R(t + T) \in \mathbb{S}_{++}^m$ и $0 < \mu(t) < \lambda_{\min}(R^{-1}(t))$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова $V(t, x(t)) = x(t)^{\top} P(t) x(t)$. Производная $V(t, x(t))$ на решениях замкнутой системы (5), (6) имеет вид

$$(8) \quad \dot{V}(t, x) = x^{\top} \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\top}(t)P(t) \right] x - \\ - 2x^{\top} P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x + \\ + x^{\top} \left[(B(t)\Gamma(t)E(t))^{\top} P(t) + P(t)B(t)\Gamma(t)E(t) \right] x.$$

Воспользовавшись известным фактом [21], что для любых матриц X , Y соответствующих размерностей выполняется неравенство $X^{\top}Y + Y^{\top}X \leq \mu X^{\top}X + \frac{1}{\mu}Y^{\top}Y$ для любых $\mu > 0$, заметим, что для части (8), содержащей неопределенность, справедливо следующее неравенство:

$$x^{\top} \left[P(t)B(t)\Gamma(t)E(t) + \Gamma^{\top}(t)E^{\top}(t)B^{\top}(t)P(t) \right] x \leq \\ \leq x^{\top} \left[\mu(t)P(t)B(t)B^{\top}(t)P(t) + \frac{1}{\mu(t)} E^{\top}(t)\Gamma^{\top}(t)\Gamma(t)E(t) \right] x$$

³ Здесь и далее $\mathbb{S}_{++}^n$ обозначает конус положительно определенных матриц размером $n \times n$.

для некоторой гладкой скалярной функции $\mu(t) > 0$. Принимая во внимание **Д.1.1**: $\Gamma^\top(t)\Gamma(t) \leq \mathbb{I}$, покажем, что выражение (8) ограничено сверху следующим образом:

$$(9) \quad \dot{V}(t, x) \leq x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x - \\ - x^\top P(t)B(t) \left[2R^{-1}(t) - \mu(t)\mathbb{I} \right] B^\top(t)P(t)x + \frac{1}{\mu(t)} x^\top E^\top(t)E(t)x.$$

Вычтя периодическое дифференциальное уравнение Риккати (7) из (9), получим

$$\dot{V}(t, x) \leq -x^\top P(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)P(t)x - x^\top Q(t)x \leq -x^\top Q(t)x < 0.$$

Из того факта, что $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывны T -периодичны и положительно определены, следует, что $\exists \alpha > 0 : Q(t) \geq \alpha P(t) \forall t$, это влечет оценку $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\alpha V(t, x(t))$ на решениях замкнутой системы и, соответственно, $V(t, x(t)) \leq e^{-\alpha t} V(0, x(0)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу их непрерывности и периодичности существует $\beta > 0$, такое что $\|x(t)\|^2 \leq \beta V(t, x(t))$ для $\forall t$, откуда следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы (5), (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 гарантирует (см. [23], теорема 6.3) существование периодического положительно определенного решения $P(t) = P(t+T) \in \mathbb{S}_{++}^n$ дифференциального уравнения Риккати (7) при $0 < \mu(t) < \lambda_{\min}(R^{-1}(t))$ в случае согласованных неопределенностей $B(t)\Gamma(t)E(t)$.

4. Стабилизация исходной возмущенной системы (4)

В соответствии с процедурой Ляпуновского синтеза, описанной в разделе 1.1, введем новую переменную

$$(10) \quad w(t, x) \triangleq B(t)^\top (\partial V(t, x)/\partial x) = B^\top(t)P(t)x \triangleq K(t)x,$$

определяемую периодической функцией Ляпунова $P(t)$ системы (5), которая была получена с помощью стабилизирующего решения уравнения (7).

4.1. Ляпуновский синтез для системы (4)

Вторая часть подхода к стабилизации системы (4) на основе Ляпуновского синтеза заключается в построении унитарного регулятора на основе теоремы 1. В частности, выпишем производную функции Ляпунова из теоремы 1 на решениях системы (4), замкнутую $u(t, x) = v - R^{-1}(t)K(t)x$ при $K(t)$, определяемым (10),

$$(11) \quad \dot{V} = x^\top \left(\dot{P}(t) + P(t)A_{cl}(t) + A_{cl}^\top(t)P(t) \right) x + \\ + 2x^\top P(t)B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))v - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x + \delta(t, x) \right],$$

где $A_{cl}(t) \triangleq A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t) - B(t)R^{-1}(t)K(t)$.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, а также неопределенность $\Delta B(t)$ и возмущение $\delta(t, x)$ удовлетворяют допущениям Д.1.2 и Д.1.3 соответственно. Тогда регулятор вида

$$(12) \quad u = -R^{-1}(t)K(t)x - \kappa_{lr}(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|},$$

где $w(t, x)$ определяется (10), а коэффициент $\kappa_{lr}(t, x) > 0$ выбран так что

$$(13) \quad \kappa_{lr}(t, x) > \frac{\rho(t, x) + \bar{\varepsilon} \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|}{1 - \bar{\varepsilon}},$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (4).

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Отметим, несмотря на то, что утверждение 1 устанавливает асимптотическую устойчивость системы с *верхней* оценкой скорости сходимости (определяемой теоремой 1) к тривиальному решению $x = 0$, фактическое поведение решения $x(t)$ при наличии возмущений остается неопределенным, поскольку не гарантируется выполнение условия $w(t, x) = 0$.

В этой ситуации естественным образом привлекается теория скользящих режимов, позволяющая обеспечить не только асимптотическую устойчивость системы (4), но и *точно предопределить* динамику $x(t)$ на заданном многообразии скольжения начиная с некоторого момента времени $t_w \geq 0$. Это достигается благодаря свойству инвариантности (invariance conditions) скользящих режимов по отношению к согласованным возмущениям [4].

4.2. Синтез скользящих режимов

Важно подчеркнуть, что в отличие от случая линейных поверхностей скольжения для систем с постоянными коэффициентами в настоящей работе рассматривается система с периодическими коэффициентами. В этом случае функция Ляпунова и соответствующий стабилизирующий линейный закон управления (6) зависят от времени t явным образом. Введенная ранее переменная (скольжения) (10) задает семейство линейных многообразий скольжения $\mathcal{W}(t) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : w(t, x) = 0\}$. В связи с этим возникает необходимость предварительного исследования свойств данного семейства и условий, при которых возможно обеспечить достижение и поддержание скользящего режима.

4.2.1. Исследование поведения решений замкнутой системы на выбранном многообразии скольжения

Следующая теорема позволяет описать поведение решений системы (4) на $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, а также следующие условия:

$$1) \text{ rank } B(t) = m, \forall t$$

2) Неопределенность в матрице управления $\Delta B(t)$ удовлетворяет допущению Д.1.2;

3) Известен некоторый закон управления $\psi(t, x)$, обеспечивающий $w(t, x) = 0$ (10) для некоторого решения $x(t)$ системы (4), замкнутой $\psi(t, x)$, за конечное время t_w .

Тогда это решение $x(t)$ асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 2. Поведение переменной скольжения $w(t, x)$ (10) в силу решений (4) может быть описано следующим выражением:

$$\dot{w}(t, x) = \dot{K}(t)x + K(t)\dot{x} = \left[\dot{K}(t) + K(t)A_{\Delta}(t) \right] x + K(t)B(t) [(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t)],$$

где $A_{\Delta}(t) = A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)$. Условие теоремы предполагает существование закона управления $\psi(t, x)$, обеспечивающего выполнение $w(t, x) = 0$; следовательно, $\dot{w}(t, x) = 0$ для всех $t \geq t_w$. Тогда управление для замкнутой системы при $t \geq t_w$, также известное как *эквивалентное управление* [1], имеет вид

$$(14) \quad u_{eq} = -(\mathbb{I} + \Delta B(t))^{-1} \left(\delta(t) + (K(t)B(t))^{-1} \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right] x \right).$$

Заметим, что $(\mathbb{I} + \Delta B(t))^{-1}$ существует в силу Д.1.2, а матрица $K(t)B(t) = B^{\top}(t)P(t)B(t)$ не вырождается, поскольку $B(t)$ полного ранга m в соответствии с условием теоремы, а $P(t) \succ 0$ из условия теоремы 1.

Подставив эквивалентное управление (14) в исходную систему (4), получим, так называемое уравнение *идеального скользящего режима*

$$(15) \quad \dot{x} = \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right) x.$$

Выберем в качестве кандидата функцию Ляпунова, использованную в доказательстве теоремы 1. Ее производная на решениях (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) = & x^{\top} P(t) \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - \right. \\ & \left. - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right) x + \\ & + x^{\top} \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - \right. \\ & \left. - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right)^{\top} P(t)x + x^{\top} \dot{P}(t)x. \end{aligned}$$

Упростим получившееся выражение и сгруппируем его следующим образом:

$$\begin{aligned} (16) \quad \dot{V}(t, x) = & x^{\top} \dot{P}(t)x + x^{\top} P(t)A_{\Delta}(t)x + x^{\top} A_{\Delta}^{\top}(t)P(t)x - \\ & - x^{\top} P(t)B(t)(K(t)B(t))^{-1} \\ & \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right] x - x^{\top} \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right]^{\top} (K(t)B(t))^{-\top} B^{\top}(t)P(t)x. \end{aligned}$$

В силу эквивалентного управления выполняется условие $w(t, x) = 0$, т.е. $B^\top(t)P(t)x = 0$. Упростим (16) как

$$(17) \quad \dot{V}(t, x) = x^\top \dot{P}(t)x + x^\top P(t)A_\Delta(t)x + x^\top A_\Delta^\top(t)P(t)x.$$

Выполнение условия $B^\top(t)P(t)x = 0$ означает, что эквивалентное управление (14) приводит систему к номинальному виду (с неопределенностью $B(t)\Gamma(t)E(t)$), т.е. выражение (17) совпадает с (8), которое приведено в доказательстве теоремы 1. Применяя последовательно рассуждения, приведенные в теореме 1, получим $V(t, x(t)) \leq e^{-\alpha t}V(0, x(0))$ и, следовательно, асимптотическую устойчивость рассматриваемого решения $x(t)$.

4.2.2. Синтез разрывных регуляторов

В предыдущих разделах были сформулированы теоремы 1 и 2, позволяющие естественным образом выбрать семейство многообразий скольжения, на котором решения системы асимптотически устойчивы, в случае периодических коэффициентов, а также учитывая неопределенность в матрице состояния. Финальным шагом является синтез разрывных регуляторов с целью обеспечить сходимость выбранных переменных скольжения к нулю (условие теоремы 2) при наличии неопределенностей в матрице управления и ограниченных согласованных возмущений. Модифицировав допущение **Д.1.2**, положим выполненным следующее

Допущение 2. Неопределенность в матрице управления удовлетворяет оценке

$$\|K(t)B(t)\Delta B(t)(K(t)B(t))^{-1}\|_* \leq \varepsilon < 1,$$

где $K(t)$ определено в соответствии с (10).

Рассмотрим динамику выбранной переменной скольжения $w(t, x) = K(t)x$ на решениях исходной системы (4)

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{w}(t, x) = & \left[\dot{K}(t) + K(t)(A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)) \right] x + \\ & + K(t)B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть неопределенности и возмущения удовлетворяют допущениям **Д.1.1–Д.1.3**, **Д.2**.

Тогда для системы (18) регулятор вида

$$(19) \quad u = -(K(t)B(t))^{-1} \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) \right),$$

где $\text{Sign}(w(t, x)) = [\text{sign}(w_1(t, x)), \dots, \text{sign}(w_m(t, x))]^\top$, а матрица коэффициентов $\kappa(t, x) = \text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\} > 0$ выбрана таким образом, что выполня-

ются поэлементные неравенства⁴

$$(20) \quad \kappa_i(t, x) > \varepsilon \sum_{j=1}^m \kappa_j(t, x) + \eta_i(t, x), \quad i = \overline{1, m},$$

при $\eta_i(t, x) = \|K_i(t)B(t)\|\rho(t) + \left(\|K_i(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\|$, обеспечивает сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \leq \frac{1}{\gamma}\|w(0, x(0))\|$ для некоторого $\gamma > 0$.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении. Аналогичный результат может быть получен для унитарного управления.

Теорема 4. Пусть неопределенности и возмущения удовлетворяют допущениям Д.1.1–Д.1.3.

Тогда для системы (18) регулятор вида

$$(21) \quad u = - (K(t)B(t))^{-1} \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} \right),$$

где коэффициент $\kappa_{\text{unit}}(t, x) > 0$ выбран таким образом, что выполняется неравенство

$$(22) \quad \kappa_{\text{unit}}(t, x) > \frac{\eta(t, x)}{1 - \varepsilon}$$

при $\eta(t, x) = \|K(t)B(t)\|\rho(t) + \left(\|K(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\|$, обеспечивает сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \leq \frac{1}{\beta}\|w(0, x(0))\|$ для некоторого $\beta > 0$.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Следствие 1. Система (4), замкнутая (19), (20) (или (21), (22)), глобально асимптотически устойчива.

Доказательство следствия 1. Применяя теорему 2 к каждому решению $x(t)$ замкнутой системы (4), (19), (20) (или (4), (21), (22)), получим сформулированное следствие 1.

4.3. Сравнение Ляпуновского синтеза и теории скользящих режимов

Построение поверхности разрыва для линейных систем с *периодическими* коэффициентами в рамках теории скользящих режимов представляет собой нетривиальную задачу. Конструктивный подход к ее решению дает процедура Ляпуновского синтеза [5]. Применительно к рассматриваемому

⁴ При достаточно малом ε система неравенств (20) разрешима, в частности при $\varepsilon < 1/m$.

классу систем она позволяет построить *периодическую* квадратичную функцию Ляпунова $V(t, x(t)) = x^\top(t)P(t)x(t)$ (теорема 1) для вспомогательной системы (5), задаваемую решением периодического дифференциального уравнения Риккати специального вида (7). Согласно теореме 2 решения системы $x(t)$ асимптотически устойчивы на семействе линейных многообразий $\mathcal{W}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : w(t, x) = 0\}$, где переменная скольжения $w(t, x)$ определяется как производная Ли функции $V(t, x(t))$ вдоль векторного поля $B(t)$. Тем самым множество $\mathcal{W}(t)$ параметризуется стабилизирующими решениями уравнения (7), которые соответствуют различному выбору матриц $Q(t)$ и $R(t) \succ 0$.

Кроме того, унитарный регулятор, использующийся в рамках данной методологии [6], испытывает разрыв только на $w(t, x) = 0$ и обеспечивает одновременную сходимость всех компонент $w(t, x)$ к нулю. Несмотря на установление асимптотической устойчивости (утверждение 1) с *верхней* оценкой скорости сходимости к $x = 0$, фактическое поведение решения $x(t)$ при наличии возмущений остается неопределенным, поскольку выполнение условия $w(t, x) = 0$ не гарантируется.

В этих условиях применение теории скользящих режимов позволяет не только обеспечить асимптотическую устойчивость системы (4), но и полностью определить динамику $x(t)$ на семействе $\mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq t_w \geq 0$ за счет свойства инвариантности относительно согласованных возмущений [4].

При условии построения семейства $\mathcal{W}(t)$ теория скользящих режимов обеспечивает: (i) существование регуляторов, гарантирующих достижение условия $w(t, x) = 0$ за конечное время: релейных (продемонстрировано в теореме 3), липшицевых, терминальных, на основе скользящих режимов высших порядков; (ii) возможность определения эквивалентного управления, поддерживающего выполнение условия $w(t, x) = 0$ при $t \geq t_w$, в отличие от Ляпуновского подхода.

Платой за *полную* определенность динамики на $\mathcal{W}(t)$ являются увеличенные оценки коэффициентов усиления разрывных регуляторов $\kappa(t, x)$ (теорема 3) и $\kappa_{\text{unit}}(t, x)$ (теорема 4), что приводит к более выраженному эффекту чаттеринга в канале управления $u(t)$ по сравнению с регуляторами на основе Ляпуновского синтеза (см. $\kappa_{\text{lr}}(t, x)$ в утверждении 1).

5. Иллюстративный пример

Для демонстрации предложенного метода рассмотрим систему с неопределенными периодическими коэффициентами вида

$$(23) \quad \dot{x} = (A + B(t)\Gamma(t)E(t))x + B(t)([1 + \Delta B(t)]u + \delta(t, x)),$$

где $A = TA_1T^{-1}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & A_2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \alpha \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$,
 $B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & B_1(t) \end{pmatrix}$, $B_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $E(t) = 0, 1(\sin(t) + 2)\mathbf{1}_4^\top$ (здесь $\mathbf{1}_4 -$

вектор-столбец размера 1×4 , заполненный единицами), а неопределенности и возмущения, удовлетворяющие допущениям Д.1.1–Д.1.3, приняты следующими:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 0,19 + 0,05\zeta_1 \\ -0,09 + 0,04\zeta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta B(t) = \begin{pmatrix} 0,1\zeta_3 & 0,02\zeta_4 \\ 0,02\zeta_5 & 0,1\zeta_6 \end{pmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{pmatrix},$$

где $\delta_1(t) = 0,2\zeta_7 + 0,4 \sin(3\pi t) + 0,3 \sin(11\pi t) + 5\|x\|$; $\delta_2(t) = 0,3\zeta_8 + 0,5 \sin(5\pi t) + 0,4 \sin(7\pi t) + 6\|x\|$, а ζ_i – независимые реализации равномерного шума из $[-1, 1]$ для $i = \overline{1, 8}$. Для согласованных возмущений $\delta(t, x)$ справедлива грубая оценка $\rho(x) \geq \|\delta(t, x)\|$, где $\rho(x) = 1,5 + 7,82\|x\|$.

Замечание 2. Для рассматриваемой пары $A(t)$, $B(t)$ матрица управляемости Калмана вырождена в каждой точке времени. Более того, обобщенная матрица управляемости [24] $\mathcal{O}_k(t) = (N_0(t) N_1(t) \cdots N_{k-1}(t))$, где $N_{j+1}(t) = \dot{N}_j(t) - A(t)N_j(t)$, $N_0(t) = B(t)$, $k \geq n$, имеет неполный ранг *при всех t и всех $k \geq n$* . Это обстоятельство затрудняет применение стандартных процедур синтеза, опирающихся на конструкции, требующие полной управляемости системы. В частности, в работе [25], посвященной задаче наблюдения для класса дифференциально наблюдаемых систем, используется увеличение размерности ($k > n$), при котором обеспечивается корректность выражений вида $(\mathcal{O}_k^\top(t) \mathcal{O}_k(t))^{-1} \mathcal{O}_k^\top(t)$. В рассматриваемом случае, ввиду неполного ранга $\mathcal{O}_k(t)$ для всех $k \geq n$, такая конструкция неприменима. В то же время система является стабилизируемой⁵, несмотря на отсутствие полной управляемости на периоде, и условия теоремы 1 выполняются, что позволяет применять предложенный подход.

5.1. Построение стабилизирующего решения (7)

Процедура построения стабилизирующих решений матричного дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами остается нетривиальной задачей. Классические подходы основаны на интегрировании в обратном времени [26, 27], методе периодического генератора [28], итерационном методе Ньютона–Клейнмана для дифференциальных уравнений Ляпунова [29], а также на вычислении устойчивых подпространств матриц монодромии гамильтоновых систем [30]. Однако указанные методы в той или иной степени опираются на решение неустойчивых дифференциальных уравнений и могут демонстрировать численную неустойчивость, особенно при больших значениях периода T или быстро меняющихся коэффициентах, что было отмечено в [31].

⁵ Мультипликаторы Флоке λ_i матрицы монодромии $\Phi(T, 0)$, где $\dot{\Phi}(t, 0) = (A(t) + B(t)K(t))\Phi(t, 0)$, $\Phi(0, 0) = \mathbb{I}_4$, были вычислены численно как $\lambda_i \in \{-0,2269 \pm 0,0837i; 0,0019; 1,7615 \cdot 10^{-4}\}$. Поскольку $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = \overline{1, 4}$, замкнутая система при управлении $u = K(t)x$ является экспоненциально устойчивой и, следовательно, стабилизируемой (см. определение 1).

В отличие от них в настоящей работе используется подход [32], основанный на сведении задачи к конечномерной задаче полуопределенного программирования и не требующий численного интегрирования. Ниже приводится краткое описание данного метода.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Риккати с периодическими коэффициентами:

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(P(t), t) &:= \dot{P}(t) + A^\top(t)P(t) + P(t)A(t) - \\ &- P(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)P(t) + Q(t) = 0, \end{aligned}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ являются T -периодическими непрерывными матрицами, причем $Q(t)$, $R(t) \succ 0$, а пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема.

Ключевую роль в построении решения играет следующее экстремальное свойство [33]: стабилизирующее решение $P^+(t)$ является наибольшим решением неравенства Риккати $\mathcal{R}(P(t), t) \succeq 0$ на интервале $t \in [0, T]$, для любого T -периодического решения данного неравенства $P(t)$ при всех t выполнено неравенство $P(t) \preceq P^+(t)$.

Это свойство является ключевым, поскольку позволяет свести задачу решения уравнения Риккати к задаче максимизации функционала. Действительно, используя лемму Шура, неравенство $\mathcal{R}(P(t), t) \succeq 0$ можно переписать в виде ЛМН

$$(25) \quad \mathcal{L}(P(t), t) := \begin{pmatrix} \dot{P}(t) + A^\top(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t) & P(t)B(t) \\ B^\top(t)P(t) & R(t) \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

В силу приведенного выше экстремального свойства функция $P^+(t)$ максимизирует функционал

$$\mathcal{F}(P) := \int_0^T \text{tr}(P(t)) dt,$$

рассматриваемый на множестве всех T -периодических симметрических матричных функций класса C^1 , удовлетворяющих ограничению (25).

Полученная задача является бесконечномерной задачей оптимизации. Для ее численного решения введем аппроксимацию $P(t)$ тригонометрическим полиномом степени M :

$$(26) \quad P_M(t) = \sum_{k=-M}^M e^{ik\omega t} F_k,$$

где $\omega \triangleq 2\pi/T$, матрица $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична, $F_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, причем $F_{-k} = \overline{F_k}$.

Далее заменим континуальное семейство ограничений (25) их конечномерной дискретизацией в N равноотстоящих точках $t_j = (j-1)T/N$, $j = 1, \dots, N$:

$$\mathcal{L}(P(t_j), t_j) \succeq 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Для обеспечения компактности допустимого множества и корректности постановки задачи введем ограничения

$$-dI_n \preceq P(t_j) \preceq dI_n, \quad j = 1, \dots, N,$$

где $d > \|P^+(t)\|_C$ выбирается априори⁶. Отметим, что для аппроксимации (26) справедливо равенство

$$\int_0^T \text{tr}(P(t)) dt = T \cdot \text{tr}(F_0),$$

позволяющее перейти к конечномерной задаче полуопределенного программирования:

$$(27) \quad \max \quad \text{tr}(F_0) : \quad \mathcal{L}(P(t_j), t_j) \succeq 0, \quad -dI_n \preceq P(t_j) \preceq dI_n, \quad j = 1, \dots, N.$$

Обозначим через $P_{M,N}^+(t)$ решение задачи (27). Такая задача является стандартной в своем классе и может быть эффективно решена с использованием современных решателей.

Теорема 5 [[32], теорема 3.1]. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ – T -периодические дважды непрерывно дифференцируемые матричные функции, $Q(t)$, $R(t) \succ 0$, пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема и $d > \|P^+(t)\|_C$. Тогда

$$\|P^+(t) - P_{M,N}^+(t)\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \frac{N}{M^3} \rightarrow \infty.$$

Отметим, что данная оценка отражает нетривиальную взаимосвязь между параметрами аппроксимации: увеличение N при фиксированном M (или наоборот) само по себе не гарантирует повышения точности, что подчеркивается в [32].

Предложенный подход принципиально отличается от классических методов тем, что полностью избегает численного интегрирования неустойчивых дифференциальных уравнений, что делает его особенно эффективным при больших значениях периода T и быстро меняющихся коэффициентах. Численные эксперименты [32] показывают: (i) экспоненциальную сходимость по параметру M , существенно превосходящую теоретические оценки; (ii) устойчивость метода к ослаблению условий на $Q(t)$ – на практике он часто успешно применяется и в случаях $Q(t) \succeq 0$ или даже при знаконеопределенных $Q(t)$.

⁶ Здесь и далее $\|H(t)\|_C \triangleq \max_{t \in [0, T]} \|H(t)\|$ для T -периодической матрицы $H(t)$.

При решении периодического дифференциального уравнения Риккати специального вида (7) (теоремой 1) методом, описанным в разделе 5.1, были выбраны весовые матрицы $Q = \mathbb{I}_4$, $R = 0,1\mathbb{I}_2$ и параметр $\mu = 0,5$. При этом, переменная $w(t, x)$ вычислялась в соответствии с (10) как $w(t, x) = K(t)x$, где $K(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$.

Для того чтобы обеспечить равенство $w(t, x) = 0$ для всех $t \geq t_w$, приступим к синтезу регуляторов на скользящих режимах, описанных в теоремах 3 и 4. Можно увидеть, что для неопределенностей, на основе полученной ранее матричной функции $K(t)$, выполняются следующие грубые оценки, в частности: $\|\Delta \bar{B}(t)\|_\infty < \varepsilon_1 = 0,16$ и $\|\Delta \bar{B}(t)\|_2 < \varepsilon_2 = 0,14$ (допущение 2), а также справедливо $\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \leq 2,0$, $\|K(t)B(t)\| \leq 0,77$, $\|K_1(t)B(t)\| \leq 0,76$, $\|K_2(t)B(t)\| \leq 0,29$.

Коэффициенты усиления для разрывного векторного (19) управления были выбраны как $\kappa_{rel} = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\}$, где $\kappa_1 = (\varepsilon_1/(1 - \varepsilon_1)(\eta_2(x) + \beta_2) + \eta_1(x) + \beta_1)/(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2/(1 - \varepsilon_1))$, $\kappa_2 = (\varepsilon_1\kappa_1 + \eta_2(x) + \beta_2)/(1 - \varepsilon_1)$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0,01$ (обозначения совпадают с приведенными в теореме 3 и его доказательстве). Аналогично, коэффициент усиления для унитарного управления (теорема 4) был выбран как $\kappa_{unit} = (\eta + \beta)/(1 - \varepsilon_2)$, при $\|\Delta \bar{B}(t)\|_2 < \varepsilon_2 = 0,3$ (допущение 2), $\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \leq 12$, $\|K(t)B(t)\| \leq 4,4$, $\beta = 1$, а $\eta(x) = 4,4\rho(x) + 12\varepsilon_2\|x\|$.

Ниже на рис. 1–3 представлены результаты моделирования (метод Эйлера с шагом $\Delta t = 10^{-4}$ с, начальные условия $x(0) = (2 \ -2 \ -3 \ 1,5)^\top$) системы (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) и унитарным (21), (22) регуляторами: графики переходных процессов фазовых координат, величин управляющих воздействий и соответствующих им переменных скольжения $w(t, x)$.

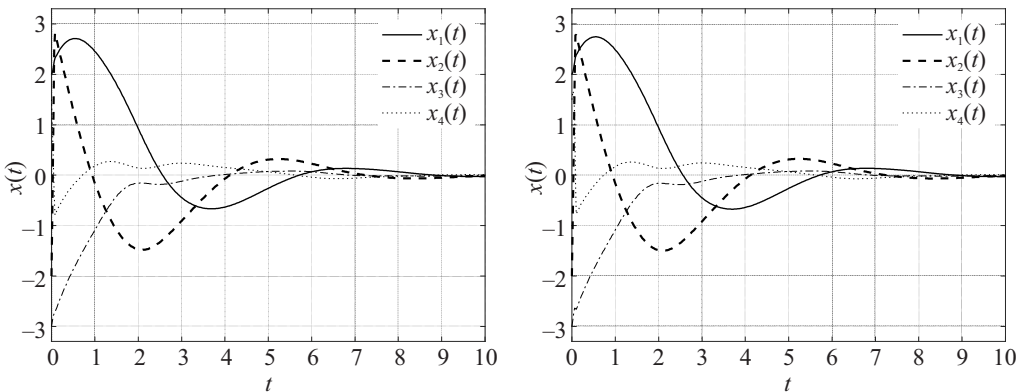


Рис. 1. Переходные процессы в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

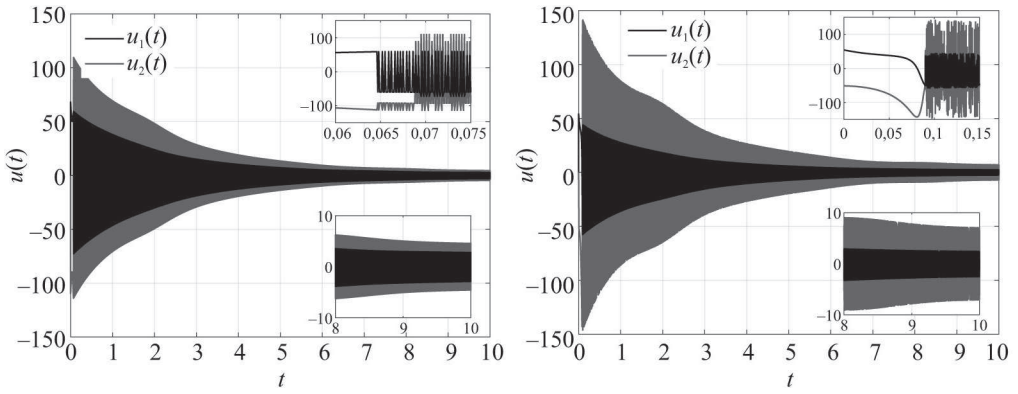


Рис. 2. Управление в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

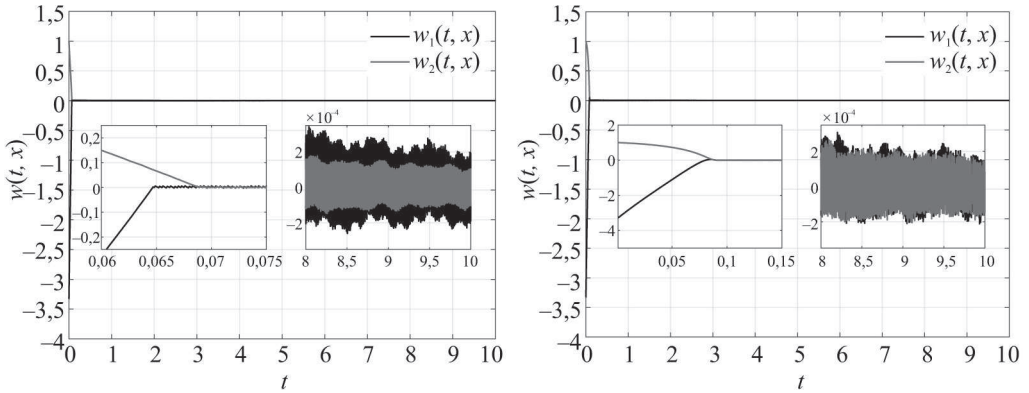


Рис. 3. Переменные скольжения $w(t, x)$ в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

Как и следовало ожидать, компоненты $w(t, x)$ в случае унитарного регулятора сошлись к 0 одновременно. При этом амплитуда чаттеринга в канале управления больше, чем для векторного управления.

6. Заключение

Рассмотрен класс *периодических* линейных систем со структурными неопределенностями в матрицах состояния и управления при ограниченных возмущениях в канале управления. Предложен метод стабилизации, основанный на совместном использовании Ляпуновского синтеза и скользящих режимов. Установлено существование квадратичной периодической функции Ляпунова и соответствующей стабилизирующей обратной связи для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния на основе анализа дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. Показано, что любая такая функция индуцирует семейство линейных

многообразий скольжения, обеспечивающих асимптотическую устойчивость. Синтезированы разрывные регуляторы: векторный и унитарный, обеспечивающие конечное время сходимости траекторий к выбранному многообразию при неопределенностях в матрице управления и согласованных возмущениях. Основной особенностью метода является структурное разделение неопределенностей: неопределенности в матрице состояния учитываются при построении функции Ляпунова и поверхности скольжения, тогда как неопределенности в матрице управления и возмущения компенсируются скользящим режимом. Метод не требует приведения системы к регулярной форме и применим к системам с периодическими коэффициентами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим (11). Из доказательства теоремы 1 следует, что $x^\top \left(\dot{P}(t) + P(t)A_{cl}(t) + A_{cl}^\top(t)P(t) \right) x \leq -\alpha V(t, x(t))$. Приняв это во внимание и используя обозначение (10), перепишем (11) в следующем виде:

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha V(t, x) + 2w^\top \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) v(t, x) - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x + \delta(t, x) \right].$$

При подстановке унитарного регулятора $v = -\kappa_{lr}(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|}$ можно заметить, что при $\kappa_{lr}(t, x) \geq (\rho(t, x) + \varepsilon \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|) / (1 - \varepsilon)$ обеспечивается выполнение $\dot{V}(t, x) \leq -\alpha V(t, x)$ в силу оценок: $\|\Delta B(t)\| \leq \bar{\varepsilon}$ (допущение Д.1.2) и $\|\delta(t, x) - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x\| \leq \rho(t, x) + \bar{\varepsilon} \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|$ (допущение Д.1.3). Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 3. При замыкании (18) законом управления (19) получим

$$\begin{aligned} (\text{П.1}) \quad \dot{w}(t, x) = & \left(K(t) [A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)] + \dot{K}(t) \right) x - \\ & - K(t)B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) (K(t)B(t))^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) \right) - \delta(t, x) \right]. \end{aligned}$$

Затем введя следующие обозначения $\Delta \bar{B}(t) = K(t)B(t)\Delta B(t)(K(t)B(t))^{-1}$ и $\bar{\delta}(t, x) = K(t)B(t)\delta(t, x) + \left(K(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta \bar{B}(t) \left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] \right) x$, упростим выражение (П.1)

$$(\text{П.2}) \quad \dot{w}(t, x) = -(\Delta \bar{B}(t) + \mathbb{I}) \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) + \bar{\delta}(t, x).$$

Перейдем к оценке $\bar{\delta}(t, x)$, рассмотрев по отдельности компоненты $\bar{\delta}_i(t, x)$ при $i = \overline{1, m}$:

$$\bar{\delta}_i(t, x) = K_i(t)B(t)\delta(t, x) + \left(K_i(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta \bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) \right) x,$$

где i -е строчки матриц $K(t)$ и $\Delta\bar{B}(t)$ обозначены как $K_i(t)$ и $\Delta\bar{B}_i(t)$, соответственно. Воспользовавшись допущениями **Д.1.1–Д.1.3**, **Д.2**: $\Gamma^\top(t)\Gamma(t) \leq \mathbb{I}$, $\|\Delta\bar{B}(t)\|_\infty = \varepsilon \leq 1$ и $\|\delta(t, x)\| \leq \rho(t, x)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.3}) \quad & |\bar{\delta}_i(t, x)| \leq |K_i(t)B(t)\delta(t, x)| + \\
 & + \left| \left(K_i(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta\bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) \right) x \right| \leq \|K_i(t)B(t)\| \|\delta(t, x)\| + \\
 & + \left(\|K_i(t)B(t)\| \|E(t)\| + \|\Delta\bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right)\| \right) \|x\| \leq \\
 & \leq \|K_i(t)B(t)\| \rho(t, x) + \left(\|K_i(t)B(t)\| \|E(t)\| + \varepsilon \|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\| \triangleq \eta_i(t, x).
 \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости решений (П.2) покажем что функция $V_w(t, x) = \frac{1}{2}w^\top(t, x)w(t, x)$ является функцией Ляпунова. Оценим производную этой функции на решениях системы, используя (П.2):

$$(\text{П.4}) \quad \dot{V}_w(t, x) = w^\top(t, x) \left[-(\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) + \bar{\delta}(t, x) \right].$$

Перезапишем (П.4) в виде сумм, обозначив i -е компоненты векторов $\kappa(t, x)$ как κ_i , а ij -й элемент матрицы $\Delta\bar{B}$ как $\Delta\bar{\beta}_{ij}$ и используя оценку (П.3),

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_w(t, x) &= - \sum_{i=1}^n \kappa_i |w_i| + \sum_{i=1}^n w_i \bar{\delta}_i - \sum_{i,j=1}^n w_i \Delta\bar{\beta}_{ij} \kappa_j \text{sign}(w_j) \leq \\
 &\leq - \sum_{i=1}^n \kappa_i |w_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| \eta_i + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n |w_i| \kappa_j \leq - \sum_{i=1}^n |w_i| \left(\kappa_i - \eta_i - \varepsilon \sum_{j=1}^n \kappa_j \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку матрица коэффициентов $\kappa(t, x)$ выбрана в соответствии с условием теоремы (20), то $\dot{V}_w(t, x)$ строго отрицательна. С другой стороны, если $\kappa_i = \varepsilon \sum_{j=1}^n \kappa_j + \eta_i + \beta_i$ для некоторых $\beta_i(t) > 0$ при $i = \overline{1, m}$, то

$$\dot{V}_w \leq -\gamma \|w(t, x)\|_1 \leq -\gamma \|w(t, x)\|_2 = -\gamma \sqrt{2V_w(t, x)},$$

где $\gamma = \min_{t,i} (|\beta_i(t)|)$, откуда следует сходимость $w(t, x(t))$ к нулю за конечное время $t_w \leq \frac{1}{\gamma} \|w(0, x(0))\|$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3 в тех же обозначениях, но с управлением (21), получим

$$(\text{П.5}) \quad \dot{w}(t, x) = -\kappa_{\text{unit}}(t, x) (\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} + \bar{\delta}(t, x).$$

Евклидова норма вектора $\bar{\delta}(t, x)$ может быть оценена, с применением допущений **Д.1.1–Д.1.3** при $\|\Delta\bar{B}(t)\|_2 \leq \varepsilon < 1$ (**Д.2**) как

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad \|\bar{\delta}(t, x)\| &\leq \|K(t)B(t)\|\rho(t, x) + \|\Delta\bar{B}(t)\| \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) x \leq \\
 &\leq \|K(t)B(t)\|\rho(t, x) + \\
 &+ \left(\|K(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\| = \eta(t, x).
 \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости решений (П.5) покажем что функция $V_w(t, x) = -\frac{1}{2}w^\top(t, x)w(t, x)$ является функцией Ляпунова. Оценим производную этой функции на решениях системы, используя (П.6):

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_w(t, x) &= -w^\top(t, x) \left[\kappa_{\text{unit}}(t, x) (\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} - \bar{\delta}(t, x) \right] \leq \\
 &\leq -\|w(t, x)\| [\kappa_{\text{unit}}(t, x) (1 - \varepsilon) - \eta(t, x)].
 \end{aligned}$$

Пусть $\kappa_{\text{unit}} = \frac{\eta(t, x) + \beta}{1 - \varepsilon}$ (условие (22)) для некоторого $\beta > 0$, тогда $\dot{V}_w \leq -\beta\|w(t, x)\| = -\beta\sqrt{2V_w(t, x)}$, откуда следует сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \frac{1}{\beta}\|w(0, x(0))\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
2. Лукьянов А.Г., Уткин В.И. Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // АиТ. 1981. № 3. С. 5–13.
Luk'yanov A. G., Utkin V. I. Methods for Reduction of Equations of Dynamic Systems to a Regular Form // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 4. P. 413–420.
3. Уткин В.И., Орлов Ю.В. Системы управления с векторными реле // АиТ. 2019. № 9. С. 143–155.
Utkin V. I., Orlov Y. V. Control systems with vector relays // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. P. 1671–1680.
4. Drazhenovic B. The Invariance Conditions in Variable Structure Systems // Automatica. 1969. V. 5. No. 3. P. 287–295.
5. Gutman S. Uncertain dynamical systems – A Lyapunov min-max approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 3. P. 437–443.
6. Gutman S., Leitmann G. Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty // IEEE CDC including the 15th Symp. Adap. Processes. 1976. P. 94–99.
7. Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. Control. 1993. V. 58. No. 6. P. 1247–1263.
8. Estrada M. A., Moreno J. A., Fridman L. Passive Fault-Tolerant Control via Sliding-Mode-Based Lyapunov Redesign // IEEE Trans. Autom. Control. 2024. V. 69. No. 10. P. 6777–6788.

9. *Yasuda K., Nakatsuji Y.* Robust sliding mode control of uncertain systems // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems. 1996. P. 15–19.
10. *Choi H.H.* On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties // Automatica. 1999. V. 35. No. 10. P. 1707–1715.
11. *Estrada M.A., Moreno J.A., Fridman L.* Sliding Mode Controllers Design based on Control Lyapunov functions for uncertain LTI systems // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56, No. 2. P. 1615–1620.
12. *Sætre C.F., Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V., Fridman L.M.* Robust orbital stabilization: A Floquet theory-based approach // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 16. P. 8075–8108.
13. *Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V.* Transverse Linearization for Controlled Mechanical Systems With Several Passive Degrees of Freedom // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55. No. 4. P. 893–906.
14. *Tarabukin I.M., Gusev S.V.* An Approach to Sliding Mode Control of Linear Systems with Periodic Coefficients // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2024. P. 29–33.
15. *Yakubovich V.A., Fradkov A.L., Hill D.J., Proskurnikov A.V.* Dissipativity of T-periodic linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. V. 52. No. 6. P. 1039–1047.
16. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости // АиТ. 2020. № 8. С. 8–28.
Balandin D.V., Kogan M.M. Methods for Reduction of Equations of Dynamic Systems to a Regular Form // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 8. P. 1367–1384.
17. *Grizzle J.W., Moog C.H., Chevallereau C.* Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 5. P. 559–576.
18. *Karavaev Y.L., Kilin A.A.* The Dynamics of a Spherical Robot of Combined Type by Periodic Control Actions // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. No. 4. P. 497–5047.
19. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. М.: ЛЕНАНД, 2014. 208 с.
20. *Kochetkov S., Rassadin Y., Utkin, V.* Disturbance rejection in the tracking problem for robot-manipulators // Proc. IEEE Int. Workshop on Metrology for AeroSpace. 2017. P. 301–306.
21. *Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H^∞ control theory // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 3. P. 356–361.
22. *Якубович В.А.* Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем. I // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 4. С. 181–200.
Yakubovich V.A. A linear-quadratic optimization problem and the frequency theorem for periodic systems. I // Siberian Math. J. 1986. V. 27. No. 4. P. 614–630.
23. *Bittanti S., Colaneri P., De Nicolao G.* The periodic Riccati equation // The Riccati Equation / S. Bittanti, A. J. Laub, J. C. Willems (Eds.). Springer, 1991.
24. *Silverman L.M., Meadows H.E.* Controllability and observability in time-variable linear systems // SIAM J. Control. 1967. V. 5. No. 1. P. 64–73.

25. *Meléndez-Pérez R., Moreno J.A.* Bl-homogeneous observer for differentially uniformly observable LTV systems with a single output // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems. 2024. P. 1–6.
26. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mex. 1960. V. 5. P. 102–119.
27. *Shayman M.A.* On the phase portrait of the matrix Riccati equation arising from the periodic control problem // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. No. 5. P. 717–751.
28. *Bekir E., Bucy R.S.* Periodic equilibria for matrix Riccati equations // SIAM J. Control Optim. 1976. V. 14. No. 4. P. 689–698.
29. *Kleinman D.L.* On an iterative technique for Riccati equation computations // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 114–115.
30. *Varga A.* On solving periodic Riccati equations // Numer. Linear Algebra Appl. 2008. V. 15. No. 9. P. 809–835.
31. *Varga A.* Computational issues for linear periodic systems: paradigms, algorithms, open problems // Int. J. Control. 2013. V. 86. No. 7. P. 1227–1239.
32. *Gusev S.V., Shiriaev A.S., Freidovich L.B.* SDP-based approximation of stabilising solutions for periodic matrix Riccati differential equations // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 7. P. 1396–1405.
33. *Chen S., Liu X., Chen G.* The extremal property of the periodic Riccati equation // Acta Math. Appl. Sin. 1989. V. 5. No. 4. P. 349–355.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.09.2025

После доработки 20.04.2026

Принята к публикации 28.04.2026

© 2026 г. Д.А. КОЗОРЕЗ, д-р техн. наук (dk@mai.ru),

А.Н. СИРОТИН, д-р физ.-мат. наук (asirothin2@yandex.ru)

(Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)),

К.И. СЫПАЛО, д-р техн. наук (ksypalo@mail.ru)

(ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская область)

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ УПРАВЛЯЕМЫХ КОММУТАТИВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для билинейных управляемых систем с дискретным временем и коммутативными матрицами установлены новые свойства множеств управляемости для фиксированного числа шагов.

Ключевые слова: билинейная система, множество управляемости.

DOI: 10.7868/S2413977726110022

1. Введение

Билинейные системы представляют собой самый простой класс нелинейных систем. Основной интерес к таким системам заключается в том, что они широко используются в реальных процессах [1–4]. Кроме того, они лучше изучены, чем большинство других нелинейных систем.

В исследованиях билинейных систем управляемость является важной темой. Эта проблема особенно актуальна для случая непрерывного времени. Результатам управляемости билинейных систем с непрерывным временем уделяется значительное внимание благодаря использованию мощных математических инструментов, таких как теория дифференциальных многообразий, методы алгебры Ли и т.д. В литературе были получены разные математические критерии управляемости билинейных систем с непрерывным временем [1]. Однако даже сейчас для билинейных систем с дискретным временем результаты по свойствам управляемости довольно скромные по сравнению с их аналогами с непрерывным временем.

Для общих нелинейных систем, в частности билинейных систем с дискретным временем, исчерпывающих необходимых и достаточных условий управляемости к настоящему времени не имеется. Тем не менее для специального класса билинейных систем с перестановочными матрицами имеется возможность установить конструктивные необходимые и достаточные условия управляемости [5–8]. А в [9] доказаны необходимые и достаточные условия управляемости дискретных билинейных систем с коммутативными матрицами.

Следующим шагом является расширение свойств управляемости для таких систем, и в первую очередь изучение свойств множеств управляемости для конечного числа шагов. Оказывается, свойства таких систем являются не очевидными и более сложными, чем казалось с первого взгляда. Например, оказывается неверным свойство монотонности по включению множеств управляемости (т.е. при увеличении числа шагов «размер» таких множеств не обязан увеличиваться), не установлено свойство замкнутости множеств управляемости для произвольного конечного числа шагов и т.п.

В статье обсуждаются новые свойства [10] множеств управляемости билинейных систем с дискретным временем и коммутативными матрицами.

2. Основная цель исследования

Рассматривается автономная билинейная система (A, B) с дискретным временем и скалярным управлением без ограничений

$$(1) \quad x(k+1) = (A + u_k B)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\},$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний; $u_k \in \mathbb{R}$ – управления в текущий шаг (момент времени); $A, B \in \mathbb{R}^n$ – соответствующие матрицы системы.

Билинейная система (A, B) называется управляемой, если для произвольной пары граничных допустимых векторов $x^\circ, x^{\circ\circ} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеется хотя бы один конечный набор управлений $\{u_0, \dots, u_{K-1}\}$ и число шагов $K \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ таких, что $x(0) = x^\circ$, $x(K) = x^{\circ\circ}$. Для системы (A, B) вводится множеств управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K) \subset \mathbb{R}^n$ из начального состояния x° за K шагов как множество

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : y = (A + u_{K-1}B) \dots (A + u_0B)x^\circ, \ u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \bigcup_{u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}} \{y \in \mathbb{R}^n : y = (A + u_{K-1}B) \dots (A + u_0B)x^\circ\}. \end{aligned}$$

В этом случае билинейная система (A, B) является управляемой тогда и только тогда, когда для каждого допустимого $x^\circ \neq 0$ верно равенство

$$\mathcal{Y}(x^\circ) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathcal{Y}(x^\circ) := \bigcup_{K \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Множества управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ могут быть построены с помощью (1) рекуррентно:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) &= \bigcup_{u_K \in \mathbb{R}} (A + u_K B) \mathcal{Y}(x^\circ, K), \\ \mathcal{Y}(x^\circ, 0) &= \{x^\circ\}. \end{aligned}$$

В настоящее время полного описания необходимых и достаточных условий управляемости для произвольных билинейных систем нет. Имеются разрозненные, в общем случае не связанные частичные необходимые и достаточные

условия для фрагментарных билинейных систем. Это не позволяет подробно изучить их свойства.

Тем не менее имеется специальный класс билинейных систем, для которых полные необходимые и достаточные условия управляемости установлены и доказаны [9] – это билинейные системы с коммутативными (перестановочными матрицами), т.е.

$$[A, B] = 0, \quad [A, B] := AB - BA.$$

В [5–9] доказано, что если билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является управляемой, то $n \leq 2$. Следовательно, управляемых систем с перестановочными матрицами при $n > 2$ не существует, а такие управляемые системы достаточно изучать при $n = 1$ и $n = 2$. Тем не менее билинейные системы с перестановочными матрицами, которые не являются управляемыми, существуют при любом натуральном n . Управляемые системы (A, B) с коммутативными матрицами при $n = 1$ не представляют интереса и сложности в силу их простоты и несложных свойств. Однако для управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами при $n = 2$ множества управляемости для произвольного числа шагов обладают неочевидными свойствами.

Для удобства будет использовано линейное невырожденное преобразование вектора состояния системы (A, B) . Пусть $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det P \neq 0$, тогда положим

$$\bar{x}(k) := P^{-1}x(k), \quad \bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}AP.$$

В этом случае верны представления

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= (\bar{A} + u_k \bar{B}) \bar{x}(k), \\ \bar{\mathcal{Y}}(\bar{x}^\circ, K) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : y = (\bar{A} + u_{K-1} \bar{B}) \dots (\bar{A} + u_0 \bar{B}) \bar{x}^\circ, u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{x}^\circ &:= P^{-1}x^\circ, \\ \bar{\mathcal{Y}}(\bar{x}^\circ, K) &= P^{-1}\mathcal{Y}(x^\circ, K). \end{aligned}$$

Система (A, B) управляема тогда и только тогда, когда управляема система $(\bar{A}, \bar{B})$.

Для некоторой невырожденной матрицы P билинейная управляемая система $(\bar{A}, \bar{B})$ с коммутативными матрицами может быть полностью охарактеризована необходимыми и достаточными условиями [5, 6, 9]:

$$(2) \quad \bar{A} = rR(\varphi_1), \quad \bar{B} = R(\varphi_2),$$

$$(3) \quad 0 < r^2 \sin^2 \theta < 1, \quad \theta := \varphi_1 - \varphi_2,$$

где

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

В современной интерпретации эти условия могут быть эквивалентно записаны так: билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами управляема тогда и только тогда, когда

1) матрицы подобны матрицам $SO(2)$ с помощью одной невырожденной матрицы;

2) $0 < \frac{1}{2} \frac{\rho(A)}{\rho(B)} \det(A^T B - B^T A) < 1$, где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A .

Билинейные системы с перестановочными матрицами, которые не являются управляемыми, согласно критерию [9] не обладают хотя бы одним свойством (2) или (3). Например, если

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I, \quad r = 1, \quad \bar{A}, \bar{B} \in SO(2)$$

или

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}, \bar{B} \notin SO(2),$$

то соответствующие билинейные системы $(\bar{A}, \bar{B})$ не являются управляемыми, хотя соответствующие матрицы коммутативны.

Целью настоящей статьи является характеристика специальных свойств множеств управляемости билинейных систем с перестановочными матрицами с дискретным временем для фиксированного числа шагов. Билинейные системы представляют собой семейство простейших нелинейных систем. Как оказывается, различие таких систем от известных линейных систем состоит в конструкции топологии соответствующих множеств управляемости. Действительно, множества управляемости для линейных систем с управлениями без ограничений представляют собой аффинные (в частности, линейные) подпространства. Множества управляемости билинейных систем представляют собой линейчатые поверхности, которые в общем случае не являются аффинными множествами, и более того, невыпуклыми множествами.

Везде далее в силу критерия управляемости считается, что $n = 2$ и билинейные системы с коммутативными матрицами управляемы.

3. Основной результат 1

В рассуждениях используется понятие проективного пространства. Как известно [11–13], 2-мерное проективное пространство $\mathbb{RP}^2$ есть множество, точками которого являются вещественные прямые в 3-мерном вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат.

Введем требуемые обозначения. Пусть $l_{a,b} \in \mathbb{RP}^2$ – прямая

$$l_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = a + tb, t \in \mathbb{R}\},$$

описываемая параметрическим уравнением с помощью векторов $a, b \in \mathbb{R}^2$. (Здесь, в частности, при $b = 0$ прямая $l_{a,0}$ может соответствовать точке

$a \in \mathbb{R}^2$). Вектор $l_{a,b}(t) = a + tb \in \mathbb{R}^2$ отвечает точке прямой $l_{a,b}$ при параметре t . Таким образом,

$$l_{a,b} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{l_{a,b}(t)\} \equiv \bigcup_t l_{a,b}(t),$$

$$\mathbb{RP}^2 := \bigcup_{a,b \in \mathbb{R}^2} l_{a,b}.$$

Далее для удобства используется обозначение

$$\bigcup_t (\cdot) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\cdot).$$

Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ вводится [14] понятие пучка матриц $h_{A,B}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$h_{A,B}(t) = A + tB, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$h_{A,B} = \bigcup_t h_{A,B}(t).$$

Здесь пучок $h_{A,B}$ удобно интерпретировать как прямую в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, т.е. $h_{A,B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Введем естественное определение умножения множеств:

$$h_{A,B}(t)\mathcal{X} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}(t)x, \quad \mathcal{X} \in \mathbb{R}^2,$$

$$h_{A,B}\mathcal{X} := \bigcup_t h_{A,B}(t)\mathcal{X} = \bigcup_t \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}(t)x = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}x.$$

Теорема 1. Справедливы утверждения:

- 1) $\mathcal{Y}(x^\circ, 1) \in \mathbb{RP}^2$;
- 2) $\mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$;
- 3) $\mathcal{Y}(x^\circ, K) \subset \mathbb{RP}^2$ при $K \geq 2$ и, следовательно, множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ является линейчатой поверхностью в $\mathbb{R}^2$;
- 4) $\dim \mathcal{Y}(x^\circ, 1) = 1$;
- 5) $\dim \text{Lin} \mathcal{Y}(x^\circ, K) = 2$ при $K \geq 2$.

Здесь $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ рассматривается как подмножество евклидовой плоскости в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство теоремы 1. 1. При $K = 1$ получаем по определению множества управляемости

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) = \bigcup_{u_0} ((A + u_0 B)x^\circ) = \bigcup_{u_0} (h_{A,B}(u_0)x^\circ) =$$

$$= \left(\bigcup_{u_0} h_{A,B}(u_0) \right) x^\circ = h_{A,B}x^\circ \in \mathbb{RP}^2,$$

так как

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) = h_{A,B}x^\circ = \bigcup_{\tau} ((A + \tau B)x^\circ) = \bigcup_{\tau} (Ax^\circ + \tau Bx^\circ) = l_{Ax^\circ, Bx^\circ} \in \mathbb{RP}^2.$$

2. Рассуждения проведем по индукции. Для $K = 1$ из утверждения 1 имеем

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) \in \mathbb{RP}^2.$$

Предположим, что для $K > 2$ верно включение

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) \in \mathbb{RP}^2.$$

Тогда по определению произведения множеств управляемости получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) &= \bigcup_{u_0, \dots, u_K} \{y \in \mathbb{R}^2: y = (A + u_K B) \dots (A + u_0 B)x^\circ\} = \\ &= \left(\bigcup_{u_K} (A + u_K B) \right) \left(\bigcup_{u_0, \dots, u_{K-1}} \{y \in \mathbb{R}^2: y = (A + u_{K-1} B) \dots (A + u_0 B)x^\circ\} \right) = \\ &= \left(\bigcup_{u_K} (A + u_K B) \right) \mathcal{Y}(x^\circ, K) = h_{A,B} \mathcal{Y}(x^\circ, K). \end{aligned}$$

Теперь утверждение 2 следует из принципа математической индукции.

3. Данное утверждение теперь следует из п. 2 и леммы 1.

4. В силу п. 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ есть прямая в $\mathbb{R}^2$ и поэтому оно является аффинным множеством [15, §1]. Размерность $\dim \mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ непустого аффинного множества $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ считается равной размерности подпространства, параллельного ему.

5. Выбираем и фиксируем $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ из условия

$$\begin{aligned} y &\in \mathcal{Y}(x^\circ, K-1) \text{ при } K > 1, \\ y &= x^\circ \text{ при } K = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{u_{K-1}} (A + u_{K-1} B)y &\subset \mathcal{Y}(x^\circ, K), \\ \bigcup_{u_{K-1}} (A + u_{K-1} B)y &= l_{Ay, By}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Из п. 2, следовательно, получаем

$$h_{A,B} l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K+1).$$

Выбираем произвольно различные вещественные числа $t_1 \neq t_2$. Поэтому

$$h_{A,B} l_{Ay, By}(t_i) \in \mathbb{RP}^2, \quad i = 1, 2,$$

и тогда

$$\begin{aligned} h_{A,B} l_{Ay,By}(t_i) &= \bigcup_{\tau} (A(Ay + t_i By) + \tau B(Ay + t_i By)) = \\ &= l_{A(Ay+t_i By), B(Ay+t_i By)} \in \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

Вычислим определитель, связанный с векторами $B(Ay + t_i By) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \det(B(Ay + t_1 By) | B(Ay + t_2 By)) &= \det B \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(PBP^{-1}) \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(\overline{B}) \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = (t_2 - t_1) \det(Ay | By) = \\ &= (t_2 - t_1) \det(PAP^{-1}y | PBP^{-1}y) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det(\overline{A}(P^{-1}y) | \overline{B}(P^{-1}y)) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det \overline{B} \det(\overline{B}^{-1} \overline{A}(P^{-1}y) | (P^{-1}y)) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det(rR(\theta)(P^{-1}y) | (P^{-1}y)). \end{aligned}$$

В силу необходимых и достаточных условий (3) заключаем:

$$R(\theta) \neq I$$

и поэтому

$$(t_2 - t_1) \det P \det(rR(\theta)(P^{-1}y) | (P^{-1}y)) \neq 0.$$

Это в свою очередь означает, что

$$\det(B(Ay + t_1 By) | B(Ay + t_2 By)) \neq 0.$$

Поэтому прямые $l_{A(Ay+t_i By), B(Ay+t_i By)}$ при $i = 1, 2$ не являются параллельными в $\mathbb{R}^2$. Это означает, что

$$\dim \text{Lin} \{l_{A(Ay+t_1 By), B(Ay+t_1 By)}, l_{A(Ay+t_2 By), B(Ay+t_2 By)}\} = 2$$

и тем более

$$\dim \text{Lin} \mathcal{Y}(x^\circ, K) = 2$$

при $K \geq 2$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для каждого $K \geq 1$ множества управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ являются неограниченными множествами.

Следствие 2. Множества управляемости при $K \geq 1$ могут быть представлены как объединения прямых из $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) = \bigcup_{\alpha(K) \in \hat{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha(K)), b(\alpha(K))}, \quad l_{a(\alpha(K)), b(\alpha(K))} \in \mathbb{RP}^2,$$

где $a(\alpha(K)), b(\alpha(K)) \in \mathbb{R}^2$, $b(\alpha(K)) \neq 0$ и множество индексов $\hat{A}$ не обязано быть счетным.

4. Основной результат 2

Утверждение теоремы 1 означает, что множество управляемости для фиксированного числа шагов как геометрический объект определяется множествами из проективного пространства и может быть построено как некоторое объединение прямых из $\mathbb{R}^2$. Следующий факт связан с тем наблюдением, что для такого объединения прямых выполняются некоторые специальные свойства, которые будут установлены далее.

Теорема 2. Пусть билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами является управляемой. Тогда справедливы утверждения:

- 1) множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представимо в виде объединения семейства замкнутых полуплоскостей из $\mathbb{R}^2$, поэтому множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ является пересечением семейства открытых полуплоскостей;
- 2) множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ в $\mathbb{R}^2$ – выпуклое множество, и, наоборот, $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ в $\mathbb{R}^2$ – невыпуклое множество.

Доказательство теоремы 2. 1. При $b \neq 0$ справедливо равенство

$$(4) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b} = h_{A,B} l_{a,b}.$$

Действительно, при $\varepsilon \geq 1$ получаем очевидное включение

$$h_{A,B} l_{a,b} \equiv 1 \cdot h_{A,B} l_{a,b} \subset \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b}.$$

Обратно. Выбираем произвольный вектор

$$x \in \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b}.$$

Это означает, что найдутся вещественные τ_1, t_1 и $\varepsilon \geq 1$ такие, что

$$x = \varepsilon h_{A,B}(\tau_1) l_{a,b}(t_1).$$

В силу леммы 2 всегда найдутся вещественные числа τ_2, t_2 такие, что

$$\varepsilon h_{A,B}(\tau_1) l_{a,b}(t_1) = h_{A,B}(\tau_2) l_{a,b}(t_2)$$

и поэтому

$$x \in h_{A,B} l_{a,b}.$$

Следовательно, получаем обратное включение

$$\bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b} \subset h_{A,B} l_{a,b}$$

и требуемое равенство (4) получено.

Для произвольного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2$ введем его полное описание:

$$(5) \quad \mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)},$$

где $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathbb{R}^2$, $b(\alpha) \neq 0$. Тогда получаем соответствующее равенство

$$(6) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} = h_{A,B} \mathcal{X},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \left(\varepsilon h_{A,B} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} \right) \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = h_{A,B} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = h_{A,B} \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Покажем, что множество $h_{A,B} \mathcal{X}$ есть объединение замкнутых полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$.

Действительно, выполним последовательные преобразования

$$\begin{aligned} (7) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \left(\varepsilon h_{A,B} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} \right) \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \bigcup_t l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t). \end{aligned}$$

Теперь по определению получаем

$$\begin{aligned} h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) &= \bigcup_{\tau} h_{A,B}(\tau) l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \bigcup_{\tau} (A + \tau B)(a(\alpha) + tb(\alpha)) = \\ &= \bigcup_{\tau} (A(a(\alpha) + tb(\alpha)) + \tau B(a(\alpha) + tb(\alpha))) = \\ &= \bigcup_{\tau} l_{A(a(\alpha) + tb(\alpha)), B(a(\alpha) + tb(\alpha))}(\tau) = l_{A(a(\alpha) + tb(\alpha)), B(a(\alpha) + tb(\alpha))} \in \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

К этому моменту использовалось определение параметрического уравнения для прямой. Теперь обратимся к соответствующему эквивалентному общему уравнению прямой на плоскости [17].

Выберем вектор $c(t, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$c^T(t, \alpha) B(a(\alpha) + tb(\alpha)) = 0.$$

Такой вектор всегда существует, и он может быть не единственен. Поэтому такой ненулевой вектор $c(t, \alpha)$ выбираем из дополнительного условия

$$c^T(t, \alpha) A(a(\alpha) + tb(\alpha)) \geq 0.$$

Положим

$$\lambda(t, \alpha) := c^T(t, \alpha)A(a(\alpha) + tb(\alpha)) \geq 0.$$

Определим множество

$$H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \lambda(t, \alpha)\},$$

которое определяет некоторое общее уравнение первоначальной прямой $l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))}$. Таким образом, верно равенство

$$l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))} = H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^-.$$

Определим множество

$$H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x \geq \lambda(t, \alpha)\},$$

которое соответствует некоторой замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^2$. В этом случае получаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \lambda(t, \alpha)\} = \\ &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \varepsilon \lambda(t, \alpha)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x \geq \lambda(t, \alpha)\} = H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq. \end{aligned}$$

Следовательно, из (7)

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A, B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A, B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq. \end{aligned}$$

И, наконец, из (6) получаем

$$(8) \quad h_{A, B} \mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq.$$

Это означает, что множество $h_{A, B} \mathcal{X}$ из (5) представляет собой объединение замкнутых полуплоскостей.

По следствию 2 теоремы 1 и (5) получаем, что структура множеств $\mathcal{X}$ и множеств управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ идентична. Следовательно, по п. 2 теоремы 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = h_{A, B} \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$ идентично множеству $h_{A, B} \mathcal{X}$.

Здесь следует заметить, что множества $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$ являются невырожденными прямыми и поэтому не имеют изолированных точек. Это означает, что элементы множества (5) таковы, что $l_{a(\alpha), b(\alpha)}$ есть прямые и не состоят из изолированных точек, т.е. $b(\alpha) \neq 0$, а лемма 2 используется корректно.

По (8) заключаем, что множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представляет собой объединение замкнутых полупространств в $\mathbb{R}^2$.

Наоборот, множество $\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X})$ есть дополнение к $\mathbb{R}^2$ и поэтому

$$\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap_t \left(\mathbb{R}^2 \setminus H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{\geq} \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap_t H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{<},$$

где

$$H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{<} = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x < \lambda(t, \alpha)\}.$$

Данное множество представляет собой открытую полуплоскость в $\mathbb{R}^2$. Как и ранее, по п. 2 теоремы 1 множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = \mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K))$ при $K \geq 1$ идентично множеству $\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X})$. Следовательно, множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представляет собой пересечение открытых полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$.

2. По построению открытая полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ есть выпуклое множество. Следовательно, множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ всегда есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ как пересечение выпуклых множеств.

Докажем теперь, что для всех $K \geq 2$ множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не является выпуклым множеством. Здесь достаточно рассмотреть два случая: $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не является полуплоскостью и $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ – полуплоскость.

Если множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ выпукло и одновременно не есть полуплоскость, то $\mathcal{Y}(x^\circ, K) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K))$ не может быть выпуклым множеством.

Напротив, допустим, что $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ есть (открытая) полуплоскость (выпуклое множество). Следовательно, по предположению множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ может оказаться замкнутой полуплоскостью, а поэтому выпуклым множеством.

Рассуждаем от противного. Допустим, что имеется K , при $K \geq 2$, и такое множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$, которое является полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$. Поэтому найдется ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^2$ такой, что

$$c^T x \geq \lambda > 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Выбираем произвольно

$$y \in \mathcal{Y}(x^\circ, K-1)$$

и поэтому по построению $y \neq 0$.

Поскольку

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) = h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K-1),$$

то

$$h_{A,B}y = l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K)$$

и поэтому должно выполняться неравенство

$$c^T l_{Ay, By}(t) \geq \lambda \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

Тогда верно неравенство

$$c^T (Ay + tBy) \geq \lambda \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

В силу произвольности параметра t получаем равенство

$$c^T By = 0.$$

Поэтому получаем неравенство

$$c^T Ay = (A^T c)^T y \geq \lambda > 0 \quad \text{при } y \in \mathcal{Y}(x^\circ, K - 1).$$

Вектор $A^T c \neq 0$, поскольку матрица $A = P^{-1} \bar{A} P$ невырождена, так как $\bar{A} \in \text{SO}(2)$. Это означает, что множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K - 1)$ есть замкнутая полуплоскость в $\mathbb{R}^2$.

Следовательно, по индукции при $K \geq 2$ набор множеств управляемости $\{\mathcal{Y}(x^\circ, K), \mathcal{Y}(x^\circ, K - 1), \dots, \mathcal{Y}(x^\circ, 1)\}$ образует набор полуплоскостей. С другой стороны, в силу п. 1 теоремы 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ есть прямая в $\mathbb{R}^2$ и не может быть полуплоскостью.

Противоречие означает, что множества $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не являются замкнутыми полуплоскостями, а поэтому не может оказаться выпуклым множеством.

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

Для билинейных систем с дискретным временем и коммутативными матрицами установлены новые специальные свойства множеств управляемости для фиксированного числа шагов: множества управляемости представляют собой линейчатые поверхности; дополнение к множеству управляемости есть пересечение полуплоскостей и поэтому является выпуклым множеством.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 1. Если

$$\mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2,$$

то

$$h_{A,B} \mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2.$$

Доказательство леммы 2. Для одноточечного множества $\mathcal{X} = \{y\}$ по определению получаем

$$h_{A,B} y = \bigcup_t h_{A,B}(t) y = \bigcup_t (A + tB) y = \bigcup_t (Ay + tBy) = \bigcup_t l_{Ay, By}(t) = l_{Ay, By},$$

и, следовательно,

$$h_{A,B} y \in \mathbb{RP}^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
h_{A,B}l_{a,b} &= \bigcup_t h_{A,B}(t)l_{a,b} = \bigcup_t h_{A,B}(t) \left(\bigcup_\tau l_{a,b}(\tau) \right) = \bigcup_t h_{A,B}(t) \left(\bigcup_\tau (a + \tau b) \right) = \\
&= \bigcup_t \bigcup_\tau h_{A,B}(t)(a + \tau b) = \bigcup_t \bigcup_\tau (h_{A,B}(t)a + \tau h_{A,B}(t)b) = \\
&= \bigcup_t \bigcup_\tau \left(l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b}(\tau) \right) = \bigcup_t l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b} \subset \mathbb{RP}^2,
\end{aligned}$$

поскольку по построению

$$l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b} \in \mathbb{RP}^2.$$

Следовательно, по определению каждое множество $\mathcal{X}$ из $\mathbb{RP}^2$ может быть представлено в виде объединения прямых из $\mathbb{RP}^2$:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)}, \quad l_{a(\alpha), b(\alpha)} \in \mathbb{RP}^2,$$

где $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Это в силу проведенных рассуждений означает, что

$$h_{A,B}\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} h_{A,B}l_{a(\alpha), b(\alpha)} \subset \mathbb{RP}^2,$$

поскольку

$$h_{A,B}l_{a(\alpha), b(\alpha)} \subset \mathbb{RP}^2.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для произвольных вещественных чисел τ_1, t_1 и $\varepsilon \geq 1$ найдутся подходящие вещественные числа τ_2, t_2 такие, что

$$(П.1) \quad \varepsilon h_{A,B}(\tau_1)l_{a,b}(t_1) = h_{A,B}(\tau_2)l_{a,b}(t_2)$$

при $b \neq 0$.

Доказательство леммы 2. Заметим, что равенство (П.1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется аналогичное равенство

$$(П.2) \quad \varepsilon h_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau_1)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t_1) = h_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau_2)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t_2),$$

где

$$\overline{a} = P^{-1}a, \quad \overline{b} = P^{-1}b.$$

Действительно, по определению

$$\begin{aligned}
h_{A,B}(\tau)l_{a,b}(t) &= (A + \tau B)(a + tb) = (P\overline{A}P^{-1} + \tau P\overline{B}P^{-1})(a + tb) = \\
&= P(\overline{A}P^{-1} + \tau\overline{B}P^{-1})(a + tb) = P(\overline{A} + \tau\overline{B})(P^{-1}a + tP^{-1}b) = \\
&= P(\overline{A} + \tau\overline{B})(\overline{a} + t\overline{b}) = Ph_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t)
\end{aligned}$$

и матрица P невырожденная.

Равенство (П.2) запишем подробнее:

$$(П.3) \quad \varepsilon (rR(\varphi_1) + \tau_1 R(\varphi_2)) (\bar{a} + t_1 \bar{b}) = (rR(\varphi_1) + \tau_2 R(\varphi_2)) (\bar{a} + t_2 \bar{b}).$$

В силу $R(\varphi_2) \in \text{SO}(2)$ равенство (П.3) эквивалентно равенству

$$(П.4) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a} + t_1 \bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a} + t_2 \bar{b}).$$

Положим

$$(П.5) \quad t_i = t_i^\circ + t, \quad \bar{a}^\circ = \bar{a} + t\bar{b}, \quad i = 1, 2,$$

где t_i°, t будут определены далее. Поскольку

$$(П.6) \quad \bar{a} = t_i \bar{b} = (\bar{a} + t\bar{b}) + t_i^\circ \bar{b} \equiv \bar{a}^\circ + t_i^\circ \bar{b},$$

то число t выберем из условия

$$\bar{b}^T (\bar{a} + t\bar{b}) = 0$$

или

$$\bar{b}^T \bar{a}^\circ = 0.$$

Следовательно,

$$(П.7) \quad t = -\frac{\bar{b}^T \bar{a}}{\bar{b}^T \bar{b}}, \quad t_i^\circ = t_i + \frac{\bar{b}^T \bar{a}}{\bar{b}^T \bar{b}}.$$

Используя (П.5)–(П.7) в (П.4), получаем эквивалентное равенство

$$(П.8) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a}^\circ + t_1^\circ \bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a}^\circ + t_2^\circ \bar{b}).$$

Пусть $C \in \text{SO}(2)$, тогда в силу коммутативности матриц из $\text{SO}(2)$ получаем эквивалентное равенство

$$\varepsilon C (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a}^\circ + t_1^\circ \bar{b}) = C (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a}^\circ + t_2^\circ \bar{b})$$

или

$$(П.9) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (C\bar{a}^\circ + t_1^\circ C\bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (C\bar{a}^\circ + t_2^\circ C\bar{b}).$$

По условию $b \neq 0$, и поэтому матрица C может быть выбрана так, что

$$(П.10) \quad \mu > 0, \quad C\bar{b} = \mu e^1, \quad C\bar{a}^\circ = \lambda e^2; \quad e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вещественное число λ может быть произвольно.

Здесь равенство

$$\lambda = 0$$

верно тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}^\circ$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Действительно, пусть $\lambda = 0$, тогда из (П.10) следует

$$\bar{a}^\circ = 0.$$

По определению (П.6) и (П.7) получаем

$$(П.11) \quad 0 = (\bar{a}^\circ)^\top \bar{a}^\circ = \left(\bar{a} - \frac{\bar{b}^\top \bar{a} \bar{b}}{\bar{b}^\top \bar{b}} \right)^\top \left(\bar{a} - \frac{\bar{b}^\top \bar{a} \bar{b}}{\bar{b}^\top \bar{b}} \right) = \bar{a}^\top \bar{a} - \frac{(\bar{b}^\top \bar{a})^2}{\bar{b}^\top \bar{b}} = \\ = (\bar{b}^\top \bar{b}) \left((\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 \right)$$

и поэтому

$$(П.12) \quad (\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 = 0.$$

Как известно, неравенство Коши–Буняковского

$$(\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 \geq 0$$

обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Обратно, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то из (П.12) получаем (П.11), и это есть равенство $\bar{a}^\circ = 0$. Теперь из (П.10) получаем $\lambda = 0$.

В силу (П.10) замечаем, что равенство (П.9) эквивалентно соотношению

$$\varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\lambda e^2 + \mu t_1^\circ e^1) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\lambda e^2 + \mu t_2^\circ e^1)$$

или

$$(П.13) \quad \varepsilon rR(\theta) \begin{pmatrix} \mu t_1^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} + \varepsilon \tau_1 \begin{pmatrix} \mu t_1^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} = rR(\theta) \begin{pmatrix} \mu t_2^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \mu t_2^\circ \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая:

$$\lambda = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Пусть $\lambda = 0$. Введем обозначения

$$\hat{t}_i := r^{-1} \mu t_i^\circ, \quad i = 1, 2; \quad \hat{\tau}_1 := \varepsilon \tau_1, \quad \hat{\tau}_2 := \tau_2.$$

Тогда уравнение (П.13) приводится к виду

$$(П.14) \quad \varepsilon R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_1 \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_2 \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покоординатная запись (П.14) приводит к появлению двух скалярных уравнений

$$(П.15) \quad \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \hat{\tau}_2 \hat{t}_2, \\ -\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta = -\hat{t}_2 \sin \theta.$$

В силу (3) имеем $\sin \theta \neq 0$ и поэтому

$$(П.16) \quad \hat{t}_2 = \varepsilon \hat{t}_1.$$

Подстановка (П.16) в (П.15) приводит к уравнению

$$\varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \hat{\tau}_2 \hat{t}_1$$

или

$$\hat{t}_1 (\hat{\tau}_1 - \varepsilon \hat{\tau}_2) = 0.$$

Если $\hat{t}_1 = 0$, то это равенство выполняется тривиально, и, следовательно, $\hat{\tau}_2$ можно выбирать произвольно.

Если же $\hat{t}_1 \neq 0$, то должно быть верно равенство

$$(П.17) \quad \hat{\tau}_2 = \varepsilon^{-1} \hat{\tau}_1.$$

Это означает, что (П.17) и (П.16) составляют допустимое решение уравнения (П.14) для произвольных вещественных чисел $\hat{\tau}_1, \hat{t}_1$ и $\varepsilon \geq 1$. Поэтому при $\lambda = 0$ уравнение (П.14) всегда разрешимо относительно $\hat{\tau}_2, \hat{t}_2$. Здесь использовалась цепочка эквивалентных уравнений (П.14), (П.9), (П.8), (П.4), (П.3), (П.2).

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Введем обозначения

$$(П.18) \quad \hat{t}_i := r^{-1} \lambda^{-1} \mu t_i^0, \quad i = 1, 2; \quad \hat{\tau}_1 := \varepsilon \tau_1, \quad \hat{\tau}_2 := \tau_2.$$

Тогда уравнение (П.13) приводится к виду

$$(П.19) \quad \varepsilon R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_1 \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 1 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_2 \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к покоординатной записи

$$(П.20) \quad \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \sin \theta + \hat{\tau}_2 \hat{t}_2,$$

$$(П.21) \quad -\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + \varepsilon \cos \theta + \hat{\tau}_1 = -\hat{t}_2 \sin \theta + \cos \theta + \hat{\tau}_2.$$

Из (П.21) выражаем $\hat{\tau}_2$ через остальные параметры:

$$(П.22) \quad \hat{\tau}_2 = (\hat{t}_2 - \varepsilon \hat{t}_1) \sin \theta + (\varepsilon - 1) \cos \theta + \hat{\tau}_1.$$

Подстановка (П.22) в (П.20) приводит к соотношению

$$\varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \sin \theta + (\hat{t}_2 - \varepsilon \hat{t}_1) \hat{t}_2 \sin \theta + (\varepsilon - 1) \hat{t}_2 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_2$$

или после преобразования

$$(П.23) \quad \begin{aligned} & \hat{t}_2^2 \sin \theta + [\cos \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + (\varepsilon - 1) \cos \theta + \hat{\tau}_1] \hat{t}_2 + \\ & + [(1 - \varepsilon) \sin \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta - \hat{\tau}_1 \hat{t}_1] = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (П.23) очевидно сводится к квадратному уравнению относительно переменной $\hat{t}_2$. Составим соответствующий дискриминант и выполним очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} D &= [\varepsilon \cos \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + \hat{\tau}_1]^2 - 4 \sin \theta [(1 - \varepsilon) \sin \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta - \hat{\tau}_1 \hat{t}_1] = \\ &= \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 - 2\varepsilon^2 \hat{t}_1 \cos \theta \sin \theta + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon^2 \cos \theta - \\ &\quad - 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta - 4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta + 4\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta \cos \theta + 4\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 \sin \theta = \\ &= \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 + 2\varepsilon \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + 2\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \cos \theta - 4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

По условию $\varepsilon \geq 1$, поэтому следуют неравенства

$$\begin{aligned} -4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta &\geq 0, \\ \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta &\geq (\varepsilon - 2)^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство вида

$$\begin{aligned} D &\geq \varepsilon^2 \cos^2 \theta + (\varepsilon - 2)^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 + \\ &\quad + 2\varepsilon \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta \cos \theta + 2\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta + \\ &\quad + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \cos \theta = [\varepsilon \cos \theta + (2 - \varepsilon) \hat{t}_1 \sin \theta + \hat{\tau}_1]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, у квадратного уравнения (П.23) всегда имеется хотя бы один вещественный корень $\hat{\tau}_1$. Это приводит к выводу, что уравнение (П.19) разрешимо относительно $\hat{\tau}_2, \hat{t}_2$ для произвольных $\varepsilon \geq 1$ и вещественных $\hat{\tau}_1, \hat{t}_1$. Однозначная зависимость $\hat{\tau}_i, \hat{t}_i$ от τ_i, t_i в силу формул (П.18) и (П.8) означает, что уравнение (П.3) разрешимо благодаря разрешимости соответствующих эквивалентных соотношений.

Разрешимость (П.3) эквивалентна разрешимости (П.2) и (П.1).

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elliot D.L.* Bilinear Control Systems: Matrices in Action. Dordrecht: Springer, 2009.
2. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. New York: Academic, 1973.
3. *Mohler R.R., Kolodziej W.J.* An Overview of Bilinear System Theory and Applications // IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics. 1980. V. 10. No. 10. P. 683–688.
4. *Негойц К.* Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981.
5. *Сиротин А.Н.* Об управляемости однородных билинейных дискретных систем с коммутативными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 13–14.
6. *Сиротин А.Н.* О свойствах управляемости билинейных систем с дискретным временем, связанных с блочно-треугольными и перестановочными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2018. № 6. С. 4–19.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820010126>

- Sirotin A.N.* On the Properties of Controllability of Discrete-Time Bilinear Systems Associated with Block-Triangular and Permutation Matrices // J. Comput Syst. Sci. Int. 2018. V. 57. No. 6. P. 841–853. <https://doi.org/10.1134/S1064230718060102>
7. *Tie L., Cai K.-Y., Lin Y.* On Controllability of Discrete-Time Bilinear Systems // Journal of the Franklin Institute. 2011. V. 348. No. 5. P. 933–940. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.03.003>
 8. *Tie L., Lin Y.* On Controllability of Two-Dimensional Discrete-Time Bilinear Systems // International Journal of Systems Sciences. 2015. V. 46. No. 10. P. 1741–1751. <https://doi.org/10.1080/00207721.2013.834999>
 9. *Сиротин А.Н.* Критерий управляемости дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 68–87. <https://doi.org/10.31857/S0002338820010126>
Sirotin A.N. Controllability Criterion for Discrete Bilinear Systems with Transition Matrices // J. Comput Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. No. 1. P. 63–82. <https://doi.org/10.1134/S1064230720010116>
 10. *Козорез Д.А., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О некоторых свойствах управляемых коммутативных билинейных систем с дискретным временем // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2024). 1–8 сентября 2024 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2024. С. 325–326.
 11. *Крум Е.В.* Проективная геометрия. Санкт-Петербург: Лань, 2023.
 12. *Прасолов В.В., Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: МЦНМО, 2022.
 13. *Бэр Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955.
 14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
 15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
 16. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
 17. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Арутюновым.

Поступила в редакцию 07.10.2025

После доработки 29.12.2025

Принята к публикации 12.01.2026

© 2026 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет)

ИНТЕГРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: МЕТОД ВЗВЕШЕННОГО ФАЗОВОГО ОБЪЕМА И ЭЛЛИпсоИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ¹

Предложен подход к анализу диссипативности и устойчивости динамических систем, основанный на понятии взвешенного фазового объема. Для произвольной весовой функции получено интегральное тождество, описывающее эволюцию взвешенного объема движущейся области и его обратной величины. Установлена связь полученных соотношений с теоремой Лиувилля об изменении фазового объема и транспортной теоремой Рейнольдса из механики сплошных сред. Сформулированы достаточные условия диссипативности и интегральной устойчивости. Показано, что одновременное выполнение условий для весовой функции и ее обратной величины накладывает геометрические ограничения на динамику системы. На основе этих условий построены эволюционные уравнения для покрывающего и внутреннего эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости. Доказана связь интегральной устойчивости с классической устойчивостью по Ляпунову. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Ключевые слова: теорема Лиувилля, транспортная теорема Рейнольдса, взвешенный фазовый объем, диссипативность, эллипсоидальная аппроксимация, дивергентный метод устойчивости, устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.7868/S2413977726110030

1. Введение

Исследование устойчивости динамических систем является фундаментальной проблемой теории дифференциальных уравнений и математической физики. Классическая теория устойчивости, заложенная в трудах А.М. Ляпунова [1], на протяжении более века остается основным инструментом анализа поведения решений. Развита им методология, основанная на исследовании знака производной специально подобранной скалярной функции (функции Ляпунова) вдоль траекторий системы, получила глубокое развитие, например в [2–6]. Несмотря на универсальность и широкую применимость, метод функций Ляпунова часто сталкивается с проблемой выбора подходящей

¹ Работа выполнена в Институте проблем машиноведения РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008.

функции, особенно для сложных нелинейных, неавтономных или разрывных систем, где конструктивных правил построения не существует.

Параллельно развивались иные подходы к анализу устойчивости. С одной стороны, это энергетические методы [7] и теория диссипативных систем [8], которые, хотя и предлагают физически интерпретируемые критерии, также требуют построения специальных функционалов. С другой стороны, значительные усилия были направлены на использование геометрических свойств векторного поля, в частности его дивергенции. Исходным пунктом здесь является классическая теорема Лиувилля [9, 10] об изменении фазового объема вдоль потока системы и ее интегральное обобщение – транспортная теорема Рейнольдса [11], широко используемая в механике сплошных сред. Идеи использования дивергенции для анализа устойчивости восходят к работам [12–14]. В отечественной научной школе это направление оформилось как индексный и дивергентный методы, представленные в [15–17], где устойчивость особой точки связывалась со знаком дивергенции или с поведением векторного поля на границах областей.

Существенный вклад в развитие качественной теории внесли работы В.П. Жукова [18–21] и др., в которых были предложены методы исследования устойчивости и неустойчивости, основанные на свойствах источников и стоков векторного поля, а также на анализе дивергенции для систем второго порядка. Однако эти результаты часто ограничены размерностью системы или требуют специфических предположений. Геометрические методы, использующие вращение векторного поля [22], также эффективны, но в основном для анализа на плоскости.

Перечисленные подходы получили дальнейшее развитие в работах последних двух десятилетий. В работах А. Рантцера [23, 24] предложен метод двойственных функций Ляпунова (метод плотностей), где исследуется эволюция плотности распределения начальных условий. Условия устойчивости формулируются в терминах существования стационарной функции плотности, удовлетворяющей уравнению в частных производных. В [25] получены необходимые условия почти глобальной устойчивости в рамках этого подхода. Дивергентные методы [18–21, 23–25] обобщены в [26–30] на нелинейные системы произвольной размерности. В [31, 32] дивергентный подход распространен на плотностные системы с возмущениями и получены как необходимые, так и достаточные условия глобальной устойчивости.

Отдельного упоминания заслуживает теория инвариантных множеств [33, 34], в рамках которой разработаны конструктивные методы построения эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости [35] и их применение в задачах управления и оценивания. Эти результаты близки по духу к геометрической части настоящей работы, однако в них, как правило, строятся лишь внешние (покрывающие) оценки, тогда как предлагаемый в статье подход дает и внутренние гарантированные границы.

Интерес к геометрическим и плотностным методам анализа динамических систем сохраняется и в публикациях последних нескольких лет. В частности, метод функций плотности получил развитие в задачах безопасной навигации. В [36, 37] с помощью функции плотности решается задача синтеза управления, гарантирующего уклонение от препятствий, что содержательно перекликается с идеей построения внутреннего эллипсоида в настоящей статье, свободного от траекторий системы. В [38] плотностные критерии распространены на анализ конечной устойчивости неавтономных систем, а в [39] получены обратные теоремы, связывающие существование плотности Ляпунова с устойчивостью временных и периодических систем. Предлагаемый в настоящей статье подход отличается от [36–39] тем, что использует произвольную весовую функцию, не требующую стационарности, а условия диссипативности формулируются непосредственно в терминах векторного поля и позволяют строить эволюционирующие эллипсоидальные оценки множеств достижимости как сверху (покрывающий эллипсоид), так и снизу (внутренний эллипсоид), что дает полную двустороннюю геометрическую картину динамики ансамбля траекторий.

Настоящая статья предлагает новый подход к анализу устойчивости и диссипативности динамических систем с использованием концепции взвешенного фазового объема. Ниже перечислим вклад статьи и ее основные отличия от существующих результатов:

- В отличие от классической теоремы Лиувилля [9, 10], описывающей эволюцию евклидова объема $\text{vol}(\Omega_t)$, и транспортной теоремы Рейнольдса [11] предлагаемый подход вводит произвольную весовую функцию $W(x, t)$, что позволяет исследовать эволюцию *взвешенного* объема $\int_{\Omega_t} W(x, t) dx$ и его обратной величины. Это дает возможность изучать динамику ансамблей траекторий в «искривленном» фазовом пространстве и переходить от анализа объема к анализу более сложных интегральных характеристик (см. раздел 4). Установлена связь скорости изменения интегралов от W и $1/W$ с производной Ли $\dot{W}$ и дивергенции поля, что является обобщением теоремы Лиувилля и транспортной теоремы Рейнольдса.
- Сформулированы и проанализированы условия диссипативности (см. раздел 4) для весовой функции W и ее обратной величины $1/W$. Показано, что их одновременное выполнение приводит к неубыванию произведения соответствующих интегралов (теорема 3). Этот результат интерпретирован как «принцип неопределенности» для динамических систем (замечание 1), накладывающий геометрические ограничения на возможную динамику, что отличает полученный результат от аналогов в классической теории устойчивости [1, 4] или дивергентных методах [15, 21, 23–30].
- Введены определения интегральной устойчивости (а также асимптотической и экспоненциальной интегральной устойчивости, см. раздел 5), которые классифицируют системы по скорости убывания взвешенного объема. В теореме 5 получены дифференциальные неравенства, гарантирующие экспоненциальное убывание. В отличие от [23–25], где условия формули-

руются в терминах стационарной плотности, предложенные критерии являются нестационарными по времени и непосредственно проверяются на векторном поле системы.

- Разработан метод построения эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости. В теореме 6 из первого условия диссипативности выведено уравнение эволюции *покрывающего* эллипсоида, который гарантированно содержит изучаемую область Ω_t . В теореме 7 из второго условия диссипативности получено уравнение для *внутреннего* эллипсоида, который свободен от точек изучаемой области. Совместное использование этих теорем (замечание 5) дает полную геометрическую картину динамики в виде «кольца» между двумя эллипсоидами, что является более информативным, чем традиционные оценки множеств достижимости [33–35, 40].
- В теореме 8 показано, что из существования сжимающегося семейства эллипсоидов, содержащих образы траекторий, следует устойчивость по Ляпунову. Тем самым установлена связь между предложенным интегральным подходом и классической теорией А.М. Ляпунова.

Таким образом, в отличие от классических методов, учитывающих анализ поведения отдельной траектории или изменение евклидова объема, развитый подход позволяет исследовать динамику систем в интегральной метрике с произвольным весом. Возможность построения на этой основе аппроксимирующих эллипсоидов, гарантированно содержащих (или не содержащих) эволюционирующую область, предоставляет собой геометрический инструмент для решения широкого круга задач от анализа устойчивости до синтеза алгоритмов управления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad \dot{x} = F(x, t),$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = [0; \infty)$), $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое векторное поле ($F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$). Если потребуются гладкость другого порядка, то об этом будет отдельно указано при выводе соответствующего результата. Предполагаем, что система (1) порождает глобальный фазовый поток $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет единственное решение $x(t) = \varphi_t(x_0)$, определенное для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим произвольную измеримую по Лебегу область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ с конечной мерой. Под действием потока эта область эволюционирует:

$$(2) \quad \Omega_t = \varphi_t(\Omega_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi_t(\xi), \xi \in \Omega_0\}.$$

Пусть $W : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция класса $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ (в разделе 5 и далее для анализа устойчивости системы (1) будет введено

дополнительное предположение о положительной определенности функции $W(x, t)$. Введем интегральные выражения:

$$(3) \quad I(t) = \int_{\Omega_t} W(x, t) dx, \quad I_{-1}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx,$$

где dx обозначает элемент объема в $\mathbb{R}^n$. Во втором интегральном выражении считается, что $W(x, t) \neq 0$ для всех $x \in \Omega_t$ и $t \geq 0$.

Основная цель статьи – исследовать поведение и устойчивость системы (1) в интегральной метрике, задаваемой весовой функцией $W(x, t)$. Для этого в статье будут получены выражения для скоростей изменения взвешенного фазового объема и его обратной величины, на основе которых будут сформулированы достаточные условия диссипативности, определения интегральной устойчивости и метод построения эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости.

3. Предварительные сведения

Для функции W определим производную вдоль траекторий системы (1):

$$(4) \quad \dot{W}(x, t) = \frac{\partial W}{\partial t}(x, t) + \nabla W(x, t)^\top F(x, t).$$

Данную величину часто называют производной Ли функции W по направлению векторного поля F . Символ « $\top$ » означает операцию транспонирования. В статье может встречаться запись $\nabla W(\varphi_t(\xi), t)$, что будет означать $\nabla W(\varphi_t(\xi), t) = \nabla W(x, t)|_{x=\varphi_t(\xi)} = \text{col} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}(x, t) \right\}$.

Пусть $J_t(\xi) = \partial \varphi_t(\xi) / \partial \xi$ – матрица Якоби потока. Известно, что $J_t(\xi)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dt} J_t(\xi) = A(\varphi_t(\xi), t) J_t(\xi), \quad J_0(\xi) = E,$$

где $A(x, t) = \partial F(x, t) / \partial x$ – матрица Якоби векторного поля, E – единичная матрица.

Теорема 1 (теорема Лиувилля [9, 10, 41, 42]). *Для определителя матрицы Якоби справедливо соотношение*

$$\frac{d}{dt} \det J_t(\xi) = \det J_t(\xi) \text{tr} A(\varphi_t(\xi), t).$$

Поскольку $\text{tr} A(x) = \text{div} F(x, t)$, то из (1) следует, что

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) = \det J_t(\xi) \text{div} F(\varphi_t(\xi), t).$$

Здесь и далее $\text{div} F(\varphi_t(\xi), t) = \text{div} F(x, t)|_{x=\varphi_t(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x, t)$.

Для потоков, порожденных системой (1), определитель Якоби всегда положителен. Действительно, уравнение (5) представляет собой линейное однородное уравнение первого порядка относительно $\det J_t$, решение которого имеет вид

$$\det J_t(\xi) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} F(\varphi_s(\xi), s) ds \right) > 0 \quad \forall t.$$

Поэтому в дальнейшем знак модуля будет опущен при работе с определителем Якоби.

4. Интегральные соотношения

Следующая теорема дает явные выражения для скорости изменения взвешенного фазового объема и его обратной величины вдоль потока системы.

Теорема 2. Пусть $W \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, а $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ — измеримая область с конечной мерой. Тогда для функций $I(t)$ и $I_{-1}(t)$, определенных формулами (3), справедливы соответствующие равенства

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &:= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx = \int_{\Omega_t} [\dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t)] dx, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &:= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx = \int_{\Omega_t} \left[-\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) \right] dx, \end{aligned}$$

где $\dot{W}(x, t)$ определяется формулой (4).

Доказательства всех теорем приведены в Приложении. Объединяя полученные результаты в теореме 2, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Для динамической системы (1), любой области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ и любой положительной функции $W(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ справедливо неравенство

$$(7) \quad \left(\int_{\Omega_t} W(x, t) dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \right) \geq [\operatorname{vol}(\Omega_t)]^2.$$

Если одновременно выполнены условия диссипативности:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) &\leq 0 \quad \forall x, t, \\ -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) &\leq 0 \quad \forall x, t, \end{aligned}$$

то величина $\left(\int_{\Omega_t} W dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W} dx \right)$ является невозрастающей функцией времени.

Полученные в теоремах 2 и 3 результаты и условия диссипативности обобщают классические интегральные теоремы. В последующих следствиях и замечаниях эти связи сформулированы в явном виде.

Следствие 1. Если $W(x, t) \equiv 1$, то $\dot{W}(x, t) = 0$, и формула (6) принимает вид $\frac{d}{dt} \text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \text{div } F(x, t) dx$, что представляет собой интегральную форму теоремы Лиувилля.

Следствие 2 (консервативные системы). Если $\text{div } F(x, t) \equiv 0$ (система сохраняет фазовый объем), то формулы в (6) упрощаются: $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \dot{W}(x, t) dx$, $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx = - \int_{\Omega_t} \frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} dx$.

Следствие 3 (диссипативные системы). Из второй части теоремы 3 следует, что величина $\int_{\Omega_t} W(x, t) dx$ (или $\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx$) не возрастает со временем. Это может служить интегральным критерием диссипативности.

Теорема 4 (транспортная теорема Рейнольдса [11]). Пусть Ω_t – область, движущаяся со скоростью $F(x, t)$. Тогда для любой гладкой функции $f(x, t)$ выполняется $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(fF) \right) dx$.

Следствие 4. Если в теореме 2 принять $W(x, t) = f(x, t)$ ($1/W(x, t) = f(x, t)$) и учесть соотношение $\text{div}(fF) = \nabla f^\top F + \text{div}(F)f$, то получим теорему 4.

Соотношения (6) могут найти применение в теории управления и анализе устойчивости, позволяя получать двусторонние оценки эволюции системы и исследовать ее диссипативные свойства. Особый интерес представляет случай, когда система диссипативна по отношению к W и $1/W$ одновременно. Это накладывает жесткие ограничения на возможную динамику и может служить критерием специальных типов устойчивости (см. раздел 5).

Замечание 1. Выражение (7) описывает, как меняется во времени соотношение между объемами в двух конформно связанных метриках. В сжимающихся системах ($\text{div } F < 0$) произведение может убывать, но никогда не становится меньше квадрата евклидова объема. Также неравенство (7) показывает, что нельзя сделать одновременно сколь угодно малыми и интеграл от W , и интеграл от $1/W$. То есть чем больше «концентрация» массы в области (большое значение $I(t)$), тем меньше должна быть «размазанность» (величина $I_{-1}(t)$), и наоборот. Величины W и $1/W$ являются взаимно дополнительными характеристиками системы, т.е. увеличение одной неизбежно приводит к уменьшению другой при фиксированном объеме. Произведение этих величин имеет нижнюю границу, определяемую геометрией области. Это напоминает принцип неопределенности Гейзенберга в квантовой механике (отсутствие возможности одновременно точно измерить координату и импульс), который утверждает, что для любой волновой функции $\psi(x)$ произведение дисперсий координаты и импульса ограничено снизу: $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$.

5. Приложение к исследованию устойчивости

5.1. Интегральные критерии устойчивости

Дадим вначале определения, в рамках которых будет исследована устойчивость системы (1).

Определение 1. Система (1) называется **интегрально устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$, если для любой измеримой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ с конечной мерой существует константа $C(\Omega_0) > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$(9) \quad I(t) \leq C(\Omega_0), \quad I_{-1}(t) \leq C(\Omega_0).$$

Определение 2. Система (1) называется **интегрально асимптотически устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$, если она интегрально устойчива и, кроме того, для любой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ выполнено хотя бы одно из соотношений

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_{-1}(t) = 0.$$

Определение 3. Система (1) называется **интегрально экспоненциально устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$ с показателем $\gamma > 0$, если для любой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ существует константа $C(\Omega_0) > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнена хотя бы одна из оценок

$$(11) \quad I(t) \leq C(\Omega_0)e^{-\gamma t}, \quad I_{-1}(t) \leq C(\Omega_0)e^{-\gamma t}.$$

Понятия интегральной устойчивости в определениях 1–3 являются базой для обобщения дивергентного подхода исследования устойчивости [18–21, 23–32]. С содержательной точки зрения интегральная устойчивость означает, что взвешенный фазовый объем области, занятой ансамблем траекторий, остается ограниченным во времени (или экспоненциально убывает). Это свойство характеризует диссипативное поведение системы в интегральной метрике и не требует устойчивости каждой отдельной траектории в смысле Ляпунова. Интегральная устойчивость полезна для анализа систем, в которых важна ограниченность «энергии» ансамбля траекторий, а не сходимость каждой из них к началу координат. Она позволяет гарантировать, что множество достижимости не расплывается и остается в некотором смысле ограниченным, что важно в задачах управления, оценивания и фильтрации.

Рассмотрим систему (1) с положением равновесия в начале координат: $F(0, t) = 0$ для любых $t \in \mathbb{R}_+$. Пусть $W(x, t)$ – произвольная положительно определенная функция ($W(x, t) > 0$ при $x \neq 0$ и $t \in \mathbb{R}_+$, $W(0, t) = 0$).

Теорема 5. Если существует функция $W \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $W(x, t) > 0$ при $x \neq 0$, и число $\gamma > 0$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$ выполнены

неравенства

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) &\leq -\gamma W(x, t), \\ -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) &\leq -\frac{\gamma}{W(x, t)}, \end{aligned}$$

то для любой начальной области Ω_0 справедлива экспоненциальная оценка

$$(13) \quad \int_{\Omega_t} W(x, t) dx \leq e^{-\gamma t} \int_{\Omega_0} W(x, t) dx, \quad \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \leq e^{-\gamma t} \int_{\Omega_0} \frac{1}{W(x, t)} dx.$$

Таким образом, при $\gamma = 0$ получим интегральную устойчивость с $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ ($C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$). При $\gamma > 0$ получим интегральную экспоненциальную устойчивость с $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ ($C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$).

Требование интегральной устойчивости в теореме 5 накладывает удобно проверяемые условия диссипативности непосредственно на векторное поле системы (1) и весовую функцию $W(x, t)$. В отличие от классического метода функций Ляпунова здесь не требуется строить функцию, строго убывающую вдоль каждой траектории. Достаточно обеспечить выполнение неравенств (12), (13) для выбранной весовой функции $W(x, t)$. Выполнение данных условий гарантирует, что любое измеримое множество начальных состояний эволюционирует так, что соответствующий взвешенный объем не возрастает (убывает), что дает количественную меру диссипации и может быть использовано для построения гарантированных эллипсоидальных оценок множеств достижимости (см. разделы 6, 7).

Замечание 2. Константа $C(\Omega_0)$ в определениях 1 и 3 может зависеть от выбора начальной области Ω_0 (ее размера, формы и положения), но не зависит от времени t . В случае, когда выполнены дифференциальные неравенства (12), можно выбрать $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ (соответственно $C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$).

Замечание 3. Пусть выполнено условие (12) при $\gamma = 0$ и, кроме того, множества

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) = 0 \right\}, \\ \mathcal{A}_{-1} &= \left\{ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) = 0 \right\} \end{aligned}$$

не содержат целых траекторий системы (1) (за исключением положения равновесия $x = 0$). Тогда система интегрально асимптотически устойчива.

Замечание 4. Условие (12) при $W(x, t) > 0$ можно переписать в виде

$$(14) \quad \frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma, \quad -\frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma \quad \forall x \neq 0.$$

Левая часть представляет собой сумму относительной скорости изменения функции W вдоль траекторий и дивергенции поля. Эти два условия можно объединить в одно неравенство:

$$(15) \quad \left| \frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} \right| + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma \Leftrightarrow \left| \frac{d}{dt} \ln W(x(t), t) \right| + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma,$$

которое, однако, является более сильным, чем каждое из условий по отдельности, и требует диссипативности как для W , так и для $1/W$ одновременно. С другой стороны, складывая (14), получаем:

$$(16) \quad \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma.$$

Таким образом, одновременное выполнение условий (12) возможно только в системах с неположительной дивергенцией, т.е. в системах, которые не расширяют фазовый объем (сжимающие или сохраняющие объем). При $\gamma = 0$ выражение (15) дает геометрическое ограничение: относительная скорость изменения весовой функции не может превышать по модулю скорость сжатия фазового объема.

5.2. Локальный анализ

В окрестности положения равновесия $x = 0$ можно использовать линеаризацию. Пусть $F(0, t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и векторное поле $F(x, t)$ является достаточно гладким по x в окрестности нуля. Обозначим через $A(t) = \partial F(0, t)$ матрицу линеаризованной системы. Тогда $\operatorname{div} F(0, t) = \operatorname{tr} A(t)$ (след матрицы $A(t)$). Рассмотрим весовую функцию $W(x, t)$ вида

$$(17) \quad W(x, t) = x^\top P(t)x,$$

где $P(t)$ – симметричная положительно определенная матрица, гладко зависящая от времени. Такая функция положительна при $x \neq 0$ и допускает локальный анализ.

В окрестности начала координат разложим $F(x, t)$ в ряд Тейлора по x :

$$(18) \quad \dot{x} := F(x, t) = A(t)x + O(\|x\|^2),$$

где запись $\phi(x) = O(\|x\|^k)$ при $x \rightarrow 0$ означает, что $\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|^k} < \infty$.

Используя (4), вычислим полную производную W , заданную (17), вдоль траекторий системы (18): $\dot{W}(x, t) = x^\top \dot{P}(t)x + 2x^\top P(t)A(t)x + O(\|x\|^3)$. Учитывая, что $W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) = x^\top P(t)x \cdot \operatorname{tr} A(t) + o(\|x\|^2)$, получаем разложение для первого условия диссипативности:

$$(19) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W^\top F + W \operatorname{div} F = \\ & = x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + \operatorname{tr} A(t)P(t) \right] x + o(\|x\|^2), \end{aligned}$$

где запись $\phi(x) = o(\|x\|^k)$ при $x \rightarrow 0$ означает, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|^k} = 0$.

Для второго условия диссипативности, связанного с $1/W$, рассмотрим величину $\Phi(x, t) := -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W^\top F \right) + \operatorname{div} F$. Используя те же разложения, получаем:

$$\Phi(x, t) = -\frac{x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x}{x^\top P(t)x} + \operatorname{tr} A(t) + o(1).$$

Следствие 5. Если существует такая матрица $P(t) > 0$, что квадратичная форма в (19) является равномерно отрицательно определенной, т.е. выполнено условие

$$(20) \quad \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + \operatorname{tr} A(t)P(t) \leq -\gamma P(t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то существует окрестность начала координат, в которой выполнено первое условие (11) с некоторым $\gamma > 0$.

Если для всех $x \neq 0$ и $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$(21) \quad -\frac{x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x}{x^\top P(t)x} + \operatorname{tr} A(t) \leq -\gamma,$$

то существует окрестность начала координат, в которой выполнено второе условие (11) с некоторым $\gamma > 0$.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Выберем $W(x, t) = x^\top P(t)x$, где $P(t) = P(t)^\top > 0$ – гладкая матрица. Тогда из условий (20) и (21) можно получить следующие матричные неравенства:

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + (\gamma + \operatorname{tr} A(t))P(t) &\leq 0, \\ \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + (\gamma - \operatorname{tr} A(t))P(t) &\leq 0. \end{aligned}$$

Если система одновременно диссипативна по W и $1/W$ с $\gamma > 0$, то, складывая неравенства (22), получаем

$$2 \left(\dot{P} + PA + A^\top P \right) + 2\gamma P \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{P} + PA + A^\top P \leq -\gamma P.$$

Это стандартное условие экспоненциальной устойчивости для неавтономных систем (аналог леммы Ляпунова). Если же выполнено только одно из неравенств, система может быть устойчива лишь в интегральном смысле. Например, второе неравенство в (22) является усиленным аналогом матричного неравенства Ляпунова.

Пример 2. Ради наглядности проиллюстрируем теоретические результаты разделов 5 и 7 на примере линейной автономной системы с седловой точкой $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1 \approx 0,6$ (неустойчивое направление) и $\lambda_2 \approx -2,6$ (устойчивое направление),

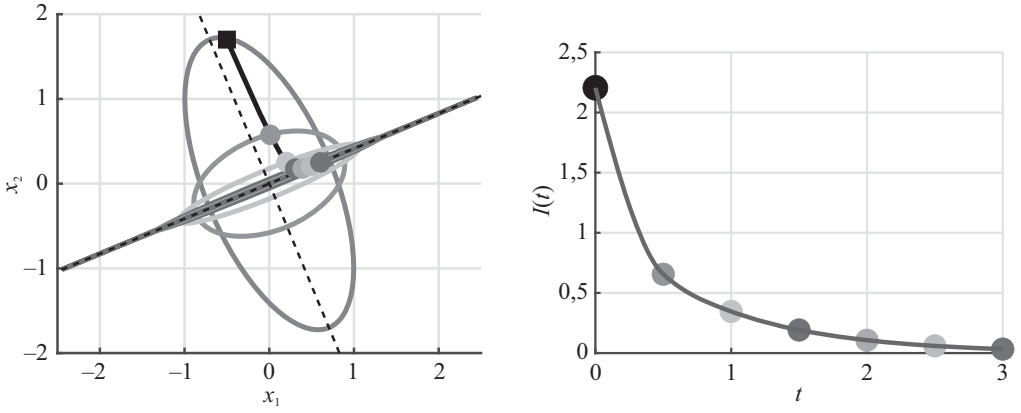


Рис. 1. Слева – эволюция эллипсоидов уровня $\{x : x^T P_t x = 1\}$ для системы (1) в виде деформации эллипсоидов, а также приведена фазовая траектория с начальным условием $x_0 = \text{col}\{-0,5; 1,7\}$. Справа – интеграл $I(t) = \int_{\Omega_t} W(x) dx$, где точки – численные значения в соответствующие моменты времени.

при этом $\text{tr } A = -2 < 0$, что гарантирует сжатие фазового объема с показателем $\text{div } F = -2$.

В качестве весовой функции выберем положительно определенную квадратичную форму $W(x) = x^T P x$, $P = \begin{bmatrix} 1,51 & 0,5034 \\ 0,5034 & 0,5039 \end{bmatrix}$. Начальная область Ω_0 определена как эллипс $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^T P x \leq 1\}$, что соответствует множеству уровня $W(x) = 1$. Для численного моделирования используется лагранжев подход: $N = 5000$ частиц равномерно распределены внутри Ω_0 и эволюционируют под действием потока системы (1).

Согласно теореме 5, для экспоненциальной устойчивости достаточно выполнения условий диссипативности (12). Для автономного случая условия (22) сводятся к существованию $\gamma > 0$ такого, что

$$(23) \quad A^T P + P A + (\text{div } F + \gamma)P \leq 0, \quad A^T P + P A + (\text{div } F - \gamma)P \leq 0.$$

Решение обобщенной проблемы собственных чисел $(A^T P + P A + \text{div } F \cdot P)v = -\mu P v$ дает максимальное значение $\gamma_{\max} \approx 1,9$. В вычислениях используется $\gamma = 1,5$, что гарантирует выполнение обоих неравенств.

Интегральный критерий устойчивости исследуется через вычисление первого условия в (3) и (П.1). В силу линейности системы, $\varphi_t(\xi) = e^{At}\xi$ и $\det J_t(\xi) = e^{t \text{div } F} = e^{-2t}$.

На рис. 1 (слева) представлена эволюция множества Ω_t и соответствующих эллипсоидов уровня $\{x : x^T P_t x = 1\}$, где $P_t = e^{-A^T t} P e^{-At}$ – матрица, задающая образ начального эллипсоида под действием потока. Видно, что эллипсоиды деформируются, вытягиваясь вдоль неустойчивого направления и сжимаясь вдоль устойчивого, при этом все частицы остаются внутри соответствующих эллипсоидов.

На рис. 1 (справа) представлена зависимость $I(t)$ от времени. Численные значения, полученные суммированием по частицам с весом e^{-2t} , демонстрируют монотонное убывание. Аппроксимация логарифма линейной функцией дает оценку показателя экспоненциального убывания $\gamma_{\text{est}} = 1,4923$, что с высокой точностью совпадает с теоретическим значением $\gamma = 1,5$, использованным в условиях диссипативности.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- 1) Выбранная весовая матрица P и параметр $\gamma = 1,5$ удовлетворяют матричным неравенствам (23) (выполнение условий диссипативности), что обеспечивает экспоненциальное убывание интеграла $I(t)$.
- 2) Наблюдаемое монотонное убывание $I(t)$ подтверждает интегральную устойчивость системы в смысле определения 2, причем скорость убывания соответствует теоретической оценке $I(t) \leq I(0)e^{-\gamma t}$.
- 3) Эллипсоиды $\{x : x^\top P_t x = 1\}$ представляют собой точные образы начального множества уровня весовой функции и демонстрируют установленное теорией сжатие вдоль устойчивого направления и растяжение вдоль неустойчивого при сохранении свойства покрытия всех траекторий.
- 4) Несмотря на наличие неустойчивого собственного направления, интеграл $I(t)$ убывает, что иллюстрирует принципиальное отличие интегральной устойчивости от устойчивости по Ляпунову: даже при расходящихся отдельных траекториях взвешенный объем области может сжиматься.

6. Эволюция покрывающего эллипсоида

Для анализа поведения динамических систем часто требуется не просто качественная картина эволюции, но и гарантированное множество, содержащее все траектории, исходящие из заданной начальной области. Наиболее удобной формой такой внешней аппроксимации множества достижимости является эллипсоид. В данном разделе будет показано, как условие (12) позволяет построить *эволюционирующий покрывающий эллипсоид*, который содержит область Ω_t для всех $t \geq 0$.

Теорема 6. Пусть векторное поле F является глобально липшицевым по x равномерно по t , т.е. выполнено условие

$$(24) \quad \|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

где $L > 0$ – константа Липшица. Также пусть существует функция $W(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ вида

$$(25) \quad W(x, t) = (x - c_t)^\top P_t (x - c_t),$$

где $c_t \in \mathbb{R}^n$ и $P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дополнительно $P_t > 0$) – гладкие функции времени, удовлетворяющие следующим условиям:

1) начальное покрытие удовлетворяет условию: $\Omega_0 \subset \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_0)^\top P_0(x - c_0) \leq 1\}$, т.е.

$$(26) \quad W(\xi, 0) \leq 1 \quad \forall \xi \in \Omega_0;$$

2) существует число $\gamma > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$ выполнено первое условие диссипативности (12);

3) центр эллипсоида c_t движется по траектории системы:

$$(27) \quad \dot{c}_t = F(c_t, t),$$

где c_0 – произвольная точка из Ω_0 ;

4) выполнено соотношение

$$(28) \quad \operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma \geq 2L.$$

Тогда для всех $t \geq 0$ выполнено условие покрытия:

$$(29) \quad \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_t)^\top P_t(x - c_t) \leq 1\}.$$

Если $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, то матрица формы $Q_t = P_t^{-1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(30) \quad \dot{Q}_t = A(c_t, t)Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)Q_t,$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$ – матрица Якоби, вычисленная в центре эллипсоида в момент времени t , уравнение (30) получено линеаризацией в окрестности центра и точно описывает эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$.

Следствие 6. Пусть выполнены условия теоремы 6 и, дополнительно, дивергенция векторного поля ограничена снизу: $\operatorname{div} F(x, t) \geq -d$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Если параметр диссипативности удовлетворяет условию $\gamma > d$, то для любой точки $\xi \in \Omega_0$ и соответствующей траектории $x(t) = \phi_t(\xi)$ справедлива экспоненциальная оценка $V_\xi(t) \leq V_\xi(0)e^{-(\gamma-d)t}$, где $V_\xi(t)$ задана в (П.3). Как следствие, для нормы матрицы формы $Q_t = P_t^{-1}$ выполняется $\|Q_t\| \leq \|Q_0\|e^{-(\gamma-d)t}$, что означает экспоненциальное сжатие покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t)$ к своему центру c_t .

Уравнение (30) является ключевым для практического построения покрывающего эллипсоида. Оно показывает, как матрица формы эволюционирует под действием линеаризованного потока и диссипативного члена $(\operatorname{div} F + \gamma)Q_t$. Параметр γ выбирается максимально возможным при выполнении условия (26).

7. Эволюция внутреннего эллипсоида

В предыдущем разделе было рассмотрено первое условие диссипативности (39), которое гарантирует существование покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}(c_t, P_t^{-1})$, содержащего эволюционирующую область Ω_t . Естественным об-

разом возникает вопрос: что можно сказать об эллипсоиде, если выполнено второе условие диссипативности? Как показано в замечании 1, второе условие контролирует обратную величину $1/W$ и предотвращает слишком быстрое сжатие, что приводит к существованию *внутреннего эллипсоида*, свободного от точек области Ω_t . Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 7. Пусть существует $W(x, t)$, определенная в (25), где $c_t \in \mathbb{R}^n$ и $P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P_t > 0$) – гладкие функции времени, удовлетворяющие следующим условиям:

1) начальное покрытие удовлетворяет условию $\Omega_0 \cap \mathcal{E}_{in}(c_0, \delta(0)P_0^{-1}) = \emptyset$, т.е.

$$(31) \quad W(\xi, 0) \geq \delta(0) \quad \forall \xi \in \Omega_0,$$

где $\mathcal{E}_{in}(c_0, \delta(0)P_0^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_0)^\top P_0(x - c_0) \leq \delta(0)\}$;

2) центр эллипсоида движется по траектории системы (27);

3) существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено второе условие диссипативности (12).

Тогда для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие внутренней оценки:

$$(32) \quad \Omega_t \cap \mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) = \emptyset,$$

где $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_t)^\top P_t(x - c_t) \leq \delta(t)\}$ и

$$(33) \quad \delta(t) = \min_{\xi \in \Omega_0} \left\{ W(\xi, 0) \exp \left(\int_0^t (\gamma + \operatorname{div} F(x(s), s)) ds \right) \right\}.$$

Если дополнительно $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, то матрица формы $Q_t = P_t^{-1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(34) \quad \dot{Q}_t = A(c_t, t)Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top - (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)Q_t,$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$ – матрица Якоби, вычисленная в центре эллипсоида в момент времени t , уравнения (34) получены линеаризацией в окрестности центра и точно описывают эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$.

Теорема 7 показывает, что второе условие диссипативности (12) гарантирует существование внутреннего эллипсоида $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1})$, который не содержит точек эволюционирующей области Ω_t . Это дает нижнюю оценку для расстояния от траекторий до центра и предотвращает слишком быстрое сжатие.

Замечание 5. Если одновременно выполнены оба условия диссипативности (12), то из их сложения, как показано в (16), следует $\operatorname{div} F < 0$. При этом значения γ в данных условиях диссипативности могут быть разными, в статье они записаны одинаковыми для простоты записи. В этом случае область Ω_t находится в «кольце» между двумя эллипсоидами: покрывающим и

внутренним $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$. Это дает полную геометрическую картину эволюции области.

Уравнения (30) и (34) описывают эволюцию матрицы формы покрывающего эллипсоида, но соответствуют разным типам диссипативности:

- Уравнение (30) получено из первого условия диссипативности (12) для функции $W(x, t)$. Слагаемое $(\operatorname{div} F + \gamma)Q_t$ ускоряет сжатие эллипсоида, что характерно для систем с диссипацией.
- Уравнение (34) соответствует второму условию (12) для функции $1/W(x, t)$. Слагаемое $(\operatorname{div} F - \gamma)Q_t$ уменьшает диссипацию и при $\gamma > \operatorname{div} F$ может приводить к расширению эллипсоида, контролируя тем самым обратную величину.

Пример 3. Проиллюстрируем теоремы 6 и 7 на примере нестационарной линейной системы второго порядка

$$(35) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{bmatrix} -1,5 + 0,5 \sin(0,8t) & 3 \cos(0,8t) \\ 2 \sin(0,8t) & -1,2 + 0,3 \cos(0,8t) \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

След матрицы $\operatorname{tr} A(t) = -2,7 + 0,5 \sin(0,8t) + 0,3 \cos(0,8t) < 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, однако система не является устойчивой по Ляпунову в силу несимметричности матрицы и наличия периодических коэффициентов, приводящих к комплексным собственным числам с положительной вещественной частью в отдельные моменты времени.

При моделировании начальная область Ω_0 выбрана так, чтобы одновременно удовлетворять предположениям теорем 6 и 7. В примере использовалась матрица $P_0 = E$, центр $c_0 = (5, 3)^\top$, параметр $\delta(0) = 0,25$. Начальная область Ω_0 состоит из $N = 600$ точек, равномерно распределенных в кольцевой области между двумя эллипсоидами: $\Omega_0 = \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1}) \setminus \mathcal{E}_{in}(c_0, 0,25 P_0^{-1})$. Такой выбор гарантирует выполнение условий $W(\xi, 0) \leq 1 \quad \forall \xi \in \Omega_0$ и $W(\xi, 0) \geq \delta(0) = 0,25 \quad \forall \xi \in \Omega_0$, что в точности отвечает (26) и (31). Таким образом эллипсоиды на рис. 2 не подбирались под уже полученное облако точек. Их эволюция полностью определяется дифференциальными уравнениями (30) и (34) с начальными параметрами, выбранными до расчета траекторий. Тот факт, что точки в начальный момент и далее остаются внутри покрывающего и вне внутреннего эллипсоида, является следствием выполнения условий теорем 6 и 7. Эволюция покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t)$ определяется уравнением (30), а эволюция внутреннего эллипсоида $\mathcal{E}_{in}(c_t, Q_t)$ – уравнением (34), где $\gamma = 2,5$ для покрывающего и $\gamma = 2$ для внутреннего эллипсоидов, центр c_t движется по траектории системы $\dot{c}_t = A(c_t, t)c_t$.

Численное интегрирование системы (35) и уравнений (30), (34) выполнено методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,005$ на интервале $t \in [0, 0,9]$. На каждом шаге производился контроль выполнения условий:

$$\begin{aligned} V_\xi^{cov}(t) &= (x(t) - c_t)^\top (Q_t^{cov})^{-1} (x(t) - c_t) < 1 \quad \forall x(t) \in \Omega_t, \\ V_\xi^{in}(t) &= (x(t) - c_t)^\top (Q_t^{in})^{-1} (x(t) - c_t) > 1 \quad \forall x(t) \in \Omega_t. \end{aligned}$$

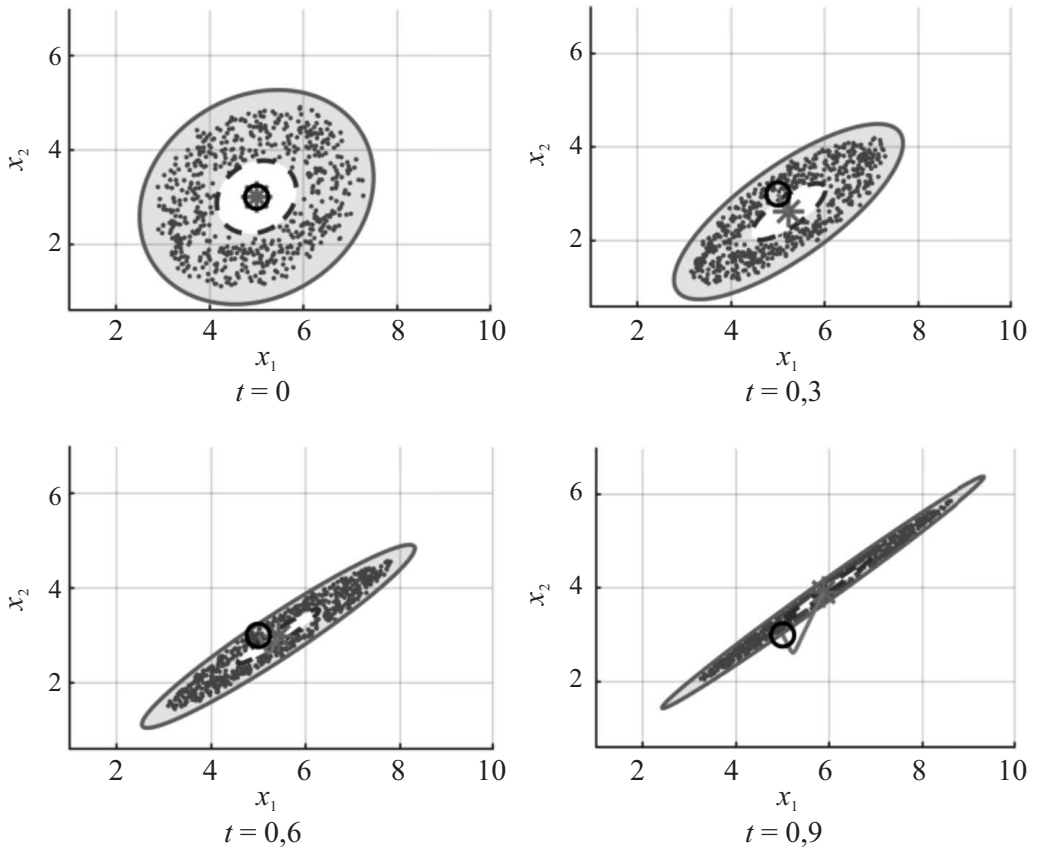


Рис. 2. Эволюция покрывающего (сплошной) и внутреннего (пунктирный) эллипсоидов для системы (35) в моменты времени $t = 0, 0,3, 0,6, 0,9$ с.

Приведем алгоритм построения аппроксимирующих эллипсоидов:

- задать начальную область Ω_0 , матрицу $P_0 > 0$, центр c_0 (например, центр масс Ω_0) и параметр $\delta(0) \in (0, 1)$ так, чтобы $W(\xi, 0) \leq 1$ и $W(\xi, 0) \geq \delta(0)$ для всех $\xi \in \Omega_0$;
- выбрать $\gamma_{cov} > 0$ и $\gamma_{in} > 0$ из условий диссипативности (12);
- найти траекторию центра $\dot{c}_t = F(c_t, t)$, $c_t|_{t=0} = c_0$;
- проинтегрировать матричные уравнения (30) и (34) с начальными условиями $Q_0^{cov} = P_0^{-1}$, $Q_0^{in} = \delta(0)P_0^{-1}$. Тогда при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняются гарантированные двусторонние оценки $\mathcal{E}(c_t, Q_t^{in}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}(c_t, Q_t^{cov})$, где $\mathcal{E}(c, Q) = \{x : (x - c)^\top Q^{-1}(x - c) \leq 1\}$.

На рис. 2 представлены четыре момента эволюции системы: $t = 0$, $t = 0,3$, $t = 0,6$ и $t = 0,9$ с. На каждом рисунке изображены: точки – множество Ω_t ; сплошной серый эллипсоид – покрывающий эллипсоид $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t^{cov})$; пунктирный эллипсоид – внутренний эллипсоид $\mathcal{E}_{in}(c_t, Q_t^{in})$; звезда – текущее положение центра c_t ; линия (исходящая из звезды) – траектория движения центра от начального до текущего момента; маленький черный кружок (исходящий из звезды) – начальное положение центра c_0 .

Результаты моделирования демонстрируют:

- 1) корректность эволюционных уравнений (30) и (34) для построения аппроксимирующих эллипсоидов;
- 2) возможность одновременного выполнения условий диссипативности для прямой и обратной весовых функций;
- 3) геометрическую интерпретацию интегральной устойчивости: область Ω_t заключена в кольцо между двумя эллипсоидами.

Теорема 7 и пример 3 показывают, что при выполнении второго условия диссипативности удастся построить эллипсоид $\mathcal{E}_{in}(t)$, гарантированно не содержащий точек эволюционирующей области Ω_t . Этот результат имеет ряд инженерных и научных приложений, например:

- в задачах гарантированного оценивания и фильтрации внутренний эллипсоид задает область, свободную от траекторий системы, что позволяет выделять безопасные зоны или отсекалть ложные решения;
- наличие двусторонних эллипсоидальных оценок $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$ дает полную геометрическую картину эволюции ансамбля: покрывающий эллипсоид ограничивает максимально возможное отклонение, а внутренний указывает минимальный гарантированный разброс траекторий;
- в задачах верификации и обнаружения столкновений внутренний эллипсоид может служить индикатором «непустого ядра», куда не проникают траектории, что упрощает проверку свойств безопасности динамической системы;
- предложенный метод применим к анализу диссипативных процессов в звездной динамике. В шаровых скоплениях динамическое трение вызывает эффективное сжатие фазового объема. Если в качестве весовой функции взять фазовую плотность, то область Ω_t , содержащая 90% массы скопления, с течением времени остается заключенной между двумя эволюционирующими эллипсоидами, что дает гарантированные двусторонние оценки положений и скоростей звезд без точного решения уравнения Фоккера-Планка.

Таким образом, совместное использование покрывающего и внутреннего эллипсоидов предоставляет конструктивный инструмент для анализа диссипативных систем, не требующий точного знания множества Ω_t , а лишь информацию о начальной области и знаке дивергенции поля.

Результаты разделов 6 и 7 могут быть интерпретированы в терминах теории инвариантных множеств [33, 34]. Построенный покрывающий эллипсоид является положительно инвариантным множеством для ансамбля траекторий, стартующих из Ω_0 , а внутренний эллипсоид задает запрещенную область, свободную от этих траекторий. Их комбинация дает двустороннюю инвариантную оценку, что представляет самостоятельный интерес в контексте методов гарантированного оценивания и эллипсоидального исчисления [35].

8. Связь интегральной устойчивости с устойчивостью по Ляпунову

Теорема 8. Рассмотрим автономную систему (1). Пусть $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – фазовый поток (1). Предположим, что существует семейство покрывающих эллипсоидов (29) с центром $c_t \in \mathbb{R}^n$ и матрицей формы $Q_t = P_t^{-1} > 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует $\delta > 0$ такое, что шар радиуса δ с центром в нуле содержится в начальном эллипсоиде:

$$(36) \quad B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\} \subset \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1});$$

2) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ образ начального шара под действием потока содержится в эллипсоиде:

$$(37) \quad \Omega_t = \varphi_t(B_\delta(0)) \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1});$$

3) центр эллипсоида стремится к положению равновесия:

$$(38) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_t = 0;$$

4) существует монотонно убывающая функция $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая что $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и для всех $t \geq 0$ выполняется оценка:

$$(39) \quad \max_{|v|=1} \sqrt{v^\top Q_t v} \leq \sigma(t),$$

где величина $\max_{|v|=1} \sqrt{v^\top Q_t v}$ равна длине наибольшей полуоси эллипсоида $\mathcal{E}_t$.

Тогда система (1) асимптотически устойчива по Ляпунову. Если дополнительно существуют константы $C > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$(40) \quad \sigma(t) \leq C e^{-\gamma t}, \quad |c_t| \leq C e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0,$$

то система (1) экспоненциально устойчива по Ляпунову. Если заменить условия $\sigma(t) \rightarrow 0$ и $c_t \rightarrow 0$ на их ограниченность, то (1) будет устойчивой по Ляпунову.

В условии теоремы 8 в качестве характеристики сжатия эллипсоида (39) можно использовать различные операторы, оценивающие его размер, например:

- спектральный радиус (длина наибольшей полуоси) $\rho(Q_t) = \lambda_{\max}^{1/2}(Q_t)$, $\lambda_{\max}(Q_t)$ – максимальное собственное число матрицы Q_t . Данная величина участвует в оценке $\|x - c_t\| \leq \rho(Q_t)$ и имеет прозрачный геометрический смысл;
- след матрицы формы $\text{tr } Q_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i(Q_t)$, $\lambda_i(Q_t)$ – i -е собственное значение матрицы Q_t . Поскольку $\lambda_{\max}(Q_t) \leq \text{tr } Q_t$, условие $\text{tr } Q_t \rightarrow 0$ является достаточным для сходимости эллипсоида к центру;
- среднеквадратичный радиус $r_{\text{rms}}(Q_t) = \sqrt{\frac{1}{n} \text{tr } Q_t}$, характеризующий «средний» размер эллипсоида;
- любая норма $\|Q_t\|$, согласованная с евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$ (т.е. удовлетворяющая $\|Q_t^{1/2} v\| \leq \|Q_t\|^{1/2} \|v\|$), также может быть использована.

Следствие 7. Если в условиях теоремы 8 задано условие $\text{tr } Q_t \rightarrow 0$ вместо (39), то это эквивалентно выполнению неравенства $2\lambda_{\max}(A) + \text{tr } A + \gamma < 0$, где $\lambda_{\max}(A)$ – максимальное собственное число матрицы линеаризации $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, t)$. Это дает алгебраический критерий экспоненциальной устойчивости, не требующий явного построения эллипсоидов.

Таким образом, теорема 8 устанавливает, что из существования семейства покрывающих эллипсоидов, стягивающихся к положению равновесия, следует устойчивость по Ляпунову. Это важный результат, связывающий предложенный интегральный подход с классической теорией. Важно подчеркнуть, что сама по себе интегральная устойчивость (определения 1–3) не эквивалентна устойчивости по Ляпунову. Таким образом, теорема 8 дает достаточные условия, при которых интегральные оценки позволяют сделать вывод о точечной сходимости решений. Следствие 7 дополнительно предлагает легкопроверяемый алгебраический критерий: отрицательность определенной комбинации следа и максимального собственного числа матрицы линеаризации гарантирует экспоненциальную устойчивость. Это делает метод конструктивным и удобным для приложений.

9. Заключение

Предложен новый подход к анализу динамических систем, основанный на исследовании эволюции взвешенного фазового объема. Получено интегральное тождество, которое связывает скорость изменения взвешенного объема с производной весовой функции вдоль траекторий и дивергенцией векторного поля. Данный результат обобщает классическую теорему Лиувилля и транспортную теорему Рейнольдса.

Сформулированы достаточные условия диссипативности и построены интегральные критерии устойчивости. Показано, что одновременное выполнение условий для весовой функции и ее обратной величины приводит к геометрическим ограничениям на динамику.

Разработан метод аппроксимации множеств достижимости с помощью покрывающего и внутреннего эллипсоидов, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями, полученными из условий диссипативности. Установлена связь между предложенным интегральным подходом и устойчивостью по Ляпунову.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Используя замену переменных с учетом начальных условий $x = \varphi_t(\xi)$, где $\xi \in \Omega_0$, получим

$$(П.1) \quad I(t) = \int_{\Omega_0} W(\varphi_t(\xi), t) \det J_t(\xi) d\xi, \quad I_{-1}(t) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \det J_t(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что область интегрирования Ω_0 не зависит от t , продифференцируем (П.1):

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} (W(\varphi_t(\xi), t)) \det J_t(\xi) + W(\varphi_t(\xi), t) \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) \right] d\xi, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \right) \det J_t(\xi) + \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4), вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\varphi_t(\xi), t) &= \frac{\partial W(\varphi_t(\xi), t)}{\partial t} + \nabla W(\varphi_t(\xi), t)^\top F(\varphi_t(\xi), t) \quad \text{и} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \right) &= -\frac{1}{W^2(\varphi_t(\xi), t)} \frac{d}{dt} W(\varphi_t(\xi), t) = -\frac{\dot{W}(\varphi_t(\xi))}{W^2(\varphi_t(\xi))}. \end{aligned}$$

Применяя (5) к слагаемому $\frac{d}{dt} \det J_t(\xi)$ в (П.2), перепишем (П.2) как

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega_0} \det J_t(\xi) \left[\dot{W}(\varphi_t(\xi), t) + W(\varphi_t(\xi), t) \operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t) \right] d\xi, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &= \int_{\Omega_0} \det J_t(\xi) \left[-\frac{\dot{W}(\varphi_t(\xi), t)}{W^2(\varphi_t(\xi), t)} + \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Так как $\det J_t(\xi) d\xi = dx$, то выполнив обратную замену переменных к x , приходим к (6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца к функциям $\sqrt{W}$ и $1/\sqrt{W}$ на Ω_t , получаем

$$\left(\int_{\Omega_t} W(x, t) dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \right) \geq \left(\int_{\Omega_t} \sqrt{W} \frac{1}{\sqrt{W}} dx \right)^2 \geq [\operatorname{vol}(\Omega_t)]^2.$$

Из условий диссипативности (8) и теоремы 2 следует, что $\dot{I}(t) \leq 0$ и $\dot{I}_{-1}(t) \leq 0$. Из условий теоремы 3 функции $I(t)$ и $I_{-1}(t)$ положительны. Тогда $\dot{\Pi}(t) := \dot{I}(t)I_{-1}(t) + I(t)\dot{I}_{-1}(t) \leq 0$. Следовательно, $\Pi(t)$ не возрастает. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из выражений (6) и (12) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx \leq -\gamma \int_{\Omega_t} W(x, t) dx, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \leq -\gamma \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx.$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, получим (13). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала докажем выполнение условия покрытия (29). Затем покажем выполнение (30).

Доказательство условия покрытия (29). Перейдем к переменным Лагранжа. Для этого рассмотрим произвольную точку $\xi \in \Omega_0$. Ее образ в момент времени t есть $x(t) = \varphi_t(\xi)$. Определим функцию

$$(П.3) \quad V_\xi(t) = W(x(t), t) = (x(t) - c_t)^\top P_t(x(t) - c_t).$$

Покажем, что $V_\xi(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, если $V_\xi(0) \leq 1$.

Дифференцируя (П.3) по времени вдоль решений (1) и (27), получим:

$$(П.4) \quad \frac{d}{dt} V_\xi(t) = (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)).$$

С учетом (П.3) перепишем первое условие диссипативности (12) в виде

$$(П.5) \quad (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)) \leq \\ \leq -\gamma V_\xi(t) - V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Принимая во внимание, что $V_\xi(t) > 0$ (случай $V_\xi(t) = 0$ означает $x(t) = c_t$, и тогда ограниченность очевидна, так как c_t либо ограничен, либо его рост контролируется отдельно), выразим из (П.5) слагаемое с дивергенцией:

$$(П.6) \quad \operatorname{div} F(x(t), t) \leq -\gamma - \\ - \frac{1}{V_\xi(t)} \left[(x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)) \right].$$

Обозначим:

$$(П.7) \quad \mathcal{A}(t) = (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)).$$

Принимая во внимание (24), оценим слагаемые в (П.7) и (П.3) в виде

$$(П.8) \quad |(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t)| \leq \|\dot{P}_t\| \|x - c_t\|^2, \\ |2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t))| \leq 2L \|P_t\| \|x - c_t\|^2. \\ \|x(t) - c_t\|^2 \leq \lambda_{\max}(P_t^{-1}) V_\xi(t).$$

С учетом (П.8) оценим сверху (П.7) как

$$(П.9) \quad |\mathcal{A}(t)| \leq \lambda_{\max}(P_t^{-1}) (\|\dot{P}_t\| + 2L \|P_t\|) V_\xi(t).$$

Введем обозначение:

$$(П.10) \quad \alpha(t) = \lambda_{\max}(P_t^{-1}) (\|\dot{P}_t\| + 2L \|P_t\|)$$

и перепишем (П.9) как $|\mathcal{A}(t)| \leq \alpha(t)V_\xi(t)$. Подставляя данную оценку в (П.6), получаем оценку сверху для дивергенции:

$$(П.11) \quad \operatorname{div} F(x(t), t) \leq -\gamma + \alpha(t).$$

Из первого условия диссипативности (12) и выражений (П.4), (П.5) имеем

$$(П.12) \quad \frac{dV_\xi}{dt} \leq -\gamma V_\xi(t) - V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Подставляя оценку (П.11) в (П.12), получаем $\frac{dV_\xi}{dt} \leq -\alpha(t)V_\xi(t)$. Так как $\alpha(t) \geq 0$ из (П.10), то $\frac{dV_\xi}{dt} \leq 0$. Таким образом, $V_\xi(t) \leq V_\xi(0) \leq 1$ для всех $t \geq 0$, и выполнено условие покрытия $\Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$.

Теперь определим соотношение между L , $\operatorname{div} F(c_t, t)$ и γ в виде (28). Для этого подставим (25) в первое условие диссипативности (12). В результате получим

$$(П.13) \quad \begin{aligned} & (x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x, t) - F(c_t, t)) + \\ & + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(x, t) + \gamma) \leq 0. \end{aligned}$$

Пусть $x = c_t + \varepsilon v$, где $\|v\| = 1$ и малое число $\varepsilon > 0$. Тогда перепишем (П.13) как:

$$(П.14) \quad \varepsilon^2 v^\top \dot{P}_t v + 2\varepsilon v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) + \varepsilon^2 v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq 0.$$

Перенесем первые два члена в правую часть и разделим все выражение на ε^2 :

$$(П.15) \quad v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq -v^\top \dot{P}_t v - \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)).$$

Из липшицевости F и $\|v\| = 1$ имеем

$$(П.16) \quad -\frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) \leq \left| \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) \right| \leq 2\|P_t\|L.$$

Подставляя (П.16) в (П.15), получим:

$$(П.17) \quad v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq -v^\top \dot{P}_t v + 2\|P_t\|L.$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, перепишем (П.17) как $v^\top \dot{P}_t v \leq 2\|P_t\|L - v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)$. Это неравенство выполнено для всех единичных векторов v . Выберем v , на котором $v^\top \dot{P}_t v$ минимален. Тогда:

$$-\|\dot{P}_t\| \leq \min_{\|v\|=1} v^\top \dot{P}_t v \leq 2\|P_t\|L - \max_{\|v\|=1} v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma).$$

Поскольку $\max_{\|v\|=1} v^\top P_t v = \|P_t\|$, получим:

$$(П.18) \quad \|\dot{P}_t\| \geq \|P_t\|(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma - 2L).$$

Таким образом, имеем соотношение (28). Более того, $\|\dot{P}_t\| + 2L\|P_t\| \geq \|P_t\|(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) \geq 2L\|P_t\|$.

Вывод эволюционных уравнений (30). В силу гладкости $F \in C^2$ разложим $F(x, t) - F(c_t, t)$ и $\operatorname{div} F(x, t)$ в окрестности c_t :

$$(П.19) \quad \begin{aligned} F(x, t) - F(c_t, t) &= A(c_t, t)(x - c_t) + r(x, c_t, t), \\ \operatorname{div} F(x, t) &= \operatorname{div} F(c_t, t) + \nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(x - c_t) + d(x, c_t, t), \end{aligned}$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$, $\|r(x, c_t, t)\| = O(\|x - c_t\|^2)$ и $|d(x, c_t, t)| = O(\|x - c_t\|)$.

Подставим (П.19) в (П.13):

$$(П.20) \quad \begin{aligned} &(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t A(c_t, t)(x - c_t) + \\ &+ 2(x - c_t)^\top P_t r(x, c_t, t) + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) + \\ &+ (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(x - c_t) + d(x, c_t, t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное направление $v \in \mathbb{R}^n$, где $\|v\| = 1$, и положим $x = c_t + \varepsilon v$, где $\varepsilon > 0$ мало. Подставим это в (П.20) и разделим на ε^2 :

$$\begin{aligned} &v^\top \dot{P}_t v + 2v^\top P_t A(c_t, t)v + v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) + \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t r(c_t + \varepsilon v, c_t, t) + \\ &+ v^\top P_t v \left(\nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(\varepsilon v) + d(c_t + \varepsilon v, c_t, t) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая, что $r(c_t + \varepsilon v, c_t, t) = O(\varepsilon^2)$ и $d(c_t + \varepsilon v, c_t, t) = O(\varepsilon)$, получим:

$$(П.21) \quad v^\top [\dot{P}_t + 2P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t]v \leq 0 \quad \forall v.$$

Используя симметризацию $2v^\top P_t A(c_t, t)v = v^\top (P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t)v$, перепишем (П.21) как:

$$(П.22) \quad v^\top [\dot{P}_t + P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t]v \leq 0 \quad \forall v.$$

Неравенство (П.22) означает, что матрица

$$M_t^{cov} := \dot{P}_t + P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t$$

отрицательно полуопределена ($M_t^{cov} \leq 0$). Для построения покрывающего эллипсоида выберем «критический» случай $M_t^{cov} = 0$, что соответствует максимально быстрому сжатию и не противоречит (П.13). Тогда получаем уравнение для P_t :

$$(П.23) \quad \dot{P}_t + A(c_t, t)^\top P_t + P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t = 0.$$

Для получения уравнения для $Q_t = P_t^{-1}$ умножим (П.23) слева и справа на Q_t :

$$(П.24) \quad Q_t \dot{P}_t Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top + A(c_t, t) Q_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) Q_t = 0.$$

Используя тождество $\dot{Q}_t = -Q_t \dot{P}_t Q_t$, которое следует из дифференцирования $P_t Q_t = I$, перепишем (П.24) в форме (30). Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала докажем выполнение условия для внутреннего эллипсоида (32). Затем покажем выполнение равенства (34).

Доказательство условия для внутреннего эллипсоида (32). Рассмотрим произвольную точку $\xi \in \Omega_0$. Ее образ в момент времени t есть $x(t) = \phi_t(\xi)$. Определим функцию $V_\xi(t)$ как в (П.3). Применяя второе условие диссипативности (12) в точке $x(t)$ и учитывая (П.4), приходим к нижней оценке:

$$(П.25) \quad \frac{d}{dt} V_\xi(t) \geq \gamma V_\xi(t) + V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Найдем решение (П.25) в виде

$$(П.26) \quad V_\xi(t) \geq V_\xi(0) \exp \left(\int_0^t [\gamma + \operatorname{div} F(x(s), s)] ds \right).$$

Из (П.26) следует, что для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеем $V_\xi(t) \geq \delta(t) > 0$, где $\delta(t)$ определяется как минимум правой части (П.26) по всем $\xi \in \Omega_0$. Это гарантирует выполнение условия (32), т.е. ни одна точка области Ω_t не принадлежит внутреннему эллипсоиду.

Вывод эволюционного уравнения (34) для Q_t . Вывод уравнения (34) аналогичен выводу уравнения (30) с той разницей, что используется второе условие диссипативности (12). Проведем основные выкладки, следуя процедуре вывода уравнения (П.19). Из второго условия (12) и выражений для производных (П.4) после подстановки и использования $\dot{c}_t = F(c_t, t)$ получим:

$$(П.27) \quad \begin{aligned} & -(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) - 2(x - c_t)^\top P_t(F(x, t) - F(c_t, t)) + \\ & + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(x, t) + \gamma) \leq 0. \end{aligned}$$

Используя симметризацию для $2P_t A(c_t, t)$, разложения (П.19) и переходя к пределу $x \rightarrow c_t$ (т.е. полагая $x = c_t + \varepsilon v$ и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$), запишем:

$$v^\top \left[-\dot{P}_t - P_t A(c_t, t) - A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) P_t \right] v \leq 0 \quad \forall v.$$

Выбирая критический случай (равенство нулю) с учетом условия (31), получаем уравнение для P_t :

$$(П.28) \quad -\dot{P}_t - A(c_t, t)^\top P_t - P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) P_t = 0.$$

Умножая (П.28) слева и справа на $Q_t = P_t^{-1}$ и используя $\dot{Q}_t = -Q_t \dot{P}_t Q_t$, получаем (34). То есть уравнение (34) получено линеаризацией в окрестности центра и точно описывает эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Зафиксируем произвольную начальную точку $\xi \in B_\delta(0)$ и рассмотрим соответствующую траекторию $x(t) = \varphi_t(\xi) \in \varphi_t(B_\delta(0))$. В силу условия инвариантности покрытия (37) имеем $x(t) \in \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$ для всех $t \geq 0$, что по определению эллипсоида означает (П.29)

$$(x(t) - c_t)^\top Q_t^{-1} (x(t) - c_t) \leq 1.$$

Используем неравенство для квадратичных форм

$$(П.30) \quad \|x - c_t\|^2 \leq \lambda_{\max}(Q_t) (x - c_t)^\top Q_t^{-1} (x - c_t),$$

где $\lambda_{\max}(Q_t)$ – максимальное собственное число матрицы Q_t . Применяя (П.30) вместе с (П.29), получаем оценку $\|x(t) - c_t\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(Q_t)} \leq \sigma(t)$. Воспользовавшись данной оценкой и неравенством треугольника, получим $\|x(t)\| \leq \|x(t) - c_t\| + \|c_t\| \leq \sigma(t) + \|c_t\|$. Из условий сходимости центра (38) и сходимости эллипсоида (39) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|c_t\| = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Тогда существует $T_1 > 0$ такое, что $\|c_t\| < \varepsilon/2$ для всех $t \geq T_1$ и существует $T_2 > 0$ такое, что $\sigma(t) < \varepsilon/2$ для всех $t \geq T_2$. Выбирая $T = \max\{T_1, T_2\}$, получаем, что для всех $t \geq T$ одновременно выполняются оба неравенства, откуда $\sigma(t) + \|c_t\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Значит, требуемый момент времени T всегда существует.

На конечном промежутке времени $[0, T]$ функция $f(t) = \sigma(t) + \|c_t\|$ непрерывна, следовательно, ограничена некоторой константой M_T . Выберем начальный радиус δ настолько малым, чтобы для всех траекторий, стартующих из $B_\delta(0)$, выполнялось неравенство

$$(П.31) \quad \|x(t)\| \leq \sigma(t) + \|c_t\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Возможность такого выбора δ обеспечивается непрерывной зависимостью решений от начальных условий и тем фактом, что функции $\sigma(t)$ и $\|c_t\|$ определяются самой системой (1) и не зависят от выбора конкретной точки в $B_\delta(0)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\|x(0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Это в точности определение устойчивости по Ляпунову.

Из оценки (П.31) и условий $\sigma(t) \rightarrow 0$ и $\|c_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ непосредственно вытекает, что для любой траектории $x(t)$ с начальным условием в $B_\delta(0)$ выполняется $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. Если дополнительно выполнены экспоненциальные оценки $\sigma(t) \leq C e^{-\gamma t}$, $\|c_t\| \leq C e^{-\gamma t}$, то из (П.31) получаем $\|x(t)\| \leq C e^{-\gamma t} + C e^{-\gamma t} = 2C e^{-\gamma t}$. Поскольку для линейных систем и в локальной окрестности нелинейных систем норма решения допускает оценку $\|x(t)\| \leq K e^{-\gamma t} \|x(0)\|$, а в рассматриваемом случае $\|x(0)\| \leq \delta$, окончательно имеем $\|x(t)\| \leq \frac{2C}{\delta} \|x(0)\| e^{-\gamma t}$, что означает экспоненциальную устойчивость. Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: 1955.
3. *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Малкин И.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
5. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М.: Высш. шк., 1984.
6. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
7. *Bikdash M.U., Layton R.A.* An Energy-Based Lyapunov Function for Physical Systems // IFAC Proceedings. 2000. V. 33. No. 2. P. 81–86.
8. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems, part I: General theory; part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. No. 5. P. 321–393.
9. *Liouville J.* Note sur la theorie de la variation des constantes arbitraires // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1838. V. 3. P. 342–349.
10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
11. *Reynolds O.* Papers on Mechanical and Physical Subjects. Cambridge University Press, 1903.
12. *Zaremba S.K.* Divergence of vector fields and differential equations // Amer. Journal of Math. 1954. V. LXXV. P. 220–234.
13. *Fronteau J.* Le theoreme de Liouville et le probleme general de la stabilite. Geneve: CERN, 1965.
14. *Brauchli H.I.* Index, Divergenz und Stabilitat in Autonomen equations. Zurich: Abhandlung Verlag, 1968.
15. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 650–661.
16. *Масина О.Н., Дружинина О.В.* Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
17. *Дружинина О.В.* Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: Изд. группа URSS, 2013.
18. *Жуков В.П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1978. № 6. С. 11–15.
19. *Жуков В.П.* К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1979. № 3. С. 12–17.
20. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // АиТ. 1990. № 12. С. 59–65.
21. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.
22. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.
23. *Rantzer A., Parrilo P.A.* On convexity in stabilization of nonlinear systems // Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. 2000. P. 2942–2946.

24. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // *Systems & Control Letters*. 2001. V. 42. P. 161–168.
25. *Monzon P.* On necessary conditions for almost global stability // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2003. V. 48. No. 4. P. 631–634.
26. *Фуртат И.Б.* Исследование устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2013. № 1. Т. 83. С. 23–27.
27. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // *АиТ*. 2020. № 2. С. 62–75.
28. *Furtat I., Gushchin P.* Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // *Journal of the Franklin Institute*. December 2020. V. 357. No. 18. P. 13753–13765.
29. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability/Instability Study and Control of Autonomous Dynamical Systems: Divergence Method // *IEEE Access*. 2021. V. 9. P. 23764–23771.
30. *Furtat, I.B. Gushchin P.A.* Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // *IEEE Access*. 2022. V. 10. P. 49088–49094.
31. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // *АиТ*. 2023. № 11. С. 55–76.
32. *Furtat I.B.* Analysis and Control of Perturbed Density Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2026. <https://doi.org/10.1109/TAC.2025.3621943>
33. *Blanchini F.* Set invariance in control // *Automatica*. 1999. V. 35. P. 1747–1767.
34. *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.
35. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
36. *Moyalán J., Narayanan S. S., Zheng A., Vaidya U.* Synthesizing controller for safe navigation using control density function // *Proc. 2024 American Control Conference (ACC)*. Toronto, Canada, 2024.
37. *Zheng A., Narayanan S.S., Vaidya U.* Safe navigation using density functions // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2023. V. 8. No. 10. P. 8502–8509.
38. *Hoshino K.* A characterization of finite-time stability with density functions // *Proc. 2019 European Control Conference (ECC)*. Naples, Italy, 2019. P. 2608–2613.
39. *Izumi M., Takahiro K.* Lyapunov density criteria for time-varying and periodically time-varying nonlinear systems with converse results // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 1. P. 223–241.
40. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
41. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1964.
42. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 14.04.2026

После доработки 07.07.2026

Принята к публикации 20.07.2026

Стохастические системы

© 2026 г. Н.П. МЕЛОШНИКОВА (n.meloshnikova@gmail.com),
Е.А. ФЁДОРОВА, канд. физ.-мат. наук (ekat_fedorova@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ, ММРР-ПОТОКОМ И КАТАСТРОФАМИ

Проводится исследование многолинейной системы массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-системы) с входящим марковским модулированным пуассоновским потоком (ММРР). Для анализа негативных воздействий внешних факторов в модели рассматривается поток отрицательных заявок, при наступлении событий которого в системе случаются катастрофы, т.е. уничтожение всех находящихся на обслуживании и на орбите заявок. В качестве метода исследования рассмотренной модели предлагается метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего ММРР-потока заявок. Доказана теорема о виде асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите. Представлены результаты численного анализа точности асимптотических результатов.

Ключевые слова: математическое моделирование, RQ-система, катастрофы, асимптотический анализ, высокая интенсивность потока.

DOI: 10.7868/S2413977726110048

1. Введение

RQ-системы (Retrial Queueing Systems), или системы массового обслуживания с повторными вызовами, представляют собой класс моделей теории массового обслуживания. Отличительной особенностью таких систем является отсутствие классической очереди: заявки, не получившие обслуживание, не покидают систему, а направляются на орбиту, где совершают случайную задержку перед повторной попыткой обращения к прибору обслуживания. Подобные модели широко применяются для анализа и оптимизации инфокоммуникационных систем, в которых требования при невозможности немедленного обслуживания осуществляют повторные обращения через случайные промежутки времени. Такие ситуации характерны для сетей связи с протоколами множественного случайного доступа, call-центров, а также облачных технологий, где при высокой нагрузке часть пользователей вынуждена ожидать и повторять запросы [1, 2].

В современных информационных системах существенное значение приобретает исследование негативных воздействий, связанных с ошибками пе-

редачи данных, аппаратными и программными сбоями, вредоносной активностью и хакерскими атаками. Для описания подобных явлений в рамках теории массового обслуживания (ТМО) используется понятие G-систем (или G-сетей) – это модели массового обслуживания с потоком отрицательных заявок, введенные Е. Gelenbe [3–6]. Дальнейшее развитие направления отражено в обзорных работах [7, 8], подтверждающих высокую значимость моделей с отрицательными заявками и их востребованность в современных сетевых и вычислительных приложениях.

Отрицательные заявки описывают воздействия на систему, приводящие к уничтожению обслуживаемых требований как на отдельном приборе, так и во всем блоке обслуживания, либо к катастрофам. Под катастрофами понимаются случайные негативные события, полностью «обнуляющие» систему: блок обслуживания и орбита становятся свободными, а все находящиеся в системе заявки покидают ее, не получив обслуживания. В реальных условиях такие ситуации могут быть вызваны аварийными отказами оборудования, массовыми сбоями программных сервисов или атаками на инфраструктуру. Катастрофы являются наиболее критическим типом негативного воздействия, поскольку радикально изменяют динамику системы и существенно влияют на ее вероятностные характеристики и показатели производительности.

Исследования RQ-систем, учитывающих отрицательные заявки и катастрофы, представлены в ряде работ [9–11]. В [9] исследуются системы повторных вызовов с несколькими потоками отрицательных заявок и различными дисциплинами обслуживания. Многолинейные модели с различными типами негативных воздействий рассмотрены в Y. Shin [10]. Однако стоит отметить, что большинство работ в этой области посвящено исследованию моделей с простейшим потоком, тогда как реальные потоки в телекоммуникационных сетях имеют более сложную структуру. Наиболее подходящими моделями информационных потоков являются классы нестационарных коррелированных потоков MAP (Markovian Arrival Process) и BMAP (Batch Markovian Arrival Process) [12]. Рассматриваемый в настоящей работе MMPP-поток (Markov Modulated Poisson Process) является частным случаем MAP-потока, отличающегося нулевой вероятностью наступления событий потока в моменты перехода управляющей цепи Маркова в другие состояния. Отметим, что аналитические исследования для RQ моделей с MMPP-входящим потоком и отрицательными заявками практически не известны [13].

Ранее в [14] был выполнен асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с катастрофами с простейшим входящим потоком. Настоящая статья является развитием данного направления и посвящена исследованию RQ-системы с катастрофами и MMPP-входящим потоком. Для анализа модели применяется асимптотический метод в условиях высокой интенсивности входящего потока, что позволяет получить аппроксимации вероятностных характеристик системы и исследовать влияние катастроф в предельном режиме.

2. Описание модели

В работе рассматривается многолинейная RQ-система, представленная на рис. 1. На вход системы поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок (ММРР-поток), определяемый диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_n и матрицей Q инфинитезимальных характеристик q_{nn} управляющей цепи Маркова $n(t)$, где $n = 1, \dots, N$. Будем называть заявки этого потока положительными. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$ задается вектором $\mathbf{r}$, определяемым системой:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}Q &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} &= 1, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор размера $N \times 1$, $\mathbf{0}$ – вектор с нулевыми элементами размером $1 \times N$.

Положительные заявки поступают в блок обслуживания, состоящий из K приборов (серверов). Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если все приборы оказываются заняты, то входящая заявка идет на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . После случайной задержки заявка с орбиты вновь обращается к блоку обслуживания, если имеется хотя бы один свободный прибор, она занимает его для обслуживания, иначе мгновенно возвращается на орбиту. С орбиты реализуется протокол множественного случайного доступа, т.е. любая заявка может обратиться к обслуживающим приборам после реализации задержки (нет очереди).

Также в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с параметром γ . Отрицательная заявка не нуждается в обслуживании, она оказывает негативное воздействие на систему. В данной работе рассмотрена модель с катастрофами, а именно при поступлении в систему отрицательная заявка «обнуляет» всю систему, т.е. уничтожает все заявки, находящиеся на приборах и на орбите. При наступлении катастроф заявки навсегда покидают систему необслуженными.

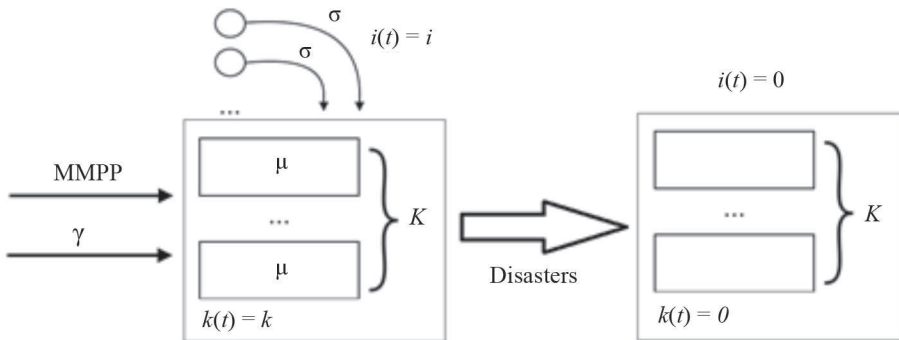


Рис. 1. RQ-система ММРР/М/К с катастрофами.

Состояние системы в момент времени t определяется трехмерной цепью Маркова $\xi(t) = \{k(t), n(t), i(t)\}$, $t \geq 0$, где $i(t)$ – число заявок на орбите, $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая ММРР-потокком, $k(t)$ – состояние блока обслуживания:

$$k(t) = \begin{cases} 0 & (\text{все приборы свободны}), \\ 1 & (\text{один прибор занят}), \\ \dots \\ k & (k \text{ приборов занято}), \\ \dots \\ K & (\text{все приборы заняты}). \end{cases}$$

Обозначим: $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t блок обслуживания находится в состоянии k , цепь Маркова, управляющая ММРР-потокком – в состоянии n и на орбите имеется i заявок.

Для распределения вероятностей $P(k, n, i, t)$ была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова. В стационарном режиме система уравнений баланса имеет следующий вид:

для $i = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_n + \gamma - q_{nn})P(0, n, 0) + \mu P(1, n, 0) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(0, v, 0) + \gamma = 0, \\ -(\lambda_n + k\mu + \gamma - q_{nn})P(k, n, 0) + \lambda_n P(k-1, n, 0) + \sigma P(k-1, n, 1) + \\ + (k+1)\mu P(k+1, n, 0) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(k, v, 0) = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ -(\lambda_n + K\mu + \gamma - q_{nn})P(K, n, 0) + \lambda_n P(K-1, n, 0) + \\ + \sigma P(K-1, n, 1) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(K, v, 0) = 0, \end{array} \right.$$

для $i > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_n + i\sigma + \gamma - q_{nn})P(0, n, i) + \mu P(1, n, i) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(0, v, i) = 0, \\ -(\lambda_n + i\sigma + k\mu + \gamma - q_{nn})P(k, n, i) + \lambda_n P(k-1, n, i) + \\ + \sigma(i+1)P(k-1, n, i+1) + (k+1)\mu P(k+1, n, i) + \\ + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(k, v, i) = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ -(\lambda_n + K\mu + \gamma - q_{nn})P(K, n, i) + \lambda_n P(K-1, n, i) + \lambda_n P(K, n, i-1) + \\ + (i+1)\sigma P(K-1, n, i+1) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(K, v, i) = 0, \end{array} \right.$$

где $n = 1, \dots, N$.

Стоит отметить, что стационарный режим в рассматриваемой системе существует при любых значениях параметров, что обусловлено наличием потерь заявок в результате наступления катастроф.

Для дальнейшего исследования запишем систему в матричном виде, обозначив $\mathbf{P}(k, i) = \{P(k, 1, i), \dots, P(k, n, i), \dots, P(k, N, i)\}$. Получим

для $i = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(0, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1, 0) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(k, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(k-1, 0)\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{P}(k-1, 1) + \\ + (k+1)\mu\mathbf{P}(k+1, 0) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{P}(K, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(K-1, 0)\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{P}(K-1, 1) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

для $i > 0$:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (i\sigma + \gamma)\mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1, i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(k, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (i\sigma + k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(k-1, i)\mathbf{\Lambda} + \\ + \sigma(i+1)\mathbf{P}(k-1, i+1) + (k+1)\mu\mathbf{P}(k+1, i) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{P}(K, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(K-1, i)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}(K, i-1)\mathbf{\Lambda} + \\ + (i+1)\sigma\mathbf{P}(K-1, i+1) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Введем частичные характеристические функции:

$$\mathbf{H}_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju_i} \mathbf{P}(k, i),$$

где j – мнимая единица.

Из системы уравнений (2)–(3) получим:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_0(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + \mu\mathbf{H}_1(u) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_k(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{H}'_k(u) + \mathbf{H}_{k-1}(u)\mathbf{\Lambda} - \\ - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{k-1}(u) + (k+1)\mu\mathbf{H}_{k+1}(u) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{H}_K(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}(1 - e^{ju}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{H}_{K-1}(u)\mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{K-1}(u) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы (4) и умножив на вектор $\mathbf{e}$, получим так называемое согласованное уравнение:

$$(5) \quad j\sigma(1 - e^{-ju}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{H}'_k(u)\mathbf{e} - \mathbf{H}_K(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(1 - e^{ju}) + \gamma - \gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k(u)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Решение $\mathbf{H}(u) = \{\mathbf{H}_0(u), \dots, \mathbf{H}_k(u), \dots, \mathbf{H}_K(u)\}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \mathbf{H}_k(0) &= \mathbf{r}, \\ \sum_{k=0}^K \mathbf{H}_k(0)\mathbf{e} &= 1. \end{aligned}$$

Получить решение системы уравнений (4)–(5) в явном аналитическом виде довольно затруднительно, поэтому далее предлагается использовать асимптотический подход к исследованию [14]. Существует несколько направлений асимптотического анализа, применяемых для построения аппроксимации искомого распределения, которые можно классифицировать по предельным условиям:

- условие большой загрузки системы ($\rho \rightarrow S_{\max}$) [15];
- условие большой задержки заявок на орбите в RQ-системах ($\sigma \rightarrow 0$) [16];
- условие высокой интенсивности входящего потока ($\lambda \rightarrow \infty$) [14].

Учитывая особенность функционирования рассматриваемой системы с катастрофами, можно сделать вывод, что предельные условия большой задержки и большой загрузки здесь неосуществимы. Из-за потерь заявок стационарный режим в такой модели существует при любых значениях параметров. Таким образом, систему удастся исследовать лишь в условии высокой интенсивности входящего потока положительных заявок. Данное предельное условие обычно использовалось для анализа бесконечнолинейных систем массового обслуживания [17, 18] и впервые было применено для исследования RQ-систем с отрицательными заявками в [14].

3. Асимптотический анализ

Для описания условия высокой интенсивности в ММРР-потоке введем параметр S , являющийся бесконечно большой величиной ($S \rightarrow \infty$). Представим матрицы условных интенсивностей и инфинитезимальных характеристик следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= S\tilde{\mathbf{L}}, \\ \mathbf{Q} &= S\tilde{\mathbf{Q}}.\end{aligned}$$

Такой вид матриц обусловлен определением высокоинтенсивного МАР-потока (и ММРР-потока как его частного случая), представленным в монографии [18]. Совместное масштабирование матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}$ обеспечивает сопоставимость интервалов времени между моментами поступления заявок и временами пребывания ММРР-потока в своих состояниях, т.е. высокую динамику входящего потока в целом.

Тогда из уравнений (4) и (5) получим систему:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_0(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}}) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + \mu\mathbf{H}_1(u) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_k(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{H}'_k(u) + \mathbf{H}_{k-1}(u)S\tilde{\mathbf{L}} - \\ \quad - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_k(u) + (k+1)\mu\mathbf{H}_{k+1}(u) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{H}_K(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}}(1 - e^{-ju}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{H}_{K-1}(u)S\tilde{\mathbf{L}} - \\ \quad - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{K-1}(u) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$(7) \quad j\sigma(1 - e^{-ju}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{H}'_k(u)\mathbf{e} - \mathbf{H}_K(u)S\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{e}(1 - e^{-ju}) + \gamma - \gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k(u)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

В результате исследования данной системы методом асимптотического анализа было сформулировано следующее.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция $h(u)$, аппроксимирующая характеристическую функцию стационарного распределения вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите RQ-системы ММРР/М/К с катастрофами в условии высокой интенсивности входящего потока, имеет вид характеристической функции экспоненциального распределения:

$$h(u) = \frac{\gamma}{\gamma - ju\lambda},$$

где $\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$.

Доказательство.

Введем асимптотические замены:

$$(8) \quad \begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon}, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_K(u) = \mathbf{F}_K(w, \varepsilon), \\ \mathbf{H}_k(u) &= \varepsilon \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

где ε – бесконечно малая величина.

Подставим замены (8) в уравнения (6)–(7). После некоторых математических преобразований получим:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w, \varepsilon) + \mu\varepsilon\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{F}_k(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon(k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{k-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{k-1}(w, \varepsilon) + (k+1)\mu\varepsilon\mathbf{F}_{k+1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-2}, \\ &\mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon((K-1)\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{K-2}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{K-2}(w, \varepsilon) + K\mu\mathbf{F}_K(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = K-1, \\ &\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}(1 - e^{jw\varepsilon}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}\right) + \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \begin{aligned} &j\sigma(1 - e^{-jw\varepsilon}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}'_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}(1 - e^{jw\varepsilon}) + \gamma - \\ &\quad - \gamma\varepsilon \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \gamma\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд Тейлора в уравнениях (9) и (10), получим:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w, \varepsilon) + \mu\varepsilon\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon(k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{k-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ \quad - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{k-1}(w, \varepsilon) + (k+1)\mu\varepsilon\mathbf{F}_{k+1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-2}, \\ \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon((K-1)\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{K-2}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ \quad - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{K-2}(w, \varepsilon) + K\mu\mathbf{F}_K(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = K-1, \\ \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\left(-j\varepsilon w - \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}\right) + \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ \quad - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & j\sigma\left(j\varepsilon w - \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}'_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}\left(-jw - \varepsilon\frac{(jw)^2}{2}\right) + \gamma - \\ & - \varepsilon\gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \gamma\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Совершая некоторые преобразования, выполним в уравнениях (11)–(12) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\mathbf{F}_k(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$. Получим

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_k(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w) + \mathbf{F}_{k-1}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - j\sigma\mathbf{F}'_{k-1}(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_{K-1}(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w) + \mathbf{F}_{K-2}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ \quad - j\sigma\mathbf{F}'_{K-2}(w) + \mu(k+1)\mathbf{F}_K(w) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{F}_K(w)\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_K(w)(jw\tilde{\mathbf{\Lambda}} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{F}_{K-1}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

и

$$(14) \quad \mathbf{F}_K(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}jw + \gamma - \gamma\mathbf{F}_K(w)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Из предпоследнего уравнения (13), учитывая условия (1), нетрудно сделать вывод, что решение имеет вид

$$(15) \quad \mathbf{F}_K(w) = \mathbf{r}\Phi(w),$$

где $\mathbf{r}$ – стационарное распределение состояний ММРР-потока, а $\Phi(w)$ – некоторая скалярная функция.

Из уравнения (14) нетрудно получить, что

$$\mathbf{F}_K(w)(\gamma - jw\tilde{\mathbf{\Lambda}})\mathbf{e} = \gamma.$$

Подставляя выражение (15) и учитывая равенства (1), получим вид функции $\Phi(w)$:

$$\Phi(w) = \frac{\gamma}{\gamma - jw \cdot \mathbf{r}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}}.$$

Таким образом, асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на орбите в условии высокой интенсивности входящего потока имеет вид

$$(16) \quad h(u) = F_K \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon) \approx \mathbf{F}_K \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) \mathbf{e} = \frac{\gamma}{\gamma - ju\lambda},$$

что эквивалентно характеристической функции экспоненциального распределения с параметром γ/λ , где $\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ – средняя интенсивность входящего потока.

Заметим, что полученная формула аналогична результату, приведенному ранее для модели М/М/К [14], что говорит об асимптотической эквивалентности (в условии высокой интенсивности) распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах с катастрофами с входящим ММРР-потокм и простейшим потоком заявок. А отсутствие параметра σ в асимптотической формуле обусловлено наличием катастроф, которые приводят к мгновенному обнулению орбиты и тем самым нивелируют влияние параметра интенсивности повторных обращений.

4. Численный анализ

Для анализа области применимости предложенных асимптотических методов проведем численное сравнение полученного асимптотического распределения $PA(i)$, построенного путем дискретизации распределения (16), и распределения $P(i)$, найденного с помощью численного алгоритма. Для реализации численного анализа был написан алгоритм, включающий в себя блок решений уравнений с элементами программирования, в программной среде Mathcad Prime.

Для оценки степени близости этих распределений будем использовать метрики, позволяющие количественно измерять различия между теоретическими и экспериментальными результатами, например расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max \left| \sum_{n=0}^i PA(n) - \sum_{n=0}^i P(n) \right|$$

и относительные погрешности моментов первого и второго порядка.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть параметры системы принимают следующие значения:

$$\mu = 1, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 30, \quad K = 3, \quad \mathbf{\Lambda} = S\tilde{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{Q} = S\tilde{\mathbf{Q}}, \quad S = 60,$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & -0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & -0,6 \end{pmatrix}.$$

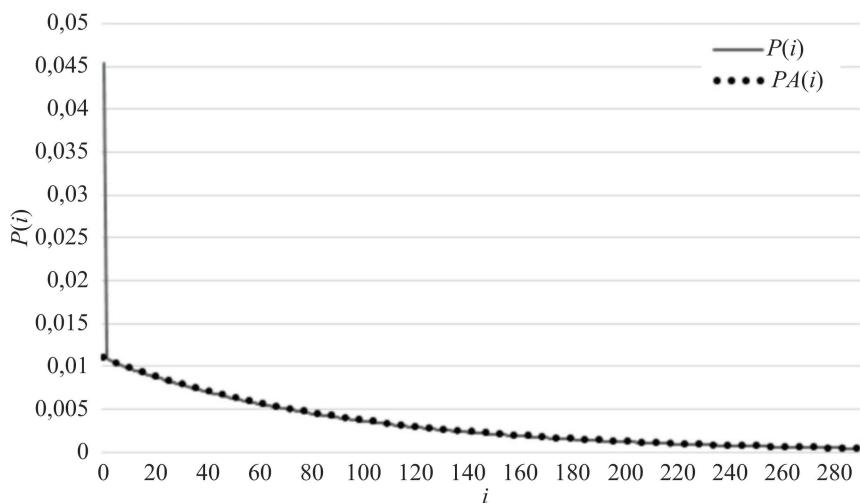


Рис. 2. Сравнение асимптотического $PA(i)$ и точного $P(i)$ распределений вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы MMPP/M/K.

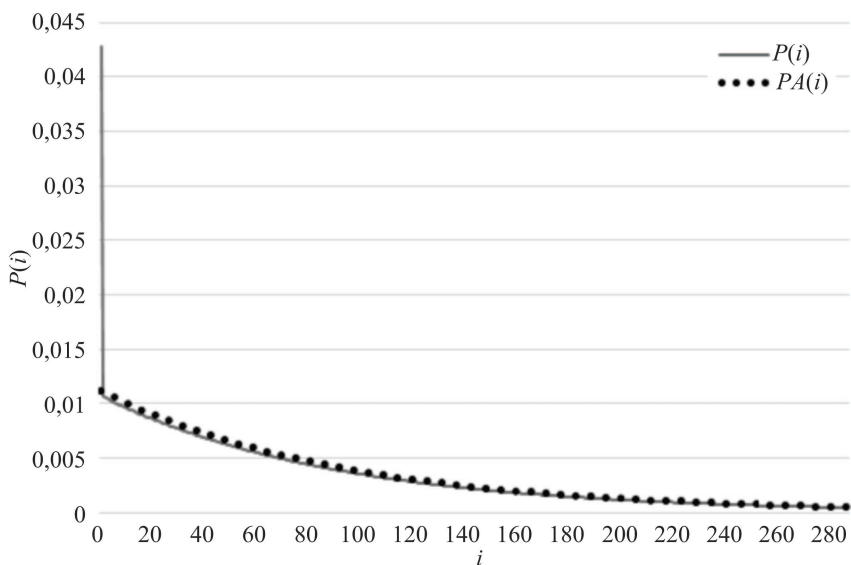


Рис. 3. Сравнение асимптотического $PA(i)$ и численного $P(i)$ распределений вероятностей для RQ-системы M/M/K.

На рис. 2 представлено сравнение асимптотического и численного распределений вероятностей числа заявок на орбите для рассмотренных параметров.

Расстояние Колмогорова между распределениями в данном случае: $\Delta = 0,034$.

Так как в работе была показана асимптотическая эквивалентность систем с MMPP и простейшим потоками, то в следующем численном приме-

ре продемонстрируем сравнение асимптотического и точного распределений для системы М/М/К, при этом значения параметров выберем аналогичными предыдущему примеру. На рис. 2 представлены результаты сравнения.

Расстояние Колмогорова между распределениями в рассмотренном случае составило $\Delta = 0,033$.

Сравнивая распределения, представленные на рис. 2 и 3, можно сделать вывод, что распределения вероятностей числа заявок в RQ-системах с ММРР и простейшим входящими потоками действительно достаточно близки. Основное различие наблюдается в точке $i = 0$, для которой разность вероятностей для различных численных примеров не превысила 0,005. Отметим, что близость распределений увеличивается с ростом интенсивности λ .

В следующих таблицах приведем результаты оценки точности предложенной аппроксимации для различных значений средней интенсивности входящего потока.

Таблица 1. Расстояние Колмогорова между асимптотическим и численным распределением для разных значений λ

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,206	0,048	0,024	0,011

Таблица 2. Относительная погрешность асимптотического среднего

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,305	0,075	0,038	0,019

Таблица 3. Относительная погрешность асимптотической дисперсии

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,517	0,145	0,075	0,038

Из полученных результатов можно сделать вывод, что точность метода увеличивается с ростом интенсивности потока, что согласуется с рассматриваемым асимптотическим условием. Предполагая приемлемой погрешностью $\Delta < 0,05$, можно говорить о применимости асимптотических результатов для $\lambda \geq 50$ для приведенных значений параметров системы. Однако можно заметить, что наибольшее расхождение между распределениями наблюдается в точке $i = 0$ («нулевом» состоянии системы), что обусловлено особенностями функционирования систем с катастрофами.

Отметим также, что проведенные многочисленные численные эксперименты показали, что при достаточно больших значениях интенсивности входящего потока значения других параметров системы, а именно числа занятых приборов (при неизменной суммарной интенсивности обслуживания) и величины задержки, оказывают незначительное влияние на результаты.

5. Заключение

В работе рассмотрена многолинейная RQ-система с входящим ММРР-потокотом и катастрофами. Проведено исследование системы методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока. Доказано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид характеристической функции экспоненциального распределения. Стоит заметить, что полученное асимптотическое распределение не зависит от вида матриц входящего ММРР-потока, а только от средней интенсивности входящего потока. Таким образом в работе показано, что асимптотическое поведение системы (а именно распределение вероятностей числа заявок на орбите) эквивалентно функционированию более простой системы с простейшим входящим потоком, что может иметь широкое практическое значение в силу необходимости оценки лишь средних значений потока из статистических данных.

В работе также приведены результаты численного анализа результатов, из которых можно сделать вывод о высокой точности предлагаемой аппроксимации при значениях интенсивности входящего потока, в 50–100 раз превышающих интенсивность обслуживания. При этом наибольшая погрешность аппроксимации наблюдается в оценке вероятности «нулевого» состояния. В будущих исследованиях планируется разработать методы оценки вероятности данного состояния и разработать модификацию асимптотического метода для более сложных систем, например учитывающих эффект нетерпеливости заявок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. 1st edn. Heidelberg: Springer Berlin, 2008.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. 1st edn. N.Y.: Springer, 1999.
3. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // J. Appl. Probab. 1991. V. 28. No. 3. P. 656–663.
4. *Gelenbe E., Fourneau J.M.* G-networks with resets // Perform. Eval. 2002. V. 49. No. 1–4. P. 179–191.
5. *Gelenbe E., Fourneau J.M.* The first decade of G-networks // Eur. J. Oper. Res. 2000. V. 126. No. 2. P. 231–232.
6. *Gelenbe E., Morfopoulou C.* Routing and G-networks to optimise energy and quality of service in packet networks // Proc. Int. Conf. on Energy-Efficient Computing and Networking. 2010. P. 163–173.
7. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Ann. Oper. Res. 2011. V. 48. P. 205–212.
8. *Caglayan M.* G-networks and their applications to machine learning, energy packet networks and routing: introduction to the special issue // Probab. Eng. Inform. Sci. 2017. V. 31. P. 381–395.

9. *Atencia I., Apice C.D., Manzo R., Salerno S.* Retrial queueing system with several input flows of negative customers and LCFS/PR discipline // Proc. Fourth Int. Workshop on Queueing Networks with Finite Capacity. 2000. P. 30–34.
10. *Shin Y.W.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. V. 55. No. 4. P. 223–237.
11. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters // RAIRO Oper. Res. 1999. V. 33. No. 3. P. 371–382.
12. *Вишне夫斯基 В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.
13. *Raj R., Jain V.* Resource optimization for MMAP[c]/PH[c]/S catastrophic queueing model with PH retrial times // OPSEARCH. 2024. V. 61. P. 1192–1223.
14. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A.* Asymptotic analysis of a multiserver retrial queue with disasters // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Related Fields (ITMM 2024). Commun. Comput. Inf. Sci. Cham: Springer, 2025. V. 4272. P. 171–180.
15. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A., Plaksin D.A.* Asymptotic analysis of a multi-server retrial queue with disasters in the service block // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications (ITMM 2022). Commun. Comput. Inf. Sci. Cham: Springer, 2023. V. 1803. P. 55–67.
16. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A.* Asymptotic analysis of multiserver retrial queueing system with π -defeat of negative arrivals under heavy load // Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. 2025. V. 33. No. 2. P. 144–156.
17. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP/GI/ ∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. Т. 32. № 3.
18. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.М. Хоровым.

Поступила в редакцию 26.02.2026

После доработки 21.05.2026

Принята к публикации 15.06.2026

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2026 г. М.А. ТУЖИЛИН, канд. физ.-мат. наук (mikhail.tuzhilin@math.msu.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

СЕРИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕАЛЬНЫХ СЕТЕЙ¹

Предлагается обобщение двух известных инвариантов реальных сетей: степени и кси-центральности. Строится серия центральностей, основанная на матрице Лапласа сети и параметризованная параметром j со следующими свойствами: во-первых, при $j = 0, 1$ эти центральности совпадают со степенью и кси-центральностью; во-вторых, их распределение хорошо приближается распределением Вейбулла; в-третьих, для реальных сетей они имеют правостороннюю асимметрию, а для искусственных сетей имеют симметричное распределение. Пороговое значение 1 коэффициента асимметрии Пирсона, посчитанное для каждого элемента этой серии, позволяет отличить реальные сети от искусственных.

Ключевые слова: сети, центральности, локальные и глобальные характеристики графов, матрица Лапласа, дискретный оператор Лапласа–Бельтрами.

DOI: 10.7868/S2413977726110055

1. Введение

Одним из наиболее известных инвариантов реальных сетей или сетей, основанных на реальных данных, является форма распределения центральности степени. В работе [1] было обнаружено свойство реальных сетей: для реальных сетей центральность степени имеет степенное распределение, а для случайных сетей это распределение биномиальное, которое впоследствии было названо свойством безмасштабности. Также они предложили алгоритм [2] для построения сети, удовлетворяющей этому свойству, однако у построенной сети оказался небольшой средний кластерный коэффициент, т.е. сеть не являлась сетью малого мира. Одним из ключевых соображений авторов было то, что распределение степеней на логарифмическом графике имеет линейную структуру с <тяжелым хвостом>, поэтому усеченный график этого распределения удовлетворяет степенному закону. На данный момент вопрос о том, удовлетворяет ли распределение степеней в реальных сетях степенному закону, остается спорным [3], однако правосторонняя асимметрия этого

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

распределения остается неоспорима. Также в [3] авторы отмечают, что распределение Вейбулла куда более точно описывает распределение степеней в реальных сетях.

В [4] был предложен алгоритм для построения безмасштабной сети с большим средним кластерным коэффициентом. В [5] автор обнаружил, что свойства малого мира и безмасштабности недостаточны для сетей реального мира. Точнее, автор предложил новую центральность, называемую кси-центральностью, распределение которой хорошо описывается распределением Вейбулла, имеет линейную структуру с тяжелым хвостом на логарифмическом графике, является правосторонне асимметричной для реальных сетей и центральной для модельных сетей или искусственных. Это в свою очередь, показывает, что распределение кси-центральности отличает реальные сети от искусственных.

В данной работе построен ряд центральностей, основанных на степени и кси-центральности, которые также хорошо описываются распределением Вейбулла и обладают схожими свойствами для различения реальных и искусственных сетей. Эти новые инварианты основаны на матрице Лапласа и связаны с ее спектром.

2. Обобщение степени и кси центральностей

2.1. Основная теория

Рассмотрим граф G как одномерный симплициальный комплекс. Пусть для простоты G – простой неориентированный связный граф. Чтобы построить из него цепной комплекс, нужно добавить ориентацию на ребра G . Так как определение не будет зависеть от ориентации, выберем ориентацию позже. Пусть C_k – k -мерная группа цепей над $\mathbb{R}$, соответствующая этому симплициальному комплексу. Для графа нетривиальными являются только размерности: C_0 и C_1 . Граничное отображение $C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1$ порождает отображение между двойственными пространствами (т.е. линейными функциями на цепях) $C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1$.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на k -мерных цепях C_k . С помощью этого произведения можно определить двойственное отображение $C^0 \xleftarrow{(\partial^0)^*} C^1$ следующим образом: для любых двух функций $f, g \in C^k$ имеем $(\partial^k f, g) = (f, (\partial^k)^* g)$. Таким образом, цепной комплекс и коцепной комплекс имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_0 &\xrightarrow{\partial_1} C_1, \\ C^0 &\xleftarrow[(\partial^0)^*]{\partial^0} C^1. \end{aligned}$$

Отображение $L = (\partial^0)^* \partial^0 : C^0 \rightarrow C^0$ называется дискретным оператором Лапласа–Бельтрами и задается матрицей Лапласа, если в C^0 и C^1 выбрать канонический базис.

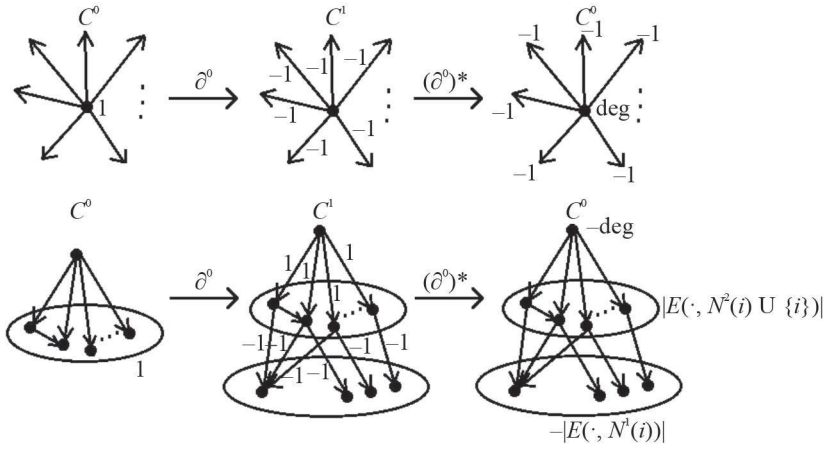


Рис. 1. Образы при отображении Лапласа–Бельтарми для функции χ_i^0 (сверху) и χ_i^1 (снизу).

Обозначим для некоторой вершины i множество ее j -х соседей (т.е. все вершины в точности на расстоянии j от i) через $\mathcal{N}^j(i)$. Рассмотрим для некоторого фиксированного i характеристическую функцию ее j -х соседей χ_i^j , а именно

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Можно рассматривать эту функцию χ_i^j как элемент C^0 , поскольку она определена как функция на вершинах. Заметим, что вне зависимости от определения центральности, любая центральность может рассматриваться как элемент C^0 . Также отметим, что $\sum_j \chi_i^j \in \ker(L)$.

Определение 1. Назовем **центральностью j -соседей** следующее выражение:

$$\xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)} \quad \text{для } i \in V(G).$$

Рассмотрим первые два элемента центральности j -соседей.

1) В случае $j = 0$ характеристическая функция χ_i^0 является характеристической функцией вершины i . Зафиксируем i и определим ориентацию на G : на индуцированных подграфах $\mathcal{N}^j(i)$ определим любую ориентацию, а остальные ребра ориентируем так, чтобы их начала были в $\mathcal{N}^j(i)$, а концы в $\mathcal{N}^{j+1}(i)$ для любого j . Если $j = 0$, то образ $\partial^0(\chi_i^0)$ – это элемент C^1 , равный -1 на ребрах, исходящих из вершины i , и 0 в противном случае (см. рис. 1 сверху). Образ $(\partial^0)^*\partial^0(\chi_i^0) \in C^0$ – это функция, равная $\deg(i)$ в вершине i , -1 в ее соседях и 0 в остальных вершинах. Следовательно, $(L\chi_i^0, \chi_i^0) = \deg(i)$ и $\xi_i^0 = \deg(i)$.

2) В случае $j = 1$ характеристическая функция χ_i^1 – это характеристическая функция соседей вершины i . Образ $\partial^0(\chi_i^1) \in C^1$ – это функция,

равная 1 на ребрах, выходящих из вершины i , -1 на ребрах, выходящих из $\mathcal{N}^1(i)$, и 0 в остальных (см. рис. 1 снизу). Образ $(\partial^0)^* \partial^0(\chi_i^1) \in C^0$ – это функция, равная $-\deg(i)$ в вершине i , равная числу внешних связей первой окрестности $|E(k, \mathcal{N}^1(i) \cup \{i\})|$ (т.е. числу ребер между этой окрестностью и всем остальным в графе) для любой вершины $k \in \mathcal{N}^1(i)$, равная $-|E(k, \mathcal{N}^1(i))|$ для $k \in \mathcal{N}^2(i)$ и 0 в остальных случаях. Следовательно, $(L\chi_i^1, \chi_i^1) = |E(\mathcal{N}^1(i), V(G) \setminus \mathcal{N}^1(i))|$ и (χ_i^1, χ_i^1) – это число первых соседей $\mathcal{N}^1(i)$, т.е. $\deg(i)$. Таким образом, $\xi_i^1 = \xi_i$, что определено в статье [5].

Центральность j -соседей является обобщением двух инвариантов реальных сетей: степени и кси-центральности. Заметим, что эту центральность также можно переписать, используя числовые характеристики графа.

Теорема 1. Для любого графа центральность j -соседей равна

$$\xi_i^j = \frac{|\text{out}(\mathcal{N}^j(i))|}{|\mathcal{N}^j(i)|},$$

где $\text{out}(H) = E(H, V(G) \setminus H)$ – множество связей между множеством H и остальными вершинами.

Доказательство. Это очень простой факт, вытекающий из формулы для билинейной формы матрицы Лапласа: $(Lx, x) = \sum_{k, l \in V(G), k \sim l} (x^k - x^l)^2$ и,

следовательно, $(x_k - x_l)^2 = 1$, если только $x_k = 1$ (и, следовательно, $k \in \mathcal{N}^j(i)$) и $x_l = 0$ (и, следовательно, $l \notin \mathcal{N}^j(i), l \sim k$) и наоборот.

В случае, если граф имеет изолированную вершину i , доопределим $\xi_i^j = 0$. Также отметим, что по определению эти центральности связаны с числом Чигера и максимальным собственным значением матрицы Лапласа.

Теорема 2. Рассмотрим неориентированный граф G . Пусть $h(G)$ – число Чигера графа G . Если $|\mathcal{N}^j(i)| \leq \frac{n}{2}$, то $\xi_i^j \geq h(G)$.

Отметим, что для реальных сетей $|\mathcal{N}^j(i)| \leq \frac{n}{2}$ почти всегда выполнено.

Теорема 3. Рассмотрим неориентированный граф G . Обозначим спектр матрицы Лапласа $0 = l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$. Выполняется $\xi_i^j \leq l_n$.

2.2. Вычисления

Теорема 1 может быть использована для последовательного по j вычисления центральности j -соседей. Будем хранить в памяти две характеристические матрицы $\chi_i^{j-1}(k)$ и $\chi_i^{j-2}(k)$ для $i, k \in V(G)$ с двух предыдущих шагов. Пусть k индексирует столбцы. Алгоритм вычисления центральности j -соседей следующий:

1) Инициализация: $\chi^0 = I$, $\chi^1 = A$, где I – единичная матрица, A – матрица смежности;

2) Находим матрицу $\chi^j = \text{xor}(A\chi^{j-1}, \chi^{j-2})$;

3) Для каждого i вычисляем $(L\chi_i^j, \chi_i^j)$ и $(\chi_i^j, \chi_i^j) = \sum_k (\chi_i^j)^k$.

Для $j = 0$ и $j = 1$ центральность j -соседей – это степень и кси-центральность, их можно вычислить отдельно. Для вычисления кси-центральности

см. [5]. Заметим, что вычислительную сложность можно понизить, если дополнительно сохранять матрицу $A\chi^{j-1}$, которая используется при вычислении матрицы $L\chi^j$ на предыдущем шаге.

3. Сравнение распределений реальных сетей и модельных

Были посчитаны распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5] и для сетей моделей Эрдёша–Реньи, Барабаши–Альберта, Уоттса–Строгаца и Боккалетти–Хван–Латора (искусственных). Для реаль-

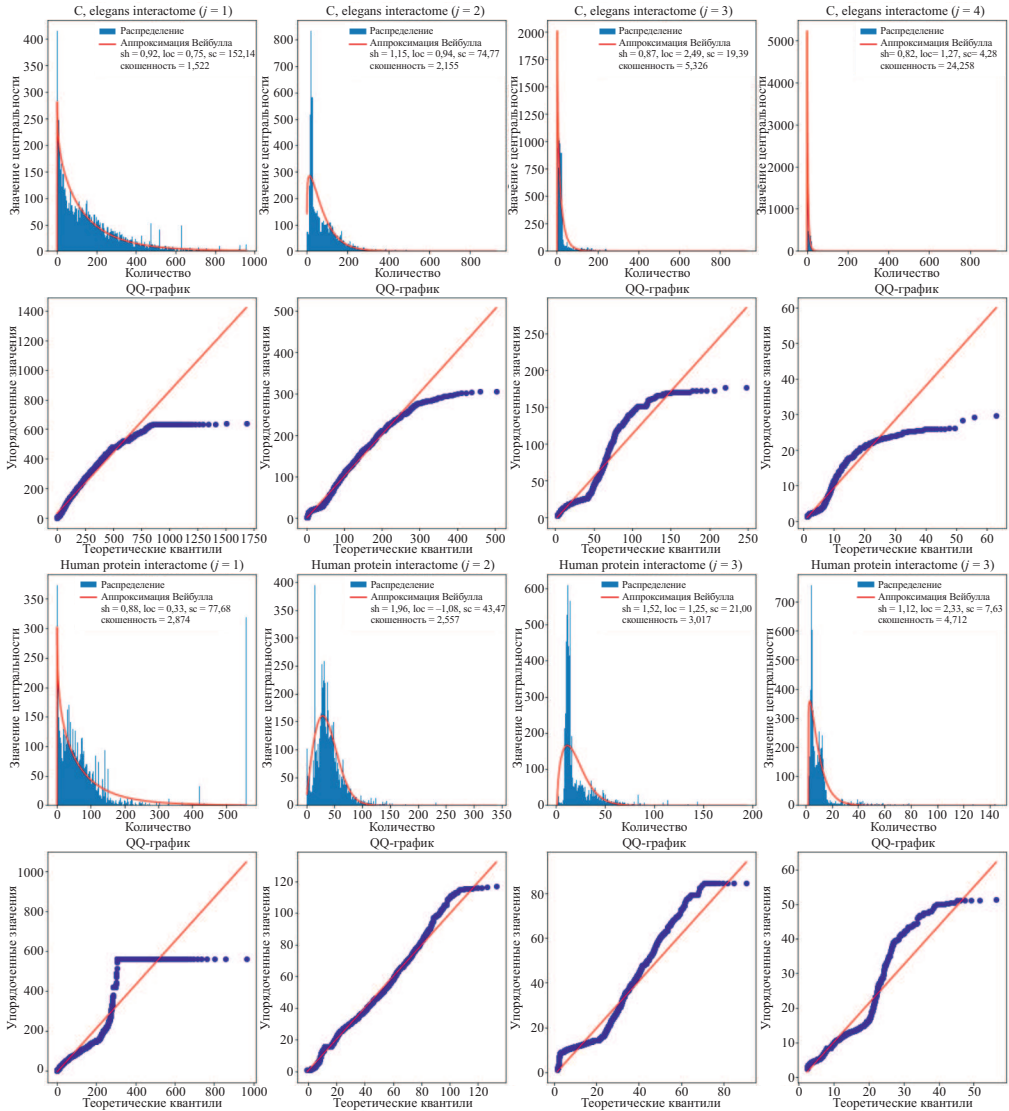


Рис. 2. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

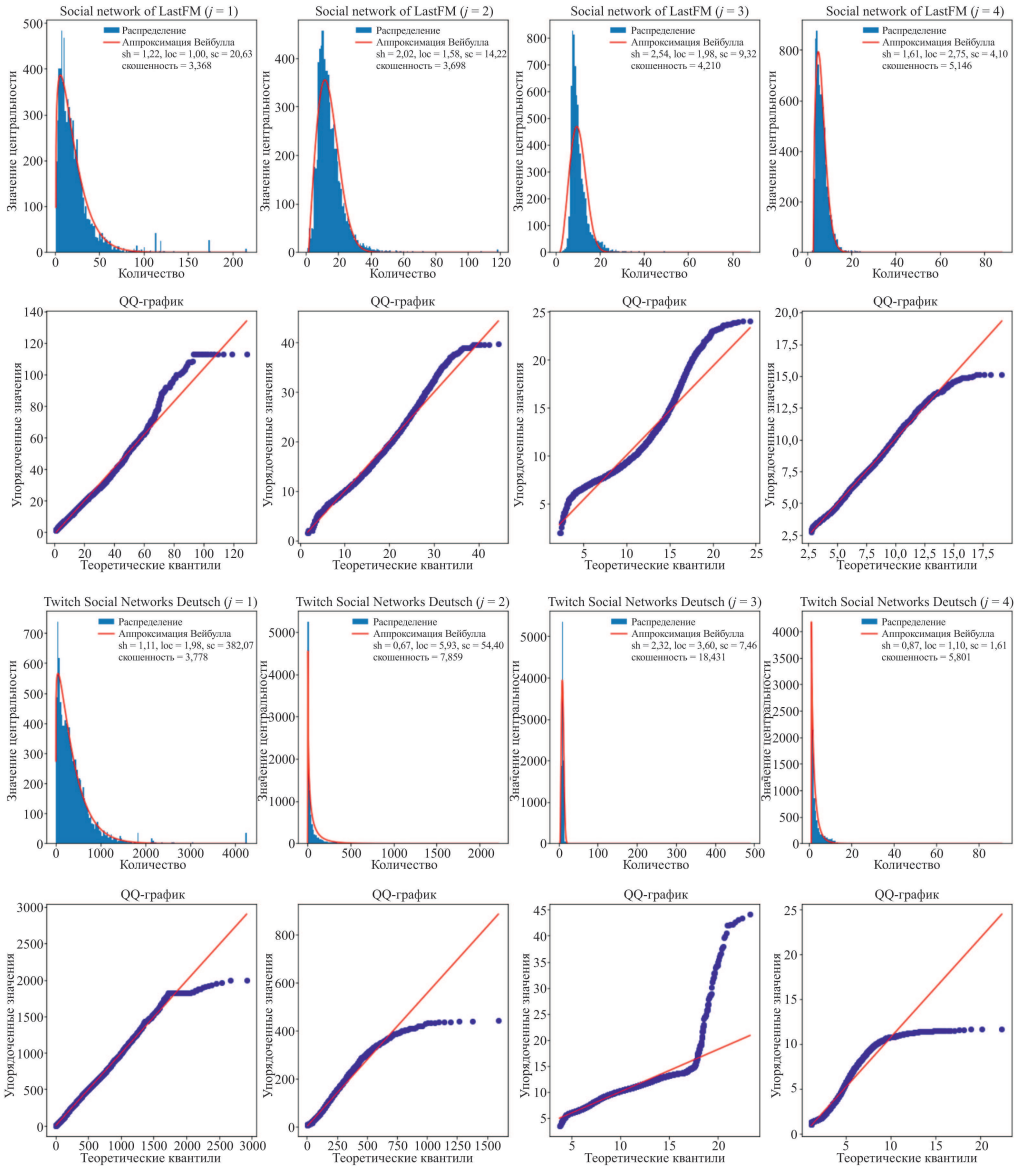


Рис. 3. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

ных сетей видно аналогичное поведение, как и для распределения степеней и распределения кси [5]: эти распределения хорошо приближаются распределением Вейбулла, имеют правостороннюю асимметрию и почти линейны на логарифмическом графике с некоторым шумом и хвостом (рис. 2–7. Остальные рисунки доступны по ссылке: OSF. <http://osf.io/d3wsj>. Доступно

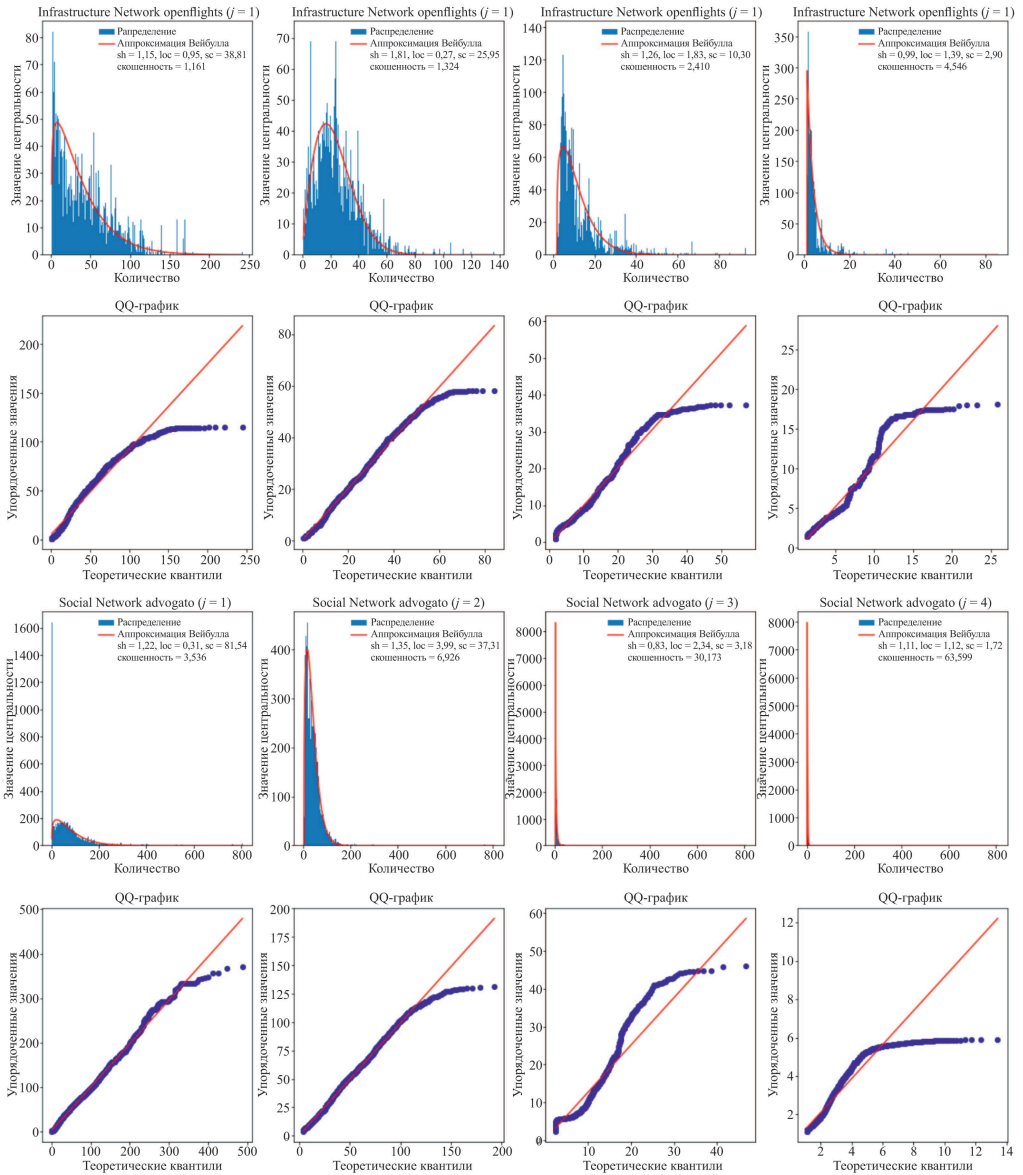


Рис. 4. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

с 28 июля 2026). Кроме того, получаем тот же результат для сетей Эрдеша–Реньи, Барабаш–Альберта, Уоттса–Строгаца и Боккалетти–Хван–Латора, что и в [5]: распределения оказываются симметричными (рис. 8, 9).

Также вычисление коэффициента асимметрии Пирсона подтверждает этот результат. Реальные сети и модельные для каждой центральности

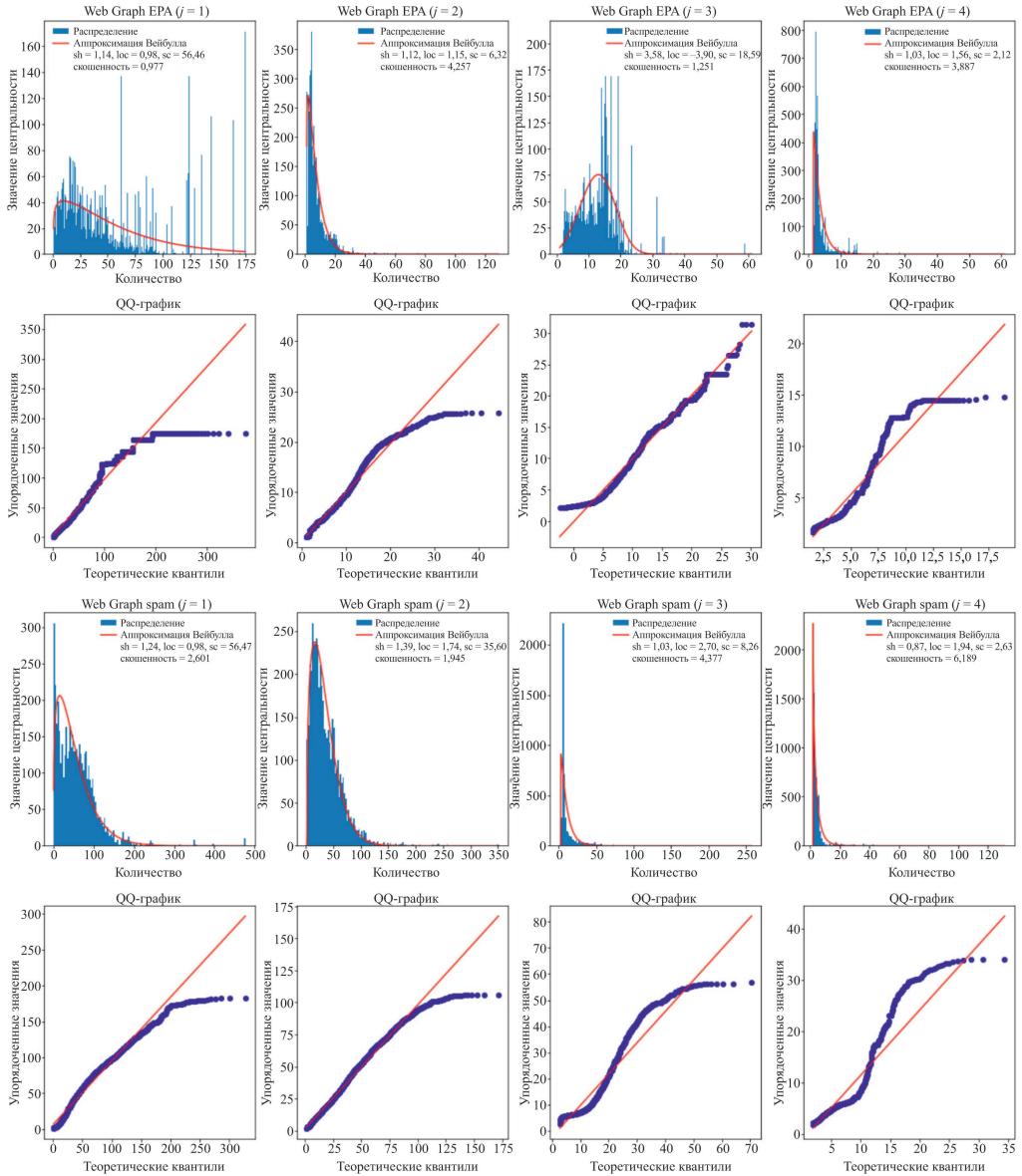


Рис. 5. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

серии разделяются посредством коэффициента асимметрии Пирсона. Для проверки качества бинарного классификатора “реальная сеть против искусственной” был проведен ROC-анализ [6] на основе значений коэффициента асимметрии Пирсона (анализ разделяющей способности, рис. 10). Для анализа было использовано 16 реальных сетей, приведенных в статье,

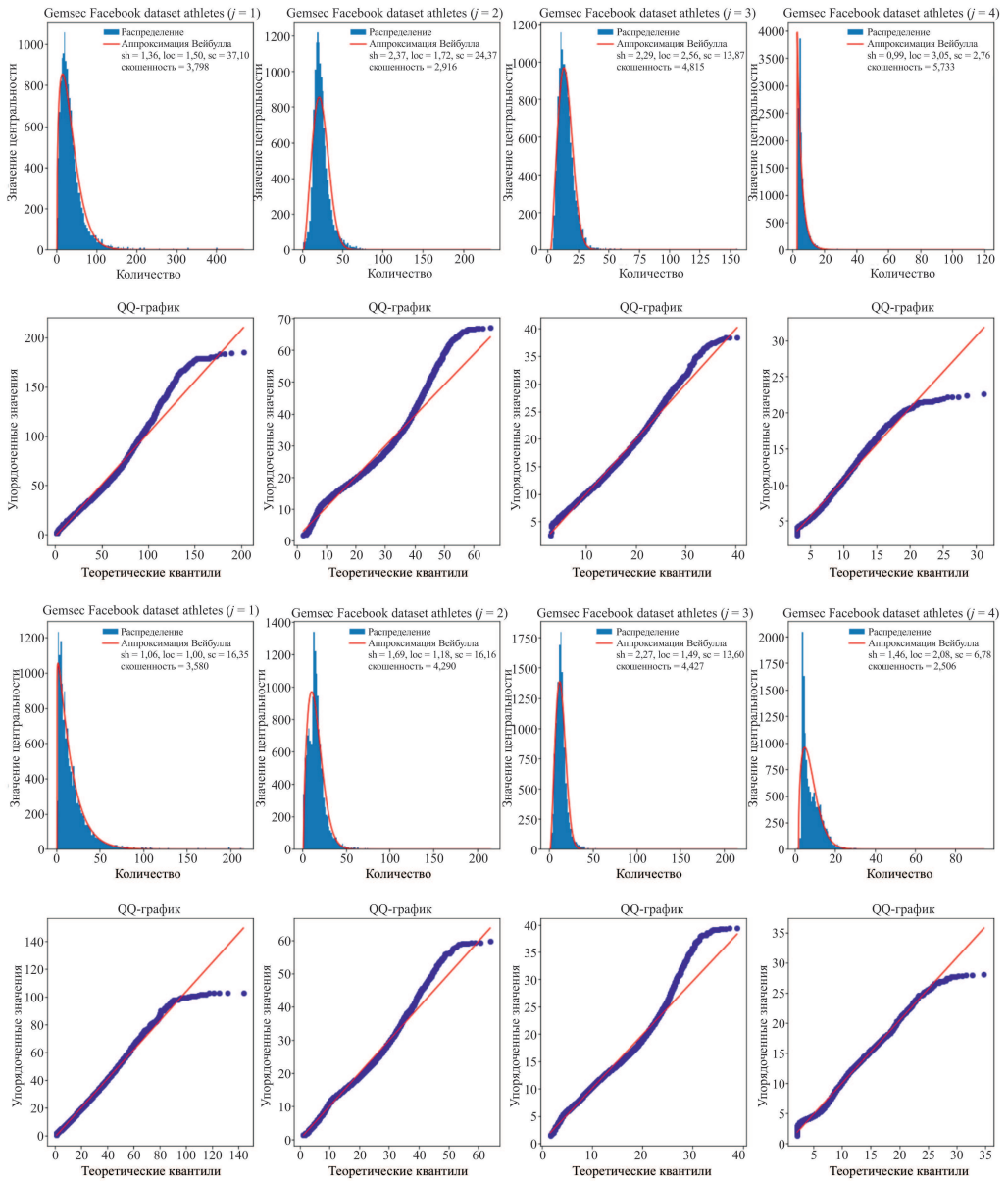


Рис. 6. Распределения центральныхностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

и 32 искусственные с различными параметрами: по 8 на каждую из моделей. Были выбраны следующие параметры: для модели Эрдеша–Реньи $n = 4000$, $p = 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$, для модели Уоттса–Строгаца $n = 4000$, $k = 20$, $p = 0,001; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5$, для модели Барабаши–Альберта $n = 4000$, $m = 3, 5, 7, 9, 12, 20, 30, 43$, для модели

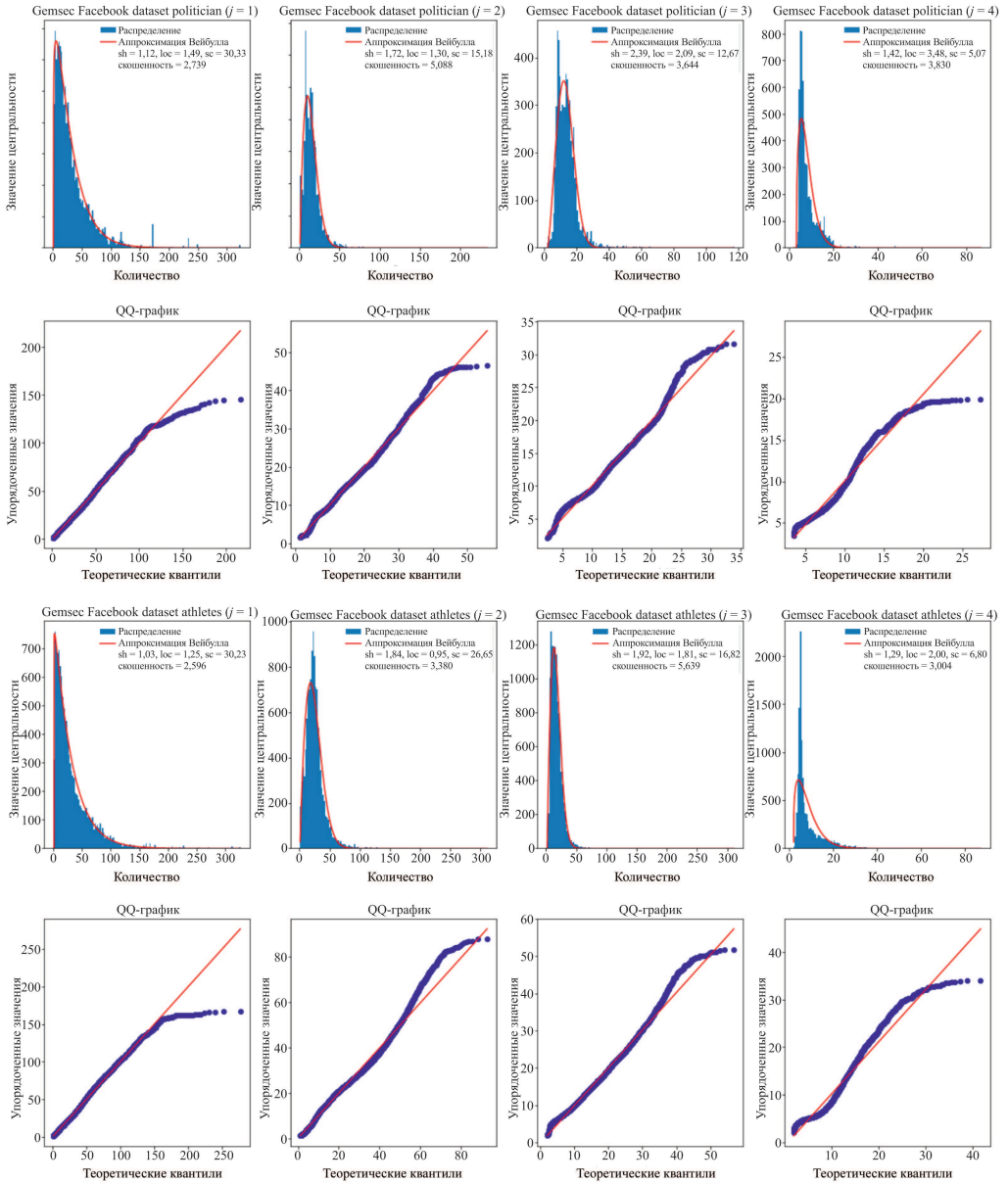


Рис. 7. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

Боккалетти–Хван–Латора $n = 2000$, $n_0 = 50$, $m = 4, 6, 8, 10, 12, 20, 30, 43$. При фиксированном $j = 1, 2, 3, 4$ для каждого порогового значения были посчитаны доли TPR (истинно положительных) и FPR (ложноположительных) сетей, и посчитана AUC (площадь под ROC-кривой). Для каждого $j = 1, 2, 3, 4$ значение AUC оказалось близко к 1 (идеальному классификатору), что под-

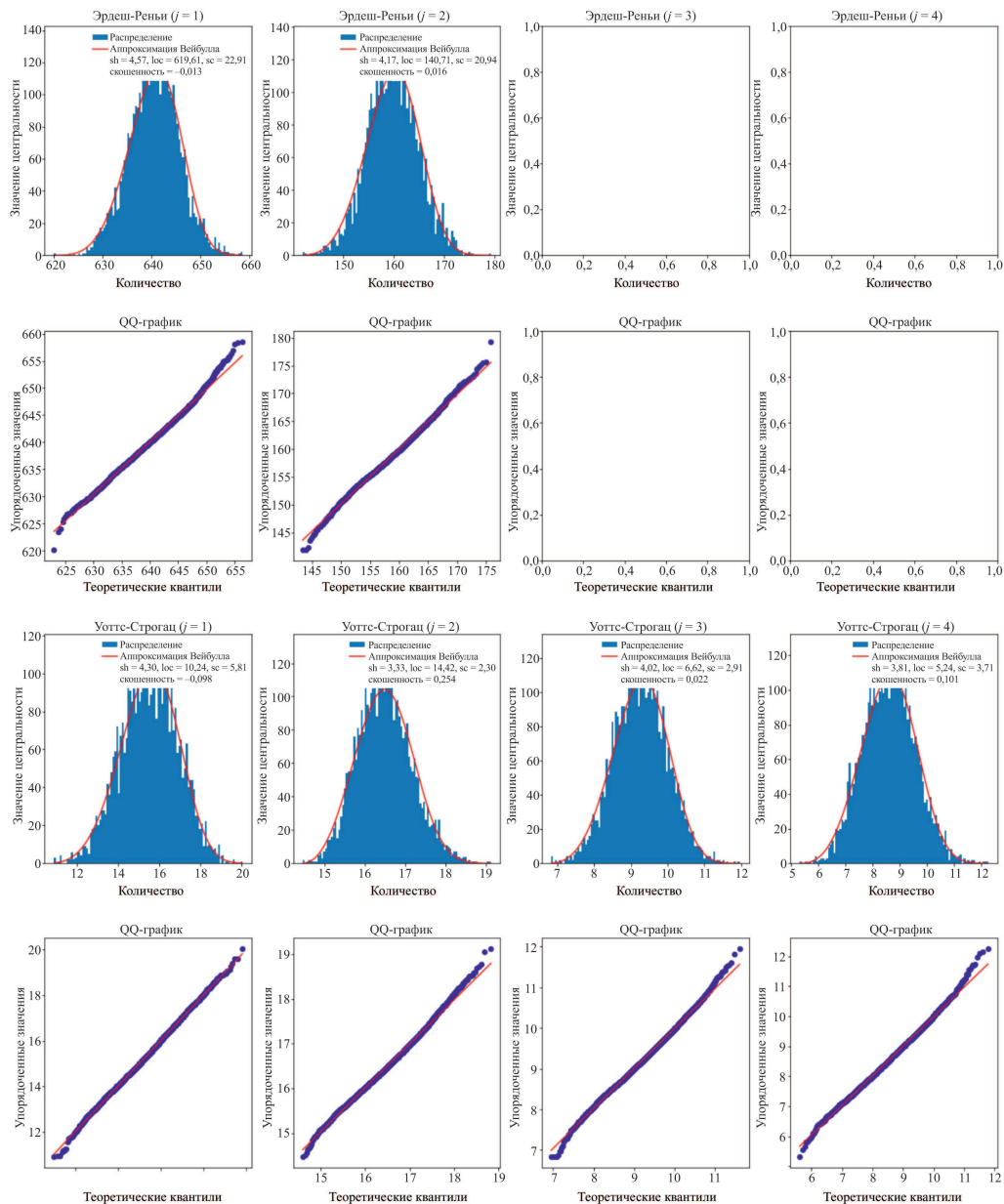


Рис. 8. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для моделей Эрдеша-Реньи $(n, p) = (4000, 0, 02)$ и Уоттса-Строгаца $(n, k, p) = (4000, 21, 0, 3)$, аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

тверждает надежность центральностей j -соседей отличать реальные сети от искусственных посредством коэффициента асимметрии Пирсона. Также пороговое значение 1 коэффициента асимметрии Пирсона, оказалось оптимальным порогом классификации (на рис. 10 красная точка): реальные сети име-

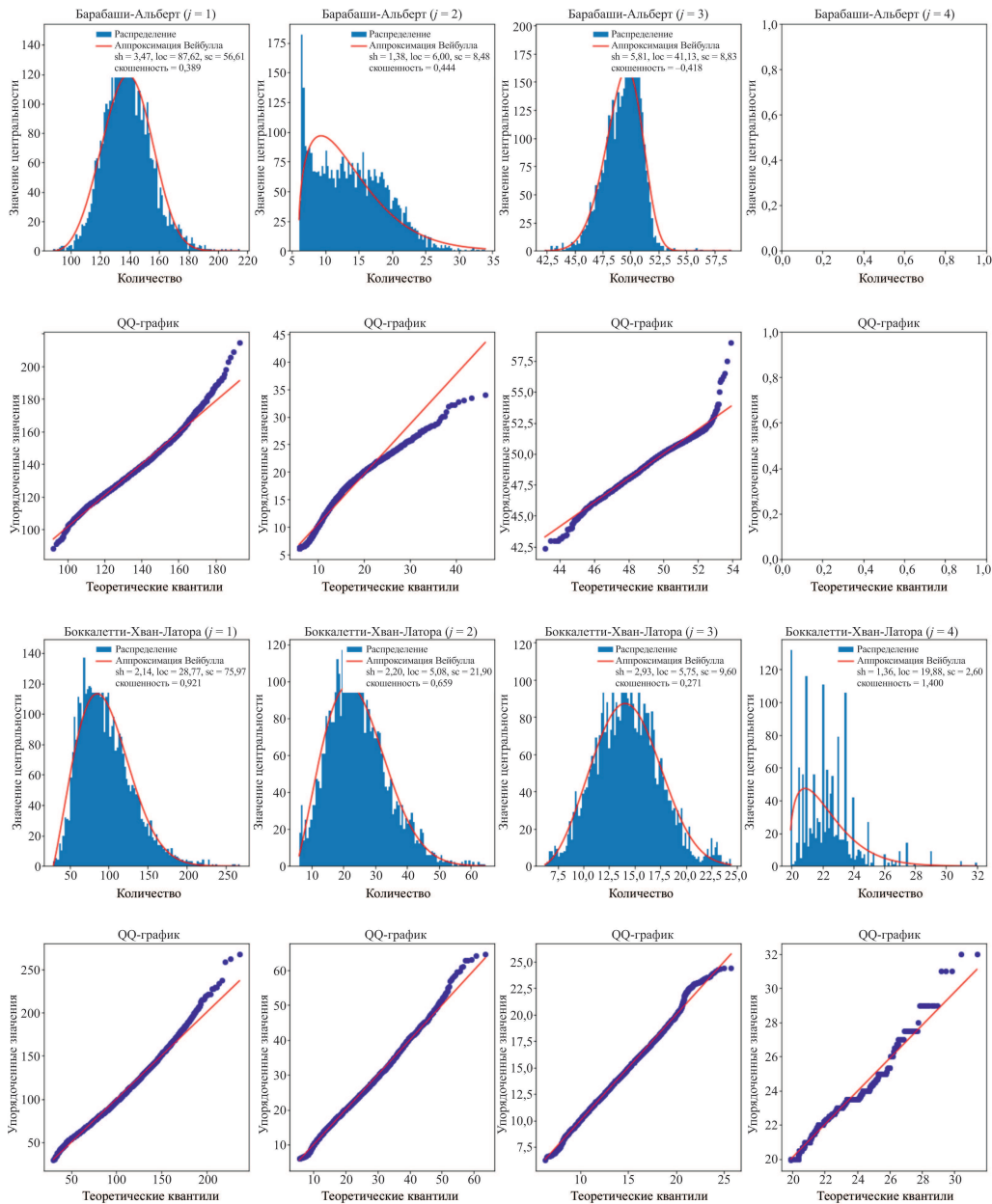


Рис. 9. Распределения центральных ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для моделей Барабаш–Альберта $(n, m) = (4000, 43)$ и Боккалетти–Хван–Латора $(n, m, n_0) = (4000, 20, 100)$, аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

ют коэффициент асимметрии Пирсона сильно больше 1, а модельные меньше 1 (в модели Боккалетти–Хванга–Латора распределение четвертой центральности оказалось слишком зашумленным).

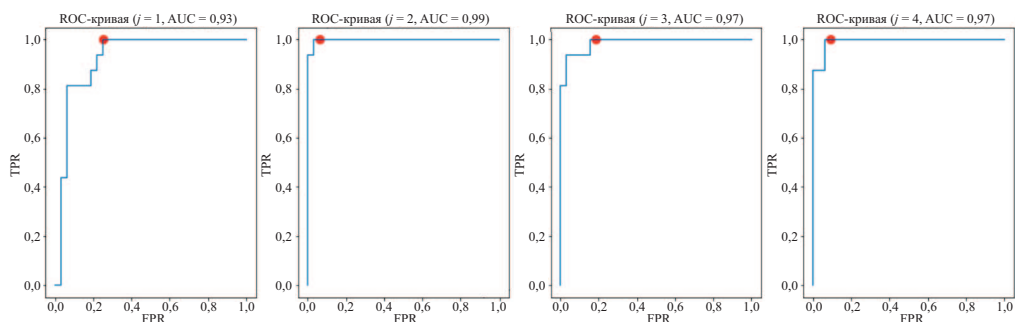


Рис. 10. ROC-кривые для бинарного классификатора “реальные сети против искусственных” на основе коэффициента асимметрии Пирсона, посчитанного по распределению центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$. Красная точка соответствует пороговому значению 1.

4. Заключение

В данной статье построена последовательность центральностей, называемых центральностями j -соседей, основанных на матрице Лапласа или дискретном аналоге оператора Лапласа–Бельтрами для графа. С точки зрения теории графов эти центральности связаны с числом Чигера и максимальным собственным значением матрицы Лапласа. С точки зрения приложений эти центральности являются обобщением двух центральностей с инвариантными распределениями для реальных сетей: центральности степени и кси-центральности (случай $j = 0, 1$). Они имеют правостороннее скошенное распределение для реальных сетей, отличное (симметричное) для искусственных, и приближаются распределением Вейбулла. Показано, что пороговое значение 1 в коэффициентах асимметрии Пирсона отличает реальные сети от искусственных для каждого инварианта.

Эти центральности j -соседей названы инвариантными характеристиками, потому что для любой сети, независимо от области ее применения (биологическая, социальная, интернет и т.д.), независимо от ее структуры, соотношения числа вершин и ребер, распределения этих центральностей оказываются правосторонне асимметричными, аппроксимируются распределением Вейбулла, а также демонстрируют линейное поведение с тяжелым хвостом на логарифмическом графике (как в случае свойства безмасштабности). Однако для свойства безмасштабности существует хорошая теория, объясняющая его возникновение, и модель построения сетей с этим свойством, но предложенные здесь центральности представляют собой совершенно новые инварианты, и многие из них еще предстоит изучить. Тем не менее они уже могут быть использовать на практике. Например, их можно использовать для проверки того, является ли искомая сеть реальной или искусственной. Кроме того, поскольку они являются инвариантами реальных сетей, они являются важными кандидатами для признаков в GML-моделях или моделях машинного обучения на основе графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albert R., Jeong H., Barabasi A.L.* Diameter of the world-wide web // *Nature*. 1999. V. 401. No. 6749. P. 130–131.
2. *Barabasi A.L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V. 286 No. 5439. P. 509–512.
3. *Broido A.D., Clauset A.* Scale-free networks are rare // *Nature Communications*. 2019. V. 10. No. 1. P. 1017.
4. *Boccaletti S., Hwang D.U., Latora V.* Growing hierarchical scale-free networks by means of nonhierarchical processes // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. V. 17. No. 07. P. 2447–2452.
5. *Tuzhilin M.* Capability centrality: the next step from scale-free property // *arXiv preprint arXiv:2605.03796*. 2026.
6. *Nakas C.T., Bantis L.E., Gatsonis C.A.* ROC analysis for classification and prediction in practice // *Chapman and Hall/CRC*. 2023.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 06.06.2026

После доработки 15.07.2026

Принята к публикации 20.07.2026

Управление в технических системах

© 2026 г. Д. ВАН (van6.d@edu.spbstu.ru),

Е.С. ГЕБЕЛЬ, канд. техн. наук (gebel_es@spbstu.ru),

Д.Г. АРСЕНЬЕВ, д-р техн. наук (vicerector.int@spbstu.ru)

(Высшая школа управления кибер-физическими системами, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого)

МЕТОД ПЛАНИРОВАНИЯ ПОТРЕБНОСТЕЙ В МАТЕРИАЛАХ ДЛЯ ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ НА ОСНОВЕ ИНВЕРСНЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ¹

В работе решается задача обеспечения алгоритмической замкнутости процесса обратного планирования материальных потребностей в дискретных производственных системах на основе инверсных сетей Петри. Предложен алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), реализующий формальную процедуру виртуального срабатывания переходов с топологическим ранжированием позиций и маскированием ресурсных узлов. Алгоритм обеспечивает полную декомпозицию материальных потоков до множества исходных компонентов без изменения структуры сети и корректно различает расходуемые материалы и возобновляемые ресурсы. Экспериментальная верификация на модели многостадийного сборочного производства в среде GPenSIM показала полное совпадение расчетных потребностей с теоретическими значениями, подтверждая достижение алгоритмической замкнутости и исключение необходимости экспертной интерпретации.

Ключевые слова: дискретно-событийные системы, инверсная сеть Петри, планирование потребностей в материалах, проблема остаточных маркеров, алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков, маскирование ресурсов, GPenSIM.

DOI: 10.7868/S2413977726110063

1. Введение

Планирование потребности в материалах (Material Requirements Planning, MRP) составляет фундаментальную задачу управления дискретными производственными системами, определяя эффективность использования ресурсов и устойчивость выполнения производственной программы [1, 2]. Традици-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии правительства Китая и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-674 от 20 августа 2025 г.).

онные системы MRP и модули ERP базируются на детерминированных ведомостях материалов и фиксированных нормах расхода, реализуя алгоритм разузлования изделий для расчета зависимого спроса [1, 3]. Данный подход неявно предполагает бесконечную доступность производственных мощностей и игнорирует структурные ограничения реальных систем. В условиях параллельных операций и конкуренции за ресурсы стандартная логика MRP требует сложного согласования с задачами календарного планирования [2, 4], что снижает автоматизации принятия решений. В условиях перехода к киберфизическим системам проблема анализа отклонений и управления эффективно становится особенно острой [5], требуя более совершенных инструментов моделирования.

В последние десятилетия существенное внимание исследователей привлекают формальные модели дискретно-событийных систем [6, 7], прежде всего сети Петри [8, 9], обеспечивающие строгое математическое описание динамики производства с учетом параллелизма, синхронизации и ресурсных конфликтов. Сети Петри предоставляют унифицированный математический аппарат для моделирования материальных и ресурсных потоков, анализа достижимости состояний и синтеза стратегий управления [10, 11]. Особый интерес представляет обратная задача: определение начальных потребностей в сырье на основе заданного целевого выпуска продукции.

Формальные основы этого направления заложены в работах по инверсным сетям Петри [12], где обращение матрицы инцидентности позволяет аналитически связать целевую и начальную маркировки. Данный подход был адаптирован для задач MRP в [13], где предложено использовать инверсные сети для визуализации результатов планирования, включая построение диаграмм Ганта. Однако этот метод не решает проблему остаточных маркеров, возникающих при некратности размеров партий объема заказа, что вынуждает прибегать к ручной корректировке результатов. Наличие таких остатков в промежуточных позициях приводит к состоянию структурной блокировки: алгоритм останавливается, не достигнув уровня исходного сырья. В результате процесс планирования теряет алгоритмическую замкнутость, а часть реальных требований остается скрытой в виде незавершенного производства.

Анализ литературы показывает, что задача автоматического устранения остаточных состояний при обратном планировании в дискретно-событийных моделях с некратными партиями остается открытой. Ключевыми требованиями к решению являются: сохранение структуры исходной модели сети Петри; корректное различение расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов; возможность прямой интеграции в имитационную среду без перехода к внешним оптимизационным постановкам; обеспечение алгоритмической замкнутости, т.е. обеспечение полной декомпозиции материальных потоков до уровня исходного сырья за конечное число шагов.

Целью данной работы является разработка алгоритма автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), обеспечивающего полную декомпозицию материальных потоков в инверсных сетях Петри. Предложенный алгоритм реализует процедуру виртуального срабатывания переходов с топологическим ранжированием материальных позиций и маскированием ресурсных узлов. В отличие от метода [13] ААРПО автоматически устраняет все остаточные маркеры и обеспечивает последовательную декомпозицию материальных потоков до множества исходных компонентов без участия эксперта. При этом сохраняется семантика модели и корректно учитывается различие между материальными и ресурсными позициями. Алгоритм реализован в среде GPenSIM [14] и верифицирован на модели многостадийного сборочного производства в условиях конкуренции за мощности.

2. Постановка задачи и математическое моделирование

2.1. Формализация производственной системы

Рассматривается дискретная производственная система, технологическая структура которой задана в виде Р/Т-сети Петри [8]. Модель используется для формального описания материальных потоков, технологических операций и возобновляемых ресурсов в процессе производства. Предполагается, что структура изделия и технологические маршруты заданы детерминированно, а все операции выполняются дискретными партиями с фиксированными коэффициентами потребления. Формально производственная система описывается сетью Петри:

$$(1) \quad N = \langle P, T, F, W, M_0 \rangle,$$

где $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ – конечное множество позиций, моделирующих буферы, складские зоны и ресурсы; $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ – конечное множество переходов, представляющих технологические операции; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – множество ориентированных дуг, задающее структуру сети; $W : F \rightarrow \mathbb{N}^+$ – функция весов дуг, определяющая коэффициенты расхода и выпуска партий; $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ – начальная маркировка, задающая распределение материальных запасов и доступность ресурсов.

Динамика сети описывается стандартным уравнением состояния в векторной форме:

$$(2) \quad M_{k+1} = M_k + Bu_k,$$

где k – номер дискретного шага; $M_k \in \mathbb{N}_0^n$ – вектор маркировки на шаге k ; $u_k \in \mathbb{N}_0^m$ – вектор срабатываний переходов (количество запусков каждого перехода); $B \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ – матрица инцидентности сети Петри, определяемая как $B = B^+ - B^-$, где $B^-(p, t) = W(p, t)$ для $(p, t) \in F$, $B^+(p, t) = W(t, p)$ для $(t, p) \in F$, и 0 в остальных случаях.

2.2. Инверсная сеть Петри для обратного планирования

Для задач планирования потребности в материалах рассматривается обратная постановка: задана целевая маркировка $M_{\text{target}} : P \rightarrow \mathbb{N}_0$, определяющая требуемый объем выпуска готовой продукции, необходимо определить начальную маркировку $M_{\text{raw}} : P_{\text{raw}} \rightarrow \mathbb{N}_0$, задающую потребности в исходном сырье.

Для решения данной задачи вводится инверсная сеть Петри:

$$(3) \quad N^{-1} = (P, T, F^{-1}, W^{-1}, M_{\text{target}}),$$

где $F^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\}$ – инверсное отношение инцидентности (все дуги меняют направление); $W^{-1}(y, x) = W(x, y)$ для всех $(x, y) \in F$ – инверсная функция весов (веса дуг сохраняются); M_{target} – целевая маркировка, используемая как начальное состояние для обратного вывода.

Матрица инцидентности инверсной сети связана с матрицей прямой сети соотношением

$$(4) \quad B^{-1} = B^{-1+} - B^{-1-} = B^{-} - B^{+} = -B.$$

Обратное моделирование в N^{-1} , начиная с M_{target} , позволяет последовательно восстанавливать потребности в полуфабрикатах и материалах, двигаясь от конечной продукции к исходному сырью, при сохранении структурного соответствия между сетью и технологическим процессом.

2.3. Таксономия позиций

Критически важным элементом предлагаемой модели является введение строгой таксономии множества позиций P , обеспечивающей корректность обратного вывода в инверсной сети. Для этого вводится бинарное разбиение

$$(5) \quad P = P_{\text{mat}} \cup P_{\text{res}}, \quad P_{\text{mat}} \cap P_{\text{res}} = \emptyset.$$

Материальные позиции P_{mat} интерпретируются как расходуемые и производимые объекты: сырье, заготовки, полуфабрикаты, готовая продукция. Такие позиции участвуют в трансформационных процессах, и токены в них представляют реальные материальные запасы. Граничные классы материальных позиций определяются:

$$(6) \quad \begin{aligned} P_{\text{raw}} &= \{p \in P_{\text{mat}} \mid \bullet p = \emptyset\} && \text{(исходное сырье)}, \\ P_{\text{prod}} &= \{p \in P_{\text{mat}} \mid p^{\bullet} = \emptyset\} && \text{(готовая продукция)}, \\ P_{\text{inter}} &= P_{\text{mat}} \setminus (P_{\text{raw}} \cup P_{\text{prod}}) && \text{(промежуточная продукция)}, \end{aligned}$$

где $\bullet p = \{t \in T \mid (t, p) \in F\}$ – множество входных переходов позиции p (производителей в прямой сети), а $p^{\bullet} = \{t \in T \mid (p, t) \in F\}$ – множество выходных переходов (потребителей).

Ресурсные позиции P_{res} моделируют возобновляемые производственные мощности: станки, оборудование, рабочие места, персонал. Такие позиции являются консервативными: токены в них циркулируют, отражая занятость и освобождение ресурса, но не потребляются безвозвратно. Формально для каждой ресурсной позиции $p \in P_{\text{res}}$ выполняется условие:

$$(7) \quad \forall t \in \bullet p \cup p^\bullet : W(p, t) = W(t, p).$$

Это означает, что каждое срабатывание перехода, забирающее токен ресурса на входе, возвращает его на выходе с тем же весом, обеспечивая сохранение суммарной маркировки ресурсной позиции во времени.

2.4. Проблема остаточных маркеров

Принципиальная сложность задачи обратного планирования связана с дискретностью производственных партий. В реальных системах веса дуг, задающие коэффициенты расхода и выпуска, как правило, не согласованы с целевым объемом заказа и не являются его делителями. Для формального описания этого эффекта введем множество остаточных позиций R :

$$(8) \quad R = \left\{ p \in P_{\text{inter}} \mid 0 < M_{\text{final}}(p) < \min_{t \in T(p)} W^{-1}(p, t) \right\},$$

где $T(p) = \{t \in T \mid W^{-1}(p, t) > 0\}$ – множество выходных переходов позиции p в инверсной сети; $M_{\text{final}} : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ – маркировка, полученная в результате обратной имитации до момента остановки; $W^{-1}(p, t)$ – вес дуги $p \rightarrow t$ в инверсной сети.

Наличие таких позиций означает, что количество маркеров в них положительно, но недостаточно для активации ни одного исходящего перехода (в логике прямой сети). В терминах инверсной сети это означает структурную блокировку: алгоритм не может продолжить декомпозицию материальных потоков дальше вверх по технологической цепи, так как ни один переход-производитель не может быть активирован согласно стандартным правилам срабатывания.

2.5. Формулировка задачи

Наличие множества остаточных позиций $R \neq \emptyset$ означает, что план материальных потребностей является неполным: часть реальных требований остается скрытой в виде незавершенного производства на промежуточных стадиях и не декомпозируется до уровня исходного сырья P_{raw} . В существующих подходах данная проблема компенсируется ручной экспертной корректировкой результатов моделирования, что снижает уровень автоматизации, воспроизводимости и надежности планирования.

Постановка задачи. Для заданной инверсной сети Петри N^{-1} и целевой маркировки M_{target} требуется разработать автоматическую процедуру пересчета маркировки M_{final} , обладающую следующими свойствами:

1. **Алгоритмическая полнота:** достижение состояния $R = \emptyset$, при котором все промежуточные маркеры полностью декомпозированы до уровня сырья;
2. **Инвариантность структуры:** сохранение исходной топологии сети Петри без введения дополнительных позиций или переходов;
3. **Ресурсная семантика:** корректное разграничение расходуемых материалов (P_{mat}) и возобновляемых ресурсов (P_{res}) для исключения ложных запросов на оборудование;
4. **Сходимость и детерминизм:** завершение расчета за конечное число шагов с формированием однозначного вектора потребностей;
5. **Программная интеграция:** возможность прямой реализации в среде GPenSIM без обращения к внешним солверам.

Решение данной задачи обеспечит переход от открытого процесса планирования (требующего человеческого участия) к замкнутому, полностью автоматизированному алгоритму обратного вывода на основе инверсных сетей Петри.

3. Разработка алгоритма автоматического устранения остаточных состояний

Для разрешения проблемы незамкнутости, сформулированной в разделе 2, предлагается алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО). Алгоритм применяется после выполнения стандартной процедуры обратного моделирования и использует полученную маркировку M_{final} в качестве исходного состояния для коррекции.

3.1. Ключевая идея алгоритма

Алгоритм интерпретирует остаточные маркеры в промежуточных материальных позициях ($p \in R$) как недекомпозированные требования, которые необходимо последовательно распространить вверх по технологической структуре до уровня исходного сырья (P_{raw}). При этом алгоритм не модифицирует структуру сети Петри и не вводит внешних оптимизационных моделей, а действует исключительно на уровне маркировки, используя правила *виртуального срабатывания* переходов.

Под *виртуальным срабатыванием* понимается формальная процедура обновления маркировки, имитирующая запуск перехода в обратном направлении (в инверсной сети) с целью устранения остатка в выходной позиции. В отличие от стандартного срабатывания *виртуальное срабатывание* не требует выполнения предусловий (достаточности входных маркеров), а принудительно рассчитывает необходимую кратность запусков на основе операции округления вверх.

3.2. Маскирование ресурсных позиций

Для корректного различения расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов вводится индикаторная функция маскирования

$$(9) \quad \delta(p) = \begin{cases} 1, & p \in P_{\text{mat}}, \\ 0, & p \in P_{\text{res}}. \end{cases}$$

Функция $\delta(p)$ используется для блокирования распространения остаточных требований через ресурсные позиции. Это обеспечивает инвариантность алгоритма по отношению к циклам использования оборудования и предотвращает ложное формирование потребностей в средствах производства. Физически это означает, что при виртуальном срабатывании перехода потребность в токенах из ресурсных позиций не включается в итоговый расчет материальных потребностей, поскольку ресурс не расходуется, а лишь временно используется. Формально множество P_{res} задается на этапе инициализации алгоритма как входной параметр. Отсутствие данного параметра в случае наличия ресурсных позиций в модели может привести к критическим логическим ошибкам: циклические потоки ресурсов будут восприняты алгоритмом как материальные, что вызовет ложное формирование заказов на закупку оборудования и возможную расходимость итерационного процесса. В случае отсутствия ресурсных позиций ($P_{\text{res}} = \emptyset$) данный параметр может быть опущен, и алгоритм корректно обработает чисто материальные потоки.

3.3. Топологическое ранжирование материальных позиций

Для снижения эффекта округления и приближения к минимальному потреблению сырья критически важен порядок обработки остаточных позиций. Для исключения избыточного резервирования, возникающего при операциях округления, введена функция топологического ранга $\text{Rank} : P_{\text{mat}} \rightarrow \mathbb{N}_0$, определяющая расстояние каждой материальной позиции от исходного сырья в прямой сети.

Ключевым аспектом данного подхода является исключение ресурсных позиций P_{res} из графа зависимостей. Это позволяет изолировать материальные потоки от циклических связей, характерных для оборота оборудования, и обеспечивает ацикличность графа. Ранг материальных позиций определяется по следующим правилам.

Для позиций, представляющих исходное сырье, ранг равен нулю:

$$(10) \quad \text{Rank}(p) = 0, \quad \forall p \in P_{\text{raw}}.$$

Для любой другой позиции p , являющейся выходным узлом перехода t ($p \in t^\bullet$), ранг вычисляется на основе рангов его входных материальных узлов:

$$(11) \quad \text{Rank}(p) = 1 + \max\{\text{Rank}(p') \mid p' \in {}^\bullet t \cap P_{\text{mat}}\}.$$

Вычислительная реализация функции $\text{Rank}(p)$ осуществляется путем итерационного распространения меток по графу материальных потоков. Процедура повторяется до достижения стабильного состояния вектора рангов. Поскольку материальный подграф является ациклическим, алгоритм гарантированно завершается за конечное число шагов.

В ААРПО обработка позиций выполняется в порядке строгого убывания их ранга (от готовой продукции к сырью). Такая стратегия гарантирует, что перед выполнением *виртуального срабатывания* для позиции p в ней будут консолидированы все требования от зависимых технологических переделов более высокого уровня. Это позволяет выполнить операцию округления один раз для суммарного объема потребности, что минимизирует итоговый объем закупаемого сырья и исключает накопление логистических ошибок.

Если на этапе декомпозиции позиции p обнаруживается несколько альтернативных переходов, алгоритм переходит к процедуре разрешения конфликтов, представленной ниже.

3.4. Разрешение конфликтов при выборе технологического маршрута

В условиях альтернативных технологических маршрутов одна и та же промежуточная продукция может производиться несколькими различными переходами. Формально это означает, что для остаточной позиции $p \in R$ существует множество кандидатов $T_{\text{cand}} = \{t \in T \mid W^{-1}(p, t) > 0\}$, где каждый переход способен устранить текущий остаток.

Выбор конкретного перехода для виртуального срабатывания напрямую влияет на итоговый вектор потребностей, так как различные маршруты могут иметь разные коэффициенты расхода сырья. Для обеспечения детерминированности и оптимизации результатов в ААРПО применяется иерархическая стратегия разрешения конфликтов, основанная на трех последовательных критериях.

Критерий 1: Максимизация приоритета перехода. При наличии альтернатив предпочтение отдается переходу с наибольшим значением экспертно заданного весового коэффициента $\pi(t)$. Формально выделяется подмножество переходов с максимальным приоритетом:

$$(12) \quad T_1 = \left\{ t \in T_{\text{cand}} \mid \pi(t) = \max_{t' \in T_{\text{cand}}} \pi(t') \right\}.$$

Данный критерий позволяет технологу явно указать предпочтительный путь производства через назначение приоритетов переходам.

Критерий 2: Минимизация суммарного расхода материалов. Если несколько переходов имеют одинаковый максимальный приоритет, выбирается тот, который минимизирует общее потребление ресурсов. Для этого вычисляется стоимостная функция $C(t)$:

$$(13) \quad C(t) = \sum_{p \in \bullet t} W^{-1}(p, t),$$

где $W^{-1}(p, t)$ – вес дуги (p, t) в инверсной сети, а $\bullet t$ – множество входных позиций перехода. Далее выбирается подмножество

$$(14) \quad T_2 = \left\{ t \in T_1 \mid C(t) = \min_{t' \in T_1} C(t') \right\}.$$

Этот критерий обеспечивает выбор наиболее экономичного маршрута с точки зрения материалоемкости. Критерии применяются последовательно: сначала формируется множество T_1 , затем критерий применяется только к элементам T_1 , формируя подмножество $T_2 \subseteq T_1$.

Критерий 3: Детерминированный выбор по индексу. Если после применения первых двух критериев остается несколько эквивалентных кандидатов, выбирается переход с минимальным индексом согласно заранее фиксированной нумерации переходов в модели. Это обеспечивает полную воспроизводимость результатов при повторных запусках алгоритма на идентичных входных данных.

3.5. Рекурсивный пересчет остатков

Пусть $p \in R$ – выбранная остаточная позиция с остатком $M(p) > 0$, а t – соответствующий переход согласно процедуре разрешения конфликтов. Число виртуальных срабатываний перехода определяется как

$$(15) \quad \Delta u(t) = \left\lceil \frac{M(p)}{W^{-1}(p, t)} \right\rceil.$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – оператор округления вверх до ближайшего целого, обеспечивающий полное покрытие остаточной потребности.

После этого выполняется обновление маркировки (вектора остаточных потребностей) в двух фазах:

1. **Фаза абсорбции.** Остаток в позиции p устраняется:

$$(16) \quad M_{\text{new}}(p) = \max \{0, M(p) - \Delta u(t) \cdot W^{-1}(p, t)\} = 0;$$

2. **Фаза распространения.** Маркировка всех входных материальных позиций перехода t увеличивается пропорционально $\Delta u(t)$ с учетом функции маскирования:

$$(17) \quad \forall p' \in \bullet t: \quad M_{\text{new}}(p') = M(p') + \Delta u(t) W^{-1}(p', t) \delta(p'),$$

где $\bullet t$ – множество входных позиций перехода t ; $W^{-1}(p', t)$ – веса соответствующих дуг инверсной сети; $\delta(p') \in \{0, 1\}$ – индикаторная функция маскирования.

Благодаря использованию $\delta(p')$, приращение происходит исключительно в материальных позициях, тогда как маркировка ресурсных позиций (оборудования, персонала) остается неизменной, что отражает их консервативную природу.

Процедура повторяется рекурсивно до тех пор, пока множество остаточных позиций R не станет пустым. Новые остатки могут возникать в позициях $p' \in \bullet t$ вследствие операции округления в (15), что приводит к каскадному распространению коррекции вверх по сети от нижних уровней к сырьевым позициям.

4. Экспериментальные исследования

4.1. Базовая валидация алгоритма

Для базовой верификации предложенного алгоритма ААРПО использована синтетическая Р/Т-сеть Петри, сконструированная авторами и отражающая типовые элементы дискретного производства: партионность операций, альтернативные ветви технологического маршрута, а также конкуренцию за возобновляемые ресурсы (рис. 1). Цель данного тестового примера – создать контролируруемую постановку, в которой стандартное обратное моделирование в инверсной сети приводит к появлению остаточных маркеров в промежуточных материальных позициях, что позволяет наглядно проверить корректность ААРПО.

Сеть включает три входных материальных позиции, соответствующие исходным компонентам (pRawA, pRawB, pRawC, табл. 1), две ресурсные позиции (pMachine, pPaintRoom, табл. 1) и набор технологических операций (переходов, табл. 2), длительности которых показаны над соответствующими переходами. Начальная маркировка ресурсных позиций равна 1, что моделирует наличие единственного универсального станка и одной покрасочной камеры.

Ресурсные позиции pMachine и pPaintRoom подключены к соответствующим переходам симметричными дугами с весом 1 (ресурс изымается и возвращается), что обеспечивает конкуренцию за мощности.

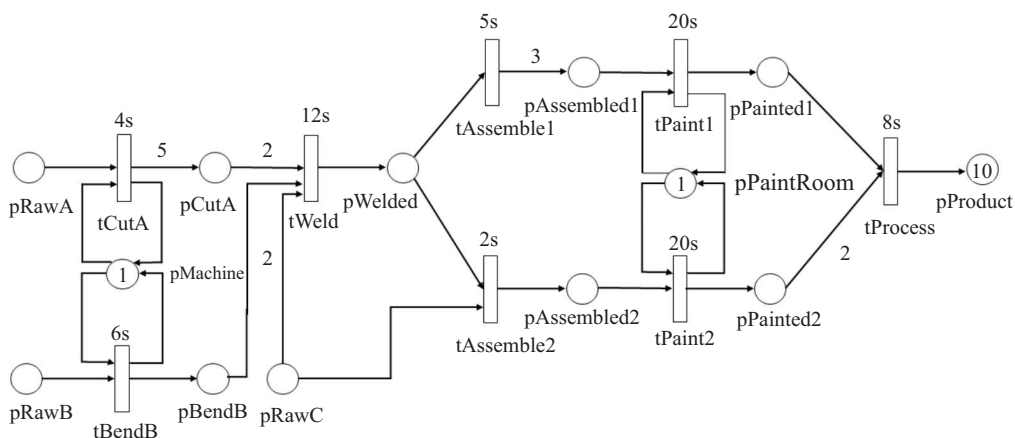


Рис. 1. Тестовая модель производственного процесса в виде Р/Т-сети Петри. Для упрощения схемы позиции вспомогательных расходуемых материалов (например, краски для tPaint1 и tPaint2) опущены, показаны только возобновляемые ресурсы (pMachine, pPaintRoom).

Таблица 1. Функциональное назначение позиций модели

Обозначение	Класс	Подкласс	Материальный объект
pRawA	P_{mat}	P_{raw}	Листовой металл
pRawB	P_{mat}	P_{raw}	Металлический профиль
pRawC	P_{mat}	P_{raw}	Крепежные элементы
pCutA	P_{mat}	P_{inter}	Панели корпуса
pBendB	P_{mat}	P_{inter}	Гнутые профили
pWelded	P_{mat}	P_{inter}	Сварной каркас
pAssembled1	P_{mat}	P_{inter}	Штампованные детали
pAssembled2	P_{mat}	P_{inter}	Основной корпус в сборе
pPainted1	P_{mat}	P_{inter}	Окрашенные детали
pPainted2	P_{mat}	P_{inter}	Окрашенный корпус
pProduct	P_{mat}	P_{prod}	Электротехнический шкаф
pMachine	P_{res}	–	Универсальный обрабатывающий центр
pPaintRoom	P_{res}	–	Покрасочная камера

Таблица 2. Параметры технологических переходов

Переход	Операция	Время	Вход / выход (веса дуг)
tCutA	Лазерная резка	4 с	$1 \cdot pRawA \rightarrow 5 \cdot pCutA$
tBendB	Гибка	6 с	$1 \cdot pRawB \rightarrow 1 \cdot pBendB$
tWeld	Сварка	12 с	$2 \cdot pCutA + 1 \cdot pBendB + 2 \cdot pRawC \rightarrow 1 \cdot pWelded$
tAssemble1	Штамповка	5 с	$1 \cdot pWelded \rightarrow 3 \cdot pAssembled1$
tAssemble2	Сборка корпуса	2 с	$1 \cdot pWelded + 1 \cdot pRawC \rightarrow 1 \cdot pAssembled2$
tPaint1	Окраска деталей	20 с	$1 \cdot pAssembled1 \rightarrow 1 \cdot pPainted1$
tPaint2	Окраска корпуса	20 с	$1 \cdot pAssembled2 \rightarrow 1 \cdot pPainted2$
tProcess	Финальная сборка	8 с	$1 \cdot pPainted1 + 2 \cdot pPainted2 \rightarrow 1 \cdot pProduct$

Технологический процесс состоит из следующих стадий:

1. Заготовительная стадия (конкуренция за ресурс). Выполняются операции раскроя листового материала и гибки профиля. Обе операции используют общий универсальный обрабатывающий центр, что формирует конкуренцию за мощности уже на входном этапе. Партионность операций и коэффициенты выпуска/потребления задаются весами дуг.

2. Сварка. Компоненты, полученные на заготовительной стадии, и крепежные элементы поступают на сварку, в результате чего формируется сварной каркас. Дискретные коэффициенты расхода на входных дугах создают предпосылки к появлению остаточных маркеров при обратном планировании.

3. Разветвление потока и промежуточная сборка. После сварки материальный поток разделяется на две параллельные ветви, моделируя альтернативные и параллельные технологические маршруты. Такая структура позволяет проверить устойчивость ААРПО к конфликтам выбора переходов.

4. Окраска (узкое место). Обе ветви используют общий ресурс покрасочной камеры. Существенно большая длительность цикла окраски по сравнению с заготовительными операциями формирует «узкое место» системы и усиливает эффект конкуренции за ресурсы.

5. Финальная операция. Окрашенные компоненты обеих ветвей объединяются в конечное изделие в несимметричной пропорции, задаваемой весами дуг. Это усиливает влияние дискретности партий и делает тест чувствительным к корректности перерасчета остатков.

Таким образом, модель на рис. 1 намеренно включает три ключевых фактора, критичных для обратного планирования: дискретные партии (веса дуг), конкуренцию за возобновляемые ресурсы (универсальный станок и покрасочная камера) и разветвление и последующее объединение потоков с несимметричными коэффициентами. Это обеспечивает репрезентативную проверку способности ААРПО устранять остаточные состояния и формировать однозначный вектор потребностей в сырье.

4.2. Постановка эксперимента

Экспериментальная проверка ААРПО выполнена на синтетической Р/Т-сети Петри (рис. 1), в качестве тестового сценария задан заказ на выпуск конечного изделия: $M_{\text{target}}(\text{pProduct}) = 10$.

Сравнение проводится для двух подходов: базовый метод – стандартная обратная имитация в инверсной сети N^{-1} по правилам срабатывания без дополнительной компенсации остатков; предложенный метод – применение ААРПО к маркировке M_{final} , полученной базовым методом, до достижения состояния $R(M) = \emptyset$.

В качестве итогового результата рассматривается вектор потребностей в сырье по позициям pRawA, pRawB, pRawC.

4.3. Результаты: наличие остаточных маркеров и корректировка ААРПО

Остаточное состояние при стандартной обратной имитации. Результат базового обратного моделирования при $M_{\text{target}}(\text{pProduct}) = 10$ представлен на рис. 2.

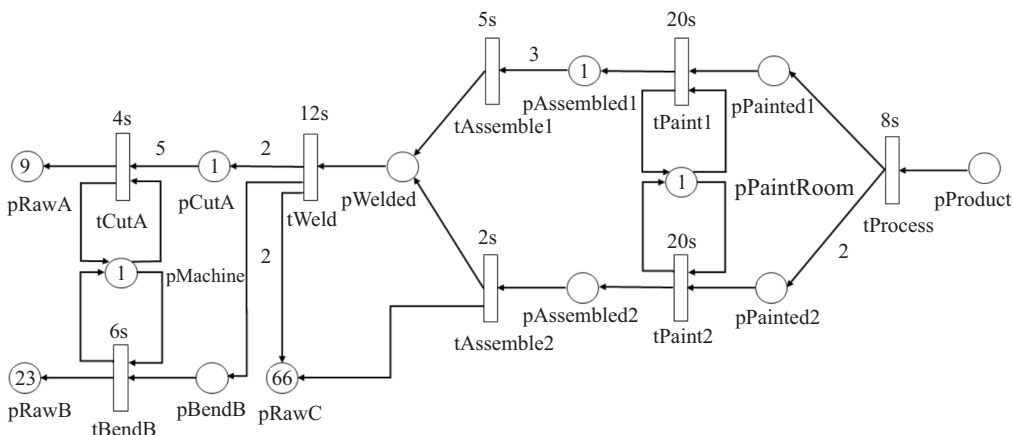


Рис. 2. Остаточные маркеры после обратной имитации.

Процесс обратного вывода останавливается при наличии положительной маркировки в промежуточных позициях, не позволяющей активировать дальнейшую декомпозицию по стандартным правилам. В частности, наблюдаются остаточные маркеры в позициях pCutA и pAssembled1 (по одному маркеру), что соответствует условию $R(M_{\text{final}}) \neq \emptyset$ из раздела 2.4. Это приводит к заниженной оценке сырьевых потребностей: $(\text{pRawA}, \text{pRawB}, \text{pRawC}) = (9, 23, 66)$.

Для устранения остаточного состояния к результату базовой имитации применен ААРПО, получен новый вектор потребностей: $(\text{pRawA}, \text{pRawB}, \text{pRawC}) = (10, 24, 68)$, при этом остаточные состояния устраняются ($R(M) = \emptyset$).

Добавка по сырью имеет вид $\Delta M_{\text{raw}} = (+1, +1, +2)$ и обусловлена накоплением дробных невязок на промежуточных переделах. Наиболее показателен ресурс pRawA: при стандартной имитации формируется потребность в 9 листах, что эквивалентно 45 заготовкам после резки (партия $1 \rightarrow 5$). Однако для корректного выполнения сварочной стадии требуется еще одна сварочная операция, что увеличивает потребность в заготовках pCutA на две единицы; из-за партионности резки это приводит к переходу на следующий целочисленный запуск и, как следствие, к увеличению заказа pRawA на +1.

Для ресурса pRawC эффект проявляется еще более наглядно из-за его использования на двух стадиях (табл. 2): при сварке и при сборке корпуса. Теоретическая потребность при выпуске 10 изделий вычисляется аналитически по структуре сети:

- 1) финальная сборка требует 10 ед. pPainted1 и 20 ед. pPainted2;
- 2) следовательно, необходимо 10 запусков покраски деталей и 20 запусков покраски корпуса;
- 3) для получения 10 ед. pAssembled1 при выпуске 3 ед. за запуск требуется $\lceil 10/3 \rceil = 4$ запуска промежуточной операции, т.е. 4 сварных каркаса;
- 4) для ветви корпуса требуется 20 каркасов и дополнительно 20 ед. pRawC;
- 5) итого каркасов 24, а потребность в pRawC равна $2 \cdot 24 + 20 = 68$.

Стандартная обратная имитация фиксирует лишь 66 единиц, поскольку остановка при $R(M_{\text{final}}) \neq \emptyset$ не позволяет полностью учесть одну дополнительную итерацию на стыке ветвей. ААРПО, выполняя рекурсивную компенсацию остатков, восстанавливает теоретически корректное значение 68, что подтверждает достижение алгоритмической замкнутости задачи обратного планирования.

4.4. Верификация механизма маскирования ресурсов

Критически важным элементом ААРПО является оператор маскирования $\delta(p)$, обеспечивающий разделение расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов. Для верификации данного механизма в модели выделено множество ресурсных позиций $P_{\text{res}} = \text{pMachine}, \text{pPaintRoom}$, удовлетворяющих условию консервативности $W(p, t) = W(t, p)$ (см. (7)). В ходе прямой

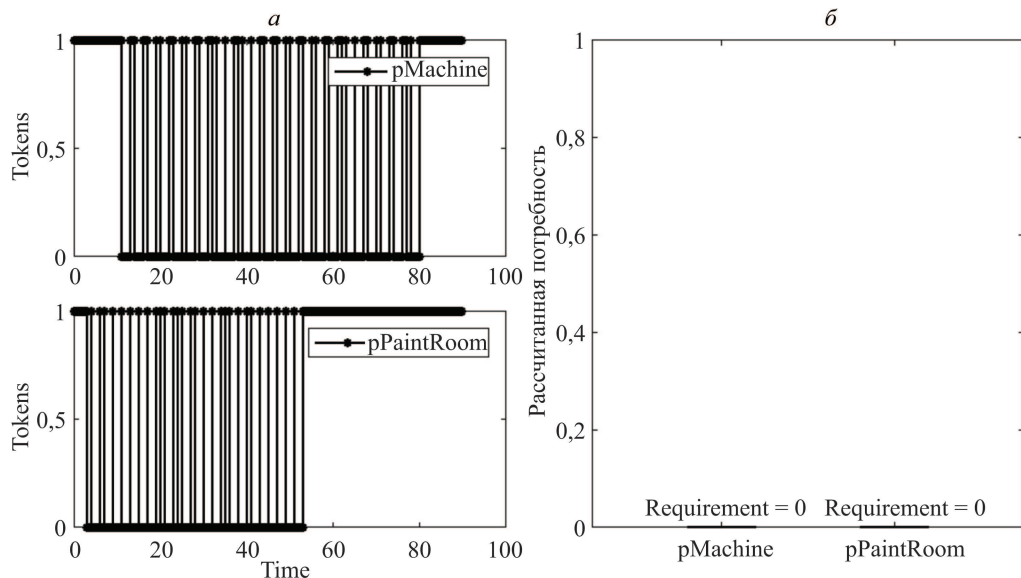


Рис. 3. Моделирование временных рядов состояния ресурсов (а) и результаты эксперимента по маскированию (б).

имитации ресурсы интенсивно используются и возвращаются в систему, что проявляется в колебаниях их маркировки между состояниями «свободен / занят» (рис. 3,а).

Далее к результату обратного вывода применяется ААРПО; итоговые значения расчетной потребности для ресурсных позиций представлены на рис. 3,б. Как видно, для pMachine и pPaintRoom алгоритм формирует нулевую потребность, т.е. $M(p) = 0$, несмотря на их активное участие в технологическом процессе.

Полученный результат подтверждает корректность определения $\delta(p)$ (см. (9)) и правила распространения, в котором приращение маркировки умножается на $\delta(p')$ (см. (17)). Тем самым исключается распространение «дефицита» через ресурсные позиции и устраняется риск формирования ложных заявок на закупку оборудования, что является принципиально важным для практического применения метода.

4.5. Выводы по результатам экспериментальных исследований

Результаты проведенных экспериментальных исследований позволяют сформулировать следующие выводы: ААРПО устраняет остаточные состояния и обеспечивает завершение обратного вывода до уровня сырья, что проявляется в систематическом устранении занижений, характерных для стандартной обратной имитации.

5. Заключение

В работе предложен метод обеспечения алгоритмической замкнутости обратного планирования потребности в материалах на основе инверсных Р/Т-сетей Петри. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

1. Формализация причины неполноты обратного вывода. Показано, что при дискретных коэффициентах (партионности) стандартная процедура обратной имитации в инверсной сети может завершаться в состоянии структурной блокировки: в промежуточных материальных позициях сохраняются остаточные маркеры, не позволяющие продолжить декомпозицию по стандартным правилам срабатывания. Это приводит к систематическому занижению оценок потребности в сырье и необходимости внешней корректировки результата.

2. Разработка алгоритма для рекурсивной ликвидации остатков. Предложен алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), реализующий виртуальное срабатывание переходов в инверсной сети и рекурсивное распространение недекомпозированных требований вверх по технологической цепочке. Метод действует на уровне маркировки, не модифицируя топологию сети, и обеспечивает достижение состояния $R = \emptyset$ за конечное число итераций при фиксированной модели.

3. Семантическая корректность за счет маскирования ресурсов. Введен оператор маскирования $\delta(p)$, обеспечивающий формальное разделение расходуемых материалов P_{mat} и возобновляемых ресурсов P_{res} . Экспериментально подтверждено, что при интенсивной занятости ресурсных позиций алгоритм не формирует «потребность» в оборудовании (нулевые значения для ресурсных узлов), предотвращая ложные заявки на закупку мощностей.

4. Роль топологического ранжирования. Использование ранга $\text{Rank}(p)$ и обработка остатков в порядке убывания ранга (от верхних переделов к сырью) обеспечивает консолидацию требований перед округлением, что снижает влияние накопления локальных «дробных» невязок и повышает воспроизводимость результатов при альтернативных маршрутах.

5. Экспериментальная демонстрация замкнутости и устойчивости результатов. На тестовой модели многостадийного производства показано, что ААРПО устраняет остаточные состояния, характерные для стандартного обратного моделирования, и приводит к детерминированному вектору M_{raw} .

Дальнейшая работа будет направлена на: строгий математический анализ эквивалентности инверсных трансформаций для моделей со сложной топологией и оценку каскадного накопления погрешностей дискретизации; расширение модели на случай неидеального выхода за счет введения коэффициентов выхода / уровня годности и параметров доли брака на операциях, с последующей адаптацией процедуры обратного вывода для расчета потребностей с учетом потерь; расширение подхода на системы с возвратными потоками (рециклинг, ремонт, повторное использование), где возникают дополнитель-

ные циклы материальных позиций; интеграцию алгоритма в процедуры динамического перепланирования при изменении портфеля заказов и ограничений по мощностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orlicky J.* Material Requirements Planning: The New Way of Life in Production and Inventory Management. N.Y.: McGraw-Hill, 1975.
2. *Vollmann T.E., Berry W.L., Whybark D.C.* Manufacturing Planning and Control Systems. 4th ed. N.Y.: McGraw-Hill, 1997.
3. *Toomey J.W.* Concepts and Logic of MRP // MRP II: Planning for Manufacturing Excellence. Boston, MA: Springer, 1996. P. 59–75.
https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4117-2_5
4. *Pinedo M.L.* Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. 6th ed. Cham: Springer, 2022.
5. *Болотов С.В., Гебель Е.С., Потехин В.В., Жуненков А.С.* Разработка метода анализа отклонений ключевых показателей эффективности производства под управлением киберфизической системы // Наука и технологии в трансформации социально-экономического ландшафта. СПб.: ЦНИТ «Астерион», 2024. С. 132–139.
6. *Ван. Д., Гудинов В.Н.* Синтез дискретно-событийных систем на примере станции распределения // ИТ. Наука. Креатив : Материалы II Междунар. форума (Омск, 13–15 мая 2025 г.). Омск. гос.техн. ун-т, 2025. С. 8–16.
7. *Cassandras C.G., Lafortune S.* Introduction to Discrete Event Systems. 3rd ed. Cham: Springer, 2021.
8. *Murata T.* Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proceedings of the IEEE. 1989. V. 77. No. 4. P. 541–580. <https://doi.org/10.1109/5.24143>
9. *Zhou M., DiCesare F.* Petri Nets and Manufacturing Systems / Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems. Boston, MA: Springer, 1993. P. 13–29. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3126-5_2
10. *Desrochers A.A., Al-Jaar R.Y.* Applications of Petri Nets in Manufacturing Systems: Modeling, Control, and Performance Analysis. IEEE Press, 1995.
11. *David R., Alla H.* Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
12. *Yang S., Zhuo J., Guo J.* Inverse Petri nets: properties and applications // IFAC Proceedings Volumes. 1991. V. 24. No. 14. P. 91–95.
[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)69330-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)69330-3)
13. *Сочнев А.Н.* Планирование ресурсов производства на основе сетевых моделей // Управление большими системами. 2020. № 86. С. 116–131.
<https://doi.org/10.25728/ubs.2020.86.5>
14. *Davidrajuh R.* Modeling Discrete-Event Systems with GPenSIM: An Introduction. Cham: Springer, 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Ю. Жиликовой.

Поступила в редакцию 23.01.2026

После доработки 17.04.2026

Принята к публикации 20.04.2026

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. А.С. СЫСОЕВ, канд. техн. наук (sysoev_as@stu.lipetsk.ru),
А.К. ПОГОДАЕВ, д-р техн. наук (pogodaev_ak@stu.lipetsk.ru),
А.В. ГАЛКИН, канд. техн. наук (galkin_av@stu.lipetsk.ru)
(Липецкий государственный технический университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПРОВЕДЕНИИ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Статья посвящена разработке алгоритмов оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности математических моделей. В основе предлагаемого подхода лежит применение метода анализа конечных изменений. Преодолевается фундаментальная проблема необъективности прямого использования теоремы Лагранжа о промежуточной точке за счет строгого планирования точек расчета в пространстве входных факторов. Синтезированы и реализованы три адаптивных алгоритма, соответствующих критериям D -, E - и A -оптимальности, которые позволяют целенаправленно строить план эксперимента для максимизации информативности данных о чувствительности модели. Эффективность предложенных подходов продемонстрирована вычислительным экспериментом с синтетической нелинейной моделью высокой размерности. Результаты показывают корректное ранжирование факторов по степени влияния на выход модели и согласуются с данными, полученными методом Морриса. Алгоритмы позволяют существенно сократить вычислительные ресурсы за счет отбора наиболее информативных точек для запуска модели.

Ключевые слова: планирование эксперимента, анализ чувствительности, анализ конечных изменений.

DOI: 10.7868/S2413977726110071

1. Введение

Одна из основных задач автоматике как области науки и техники, охватывающей теорию и практику управления техническими объектами и сложными процессами без непосредственного участия человека, – обеспечение стабильной, точной и эффективной работы систем путем разработки алгоритмов управления, основанных на математических моделях объектов. Эти модели, являясь упрощенным представлением реальности, всегда содержат в себе некоторую долю неопределенности исходных данных. В таком контексте главная цель анализа чувствительности – исследовать, как неопределенность во входных факторах влияет на неопределенность на выходе модели

и, как следствие, на надежность и качество функционирования всей системы автоматического управления. Такой анализ позволяет превратить модель из «черного ящика», выдающего точечный прогноз, в инструмент для понимания системных взаимосвязей, оценки рисков и синтеза робастных систем управления.

Современное содержание анализа чувствительности в управлении и автоматике включает решение нескольких ключевых задач:

1) Приоритезация факторов. Здесь необходимо исследовать, какие входные величины (параметры модели, управляющие воздействия, возмущения), если уменьшить их неопределенность, приведут к наибольшему повышению точности управления. Это позволяет направить усилия и ресурсы на сбор более точных данных или установку более точных датчиков именно для тех факторов, которые влияют на результат в наибольшей степени.

2) Сокращение размерности модели. Какие входы можно зафиксировать на любом значении в пределах их неопределенности без существенного влияния на выходную дисперсию? Ответ на этот вопрос позволяет упростить модель, сократив ее размерность, что является критически важным для синтеза алгоритмов адаптивного и оптимального управления сложными многомерными объектами.

3) Исследование устойчивости системы. Насколько надежны и достоверны выводы модели и работа спроектированного на ее основе регулятора при учете неопределенностей? Если выход системы кардинально меняется при небольшом изменении какого-либо входа в пределах его погрешности, то модель или система управления ненадежна для принятия решений.

Теоретические основы анализа чувствительности динамических систем были заложены в трудах отечественных ученых [1, 2], которые развили методы анализа чувствительности для задач оценки точности и робастности систем автоматического управления. Их работы наряду с исследованиями других отечественных специалистов заложили фундамент для применения этих методов при проектировании систем, устойчивых к неопределенности во входных характеристиках объекта.

Существующие методы исследования чувствительности можно разделить на несколько больших групп. Первая группа методов – дисперсионные методы – посвящена оценке вклада входов и их взаимодействий в дисперсию выходной величины модели. На данный момент один из самых мощных и популярных инструментов глобального анализа чувствительности, относящихся к указанной группе методов, – индексы Соболя, позволяющие оценить уменьшение дисперсии выхода за счет изменения значений факторов [3]. Эффективный алгоритм нахождения оценок этих мер чувствительности представлен в [4–6]. В [7] представлен альтернативный подход к вычислению индексов Соболя через условные дисперсии, а в [8] приводится расширение методов на случай коррелированных входов.

Второе направление исследований связано с построением метамоделей, представляющих собой быстрые и точные аппроксимации для проведения анализа чувствительности. В [9] предлагается использовать байесовскую модель для анализа чувствительности дорогостоящих компьютерных экспериментов, где количество запусков модели крайне ограничено. Работы [10–12] содержат описание концепции разложения с помощью полиномов для эффективного вычисления чувствительности модели.

Третье направление исследует скрининговые методы, предоставляющие быстрое и недорогое ранжирование входов модели по степени их влияния, что особенно важно для сложных моделей с большим числом факторов. Классическим подходом в этом семействе методов является метод Морриса [13], который синтезирован для оценки усредненного элементарного эффекта для каждого входа, с помощью которого можно измерить чувствительность выхода модели к малым изменениям соответствующих входов. Схожие идеи представлены и в [14–16].

Четвертое направление исследований – дистрибутивные методы – использует меры чувствительности, которые учитывают разницу между условными распределениями выхода модели и безусловным его распределением. Идея таких методов основана на том факте, что два совершенно разных распределения величины могут иметь одинаковую дисперсию, и в связи с этим стандартные дисперсионные методы могут пропустить влияние фактора на некоторые фрагменты распределения. Основные результаты в этом направлении представлены в [17] (синтезирован универсальный метод, который не делает предположений о форме распределения выхода и чувствителен к изменениям в любых частях распределения), [18] (представлен эффективный практический алгоритм для вычисления меры чувствительности), [19] (обобщает полученные результаты и дает связь между новой мерой чувствительности и классическими индексами Соболя).

Рассмотренные методы анализа чувствительности находят прямое применение в задачах управления сложными техническими объектами и системами. Системы автоматического управления часто базируются на сложных математических моделях объектов управления, идентифицированных по экспериментальным данным. К таким объектам могут относиться технологические процессы (химические реакторы, доменные печи), энергетические установки, робототехнические комплексы. Неопределенность параметров моделей, вызванная погрешностями измерений, изменением рабочих режимов или деградацией оборудования, напрямую влияет на качество управления. Поэтому анализ чувствительности выхода модели объекта управления к вариациям ее параметров и входных переменных является критически важным этапом для: синтеза робастных систем управления, оптимизации и адаптации систем диагностики и технического обслуживания путем выделения наиболее значимых входов, за которыми необходим непрерывный мониторинг, сокращения вычислительной сложности алгоритмов управления за счет фиксации мало-значимых факторов и уменьшения размерности модели.

Предлагаемый в статье метод оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности позволяет решить эти задачи с минимальными затратами на натурные или вычислительные эксперименты с моделью, что особенно актуально для дорогостоящих и критически важных технических систем.

Цель данного исследования – построение алгоритмов оптимального планирования анализа чувствительности по факторам математических моделей, основанного на применении анализа конечных изменений. Полученные результаты позволят отобрать необходимое число точек в пространстве входных величин для проведения анализа, что позволит сократить используемые ресурсы для запуска моделей.

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи анализа чувствительности, основанная на использовании метода анализа конечных изменений. В разделе 3 описываются оптимальные алгоритмы планирования эксперимента анализа чувствительности. В разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Анализ чувствительности по факторам математических моделей, основанный на применении анализа конечных изменений

Одной из ключевых форм изменения величины является ее абсолютное приращение, которое представляет собой разность между старым и новым значениями величины и показывает, на сколько изменилась величина. Для аргументов функции (факторов системы) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ абсолютное приращение выражается как

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = (x_1^1, \dots, x_n^1) - (x_1^0, \dots, x_n^0),$$

приращение функции (отклика) $f(\mathbf{x})$ представимо в виде

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = f(x_1^1, \dots, x_n^1) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0).$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то ее приращение Δf можно приближенно представить как линейную функцию от приращения аргумента $\Delta \mathbf{x}$ через дифференциал функции

$$\Delta f \approx df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \Delta x_i.$$

Таким образом, если конечное приращение аргумента $\Delta \mathbf{x}$ близко к нулю, то отношение $\Delta f / \Delta \mathbf{x}$ близко к значению функции в начальной точке интервала $\mathbf{x}^0$. Указанный факт позволяет оценивать приращение отклика через приращения его аргументов в случае малых (бесконечно малых) приращений. На практике же приращения не всегда малы, однако они конечны. В случае, когда норма приращения аргументов $\|\Delta \mathbf{x}\|$ велика, то мощным и точным

инструментом разложения приращения функции через приращения ее аргументов выступает теорема Лагранжа о промежуточной точке (конечных приращениях). Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и непрерывна на отрезке, соединяющем точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}$. Тогда существует такая точка $\mathbf{x}^\alpha$, лежащая строго между $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, что выполняется точное равенство:

$$(1) \quad \Delta f(\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\alpha) \Delta x_i,$$

где $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^0 + \alpha\Delta\mathbf{x}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Формулировка (1) говорит, что производные вычисляются в некоторой неизвестной промежуточной точке $\mathbf{x}^\alpha$. Эта точка гарантированно существует, но ее точное положение обычно неизвестно.

Для практического использования этого представления необходимо определить значение параметра α . Это приводит к задаче решения нелинейного уравнения относительно α :

$$(2) \quad g(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha\Delta\mathbf{x}) \Delta x_i - [f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0)] = 0.$$

Общая схема решения полученного уравнения (2) может быть сформулирована в виде следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Подготовка данных:

- зафиксировать начальную ($\mathbf{x}^0$) и конечную ($\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}$) точки;
- вычислить известное приращение функции $\Delta f = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0)$;
- аналитически или численно определить выражения для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Шаг 2. Выбор начального приближения α_0 :

- часто используемое начальное предположение – середина интервала $\alpha_0 = 0,5$;
- альтернативный вариант – предположение, основанное на линейной аппроксимации.

Шаг 3. Выбор итерационного метода решения. Так как вычисление производной функции $g(\alpha)$ в уравнении (2) может быть сложной или затратной операцией из-за нахождения производных, часто предпочтение отдается методам, которые не требуют явного вычисления производной целевой функции. Рекомендуется использовать методы секущих, деления отрезка пополам, Риддера или Брента.

Шаг 4. Определение критерия останова. Итерационный процесс прекращается, когда выполняется один из критериев: по невязке, по приращению корня, по достижению максимального числа итераций.

Шаг 5. Верификация решения. После нахождения α^* следует подставить его в формулу Лагранжа и убедиться, что равенство $\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}) \Delta x_i$ выполняется с приемлемой точностью.

Главным преимуществом предлагаемого подхода является то, что это единственный метод исследования чувствительности по факторам модели, который дает точное, а не приближенное, разложение общего приращения функции Δf по вкладам отдельных факторов. Также метод автоматически определяет точку в интервале от $\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{x}^1$, где наклон наиболее репрезентативен для описания всего произошедшего изменения. Таким образом, он в некоторой степени учитывает нелинейность поведения функции на рассматриваемом интервале. Стоит отметить, что подход применим к любой дифференцируемой функции независимо от величины изменения $\Delta \mathbf{x}$.

Однако предлагаемый метод анализа чувствительности не лишен и недостатков. Среди них в первую очередь стоит отметить неединственность и неопределенность промежуточной точки. Теорема (1) гарантирует существование хотя бы одной точки $\mathbf{x}^\alpha$, но не ее единственность. На пути от $\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{x}^1$ может быть несколько точек, удовлетворяющих условию. Какая из них будет найдена численным методом, зависит от начального приближения, что может делать результат необъективным. Еще одним недостатком является проблема интерпретируемости результатов вычисленной меры чувствительности на интервале. Производная в промежуточной точке является усредненной мерой на интервале, отвечающей на вопрос, каким должен был быть постоянный наклон по исследуемому фактору на всем отрезке, чтобы привести к такому же общему изменению приращения функции. Она не отвечает на вопрос, насколько чувствительна функция к изменению данного фактора в окрестности конкретной точки. Еще один недостаток – невозможность изолированного анализа. Значение параметра промежуточной точки, а значит и сама точка для вычисления производных, определяется совместным изменением всех факторов. Таким образом, предлагаемый анализ решает задачу глобального анализа чувствительности, а не локального.

Прямое применение метода Лагранжа для анализа чувствительности сталкивается с фундаментальной проблемой необъективности. Поскольку точное положение промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$, в которой вычисляются производные, неизвестно и зависит от произвольно выбранных начальных и конечных условий, результаты анализа становятся неустойчивыми. Расчетная чувствительность может кардинально меняться на нелинейных участках функции.

Чтобы устранить этот недостаток, необходимо планирование эксперимента, которое заменяет случайный выбор точек строгим правилом. Заранее определенный план, например полный факторный или центральный композиционный, равномерно покрывает область интереса, гарантируя, что анализ проводится в репрезентативной зоне, где поведение модели устойчиво. Это обеспечивает объективность, воспроизводимость результатов и позволяет це-

ленаправленно изучать вклад факторов и нелинейность отклика, превращая метод анализа конечных изменений в надежный инструмент анализа.

3. Алгоритмы оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности

Информационные матрицы представляют собой фундаментальный объект теории оптимального планирования эксперимента, обеспечивающий количественную оценку информации, содержащейся в данных относительно параметров исследуемой модели. Выбор метода построения информационной матрицы детерминирован типом модели (линейная, нелинейная, вероятностная) и целевой функцией эксперимента, такой как оценка параметров, анализ чувствительности или дискриминация конкурирующих моделей.

В контексте анализа чувствительности по факторам, информационная матрица формируется на основе градиента функции отклика $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Как показано в фундаментальных работах по планированию эксперимента [20, 21], информационная матрица, вычисленная в точке $\mathbf{x}$, определяет локальную геометрию поверхности отклика. Ее собственные значения и векторы характеризуют направленную чувствительность функции $f(\mathbf{x})$ к вариациям входных аргументов. Как показано в [22], матрица JJ^T определяет ковариацию выхода модели при заданной ковариации входа. Поскольку матрицы $J^T J$ и JJ^T обладают одинаковыми ненулевыми сингулярными числами, спектральный анализ информационной матрицы $F = J^T J$ полностью характеризует локальную чувствительность модели и направления, в которых неопределенность входов наиболее сильно влияет на неопределенность выхода.

Для заданного плана эксперимента $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ информационная матрица принимает следующий вид:

$$(3) \quad M(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N (\nabla_{\mathbf{x}} f(x_i)) (\nabla_{\mathbf{x}} f(x_i))^T,$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$ обозначает градиент функции отклика, характеризующий ее локальную чувствительность к вариациям факторов.

Свойства информационной матрицы (3):

1) Матрица $M(\mathbf{X})$ является симметричной и положительно полуопределенной.

2) Диагональные элементы матрицы $M_{jj} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_i} \right)^2$ количественно характеризуют совокупную чувствительность функции отклика к вариациям фактора x_j .

3) Недиагональные элементы $M_{jl} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}_i} \right)$ отражают совместное влияние и взаимодействие факторов x_j и x_l на выход модели.

4) Собственные векторы матрицы $M(\mathbf{X})$ определяют ортогональные направления в пространстве факторов, соответствующие наибольшей чувствительности функции $f(\mathbf{x})$.

На основе информационной матрицы может быть определена нормированная мера относительной чувствительности для фактора x_m :

$$(4) \quad S_m = \frac{M_{mm}}{\text{tr}(M(\mathbf{X}))},$$

где $\text{tr}(M(\mathbf{X}))$ – след матрицы $M(\mathbf{X})$, равный сумме ее диагональных элементов.

В теории оптимального планирования используются различные критерии, основанные на свойствах информационной матрицы $M(\mathbf{X})$:

1) D -оптимальность. План максимизирует определитель информационной матрицы:

$$(5) \quad \det(M(\mathbf{X})) \rightarrow \max.$$

Такой план минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров, обеспечивая сбалансированное изучение всех факторов.

2) A -оптимальность. План минимизирует след матрицы, обратной к информационной:

$$\text{tr}(M^{-1}(\mathbf{X})) \rightarrow \min.$$

Данный критерий направлен на минимизацию средней дисперсии оценок параметров, что является целесообразным при необходимости точной оценки каждого фактора в отдельности.

3) E -оптимальность. План максимизирует минимальное собственное значение информационной матрицы:

$$(6) \quad \lambda_{\min}(M(\mathbf{X})) \rightarrow \max.$$

Этот подход минимизирует максимальную дисперсию оценок и является эффективным для выявления слабых, но значимых эффектов.

Важно отметить, что практическая реализация алгоритмов поиска оптимальных планов требует на начальном этапе генерации невырожденных начальных планов.

Опишем алгоритмы оптимального планирования эксперимента для проведения анализа чувствительности. Требуется построить план эксперимента (набор точек в пространстве факторов), который максимизирует информативность данных для анализа чувствительности некой функции $f(\mathbf{x})$, и одновременно вычислить меры чувствительности факторов S_m . Конкретные реализации алгоритмов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Сравнительная характеристика алгоритмов оптимального планирования

Параметр	D -оптимальный алгоритм	E -оптимальный алгоритм	A -оптимальный алгоритм
Интерпретация	Минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров. Фокус на объеме доверительного эллипсоида.	Минимизирует максимальную дисперсию линейной комбинации оценок параметров. Фокус на наихудшем направлении.	Минимизирует среднюю дисперсию оценок параметров. Фокус на сумме дисперсий.
Целевой критерий	Максимизация определителя информационной матрицы: $\det(\mathbf{M}) \rightarrow \max$	Максимизация минимального собственного значения: $\lambda_{\min}(\mathbf{M}) \rightarrow \max$	Минимизация следа обратной матрицы: $\text{tr}(\mathbf{M}^{-1}) \rightarrow \min$
Инициализация плана	$\mathbf{X}_0 = \arg \max_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \det(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg \max_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \lambda_{\min}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg \min_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \text{tr}((\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1})$
Выбор новой точки	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \det(\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)$	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \lambda_{\min}(\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)$	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \text{tr}((\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)^{-1})$
Критерий сходимости	$\varepsilon_t^D = \left \frac{\det(\mathbf{M}_{t+1}) - \det(\mathbf{M}_t)}{\det(\mathbf{M}_t)} \right $	$\varepsilon_t^E = \left \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_{t+1}) - \lambda_{\min}(\mathbf{M}_t)}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_t)} \right $	$\varepsilon_t^A = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}_{t+1}^{-1}) - \text{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})}{\text{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})}$

Общие входы:

- $f(\mathbf{x})$ – исследуемая функция,
- $\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}$ – границы области планирования.

Общие управляющие параметры:

- N_0 – размер начального плана,
- $N_{\max}$ – максимальный размер финального плана,
- ε – порог сходимости для критерия останова.

Шаг 1. Инициализация:

- сгенерировать начальный план $\mathbf{X}_0$ размера N_0 , оптимальный относительно некоторого критерия $\Phi(\mathbf{M})$;
- вычислить начальную информационную матрицу

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0} \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T.$$

Шаги 2–6. Адаптивное пополнение плана. Для итерации $t = 1$ до $(N_{\max} - N_0)$:

Шаг 2. Анализ чувствительности:

- для пар точек текущего плана найти промежуточные точки $\mathbf{x}_{ij}^*$ с помощью метода анализа конечных изменений;
- для каждой промежуточной точки вычислить локальную информационную матрицу $\mathbf{M}_{ij}^*$;
- рассчитать меры чувствительности факторов S_m по формуле

$$S_m = \frac{1}{|\mathcal{X}^*|} \sum_{\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}^*} \frac{M_{mm}^*}{\text{tr}(\mathbf{M}^*)}.$$

Шаг 3. Генерация кандидатов. Создать множество точек-кандидатов $\mathbf{X}_{cand}$ для добавления в план. Кандидаты генерируются на основе мер чувствительности S_m (предпочтение областям с высокой чувствительностью) и, возможно, случайным образом для исследования всей области.

Шаг 4. Выбор новой точки. Выбрать точку $\mathbf{x}_{new}$ из множества кандидатов $\mathbf{X}_{cand}$, которая наилучшим образом повышает целевой критерий Φ информационной матрицы $\mathbf{M}_t$ после ее добавления.

Шаг 5. Обновление плана:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t \cup \mathbf{x}_{new}, \quad \mathbf{M}_{t+1} = \mathbf{M}_t + \nabla f(\mathbf{x}_{new}) \nabla f(\mathbf{x}_{new})^T.$$

Шаг 6. Проверка критерия останова.

- вычислить относительное изменение целевого функционала Φ :

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\Phi(\mathbf{M}_{t+1}) - \Phi(\mathbf{M}_t)}{\Phi(\mathbf{M}_t)} \right|,$$

– если $\varepsilon_t < \varepsilon$ или достигнут максимальный размер плана, остановиться. Иначе перейти к следующей итерации (возврат на шаг 2).

Выходы:

- финальный план точек $\mathbf{X}$;
- рассчитанные меры чувствительности факторов S_m .

Ключевое различие между конкретными алгоритмами заключается в целевом критерии оптимальности (Φ), который определяет, что значит лучший план. Этот критерий пронизывает все шаги алгоритма: инициализацию, выбор новой точки и критерий останова. Выбор между D -, E - и A -оптимальностью зависит от конкретных целей исследования и свойств модели.

Алгоритм D -оптимального планирования направлен на равномерное изучение влияния всех факторов, используется в случае, когда важна общая информативность плана, исследуется модель произвольной структуры и требуется хорошее покрытие пространства факторов. Этот алгоритм устойчив к корреляции между факторами, однако может пропускать узкие зоны резкого изменения чувствительности. Устойчивость к корреляции следует из структуры алгоритма. Геометрически определитель информационной матрицы соответствует объему доверительного эллипсоида в пространстве факторов [23]. Увеличение такого объема ведет к уменьшению неопределенности. Если между факторами присутствует сильная корреляция, то информационная матрица приближается к вырожденной, т.е. $\det(M) \rightarrow 0$, а специфика D -оптимального планирования как раз и заключается в максимизации $\det(M)$, что автоматически снижает мультиколлинеарность [20]. Улучшения алгоритма, связанные с учетом зон резкого изменения чувствительности, могут заключаться в добавлении и адаптации весов для точек с высокой чувствительностью, модификации меры чувствительности, использовании дополнительных критериев останова или комбинации с другими алгоритмами.

Алгоритм E -оптимального планирования построен с учетом избегания зон с близкой к нулевой чувствительностью и может быть использован для анализа устойчивости модели. Такой алгоритм гарантирует, что ни один фактор не будет полностью упущен в ходе анализа, однако он менее точен в оценке индивидуальной чувствительности факторов. Отбор точек в этом алгоритме происходит за счет минимизации числа обусловленности, которое в случае симметричной матрицы может быть оценено как отношение максимального собственного значения к минимальному [24], таким образом, алгоритм избегает планов, где некоторые факторы подавляются другими.

Алгоритм A -оптимального планирования рекомендуется в задачах, где важна точность в ранжировании факторов по их влиянию. Алгоритм дает сбалансированную оценку вклада каждого фактора, однако он чувствителен к масштабированию данных.

У синтезированных алгоритмов наблюдается одинаковая вычислительная сложность, равная $O(n^3)$, так как в основе лежат схожие операции обращения матриц (для A -оптимального плана), нахождения собственных значений (для E -оптимального плана), вычисления определителей (для D -оптимального плана). Наиболее высокой скоростью характеризуется алго-

ритм D -оптимального планирования, а наиболее низкой – E -оптимального планирования.

В случае, когда некоторые из факторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ имеют дискретную природу и принимают значения из конечных множеств $\mathcal{D}_j = \{d_1^{(j)}, \dots, d_{m_j}^{(j)}\}$, прямое применение теоремы Лагранжа (1) требует модификации. Формально уравнение Лагранжа

$$\Delta f(\Delta \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\alpha) \Delta x_i,$$

где $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, остается справедливым, только если найденная промежуточная точка $\mathbf{x}^\alpha$ принадлежит декартову произведению допустимых множеств $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$.

Это приводит к задаче условной оптимизации для нахождения параметра промежуточной точки:

$$(7) \quad \alpha^* = \arg \min_{\alpha \in (0,1)} \left| \Delta f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}) \Delta x_i \right|,$$

при условии $\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Поскольку условие дискретности делает множество допустимых α конечным, практическая реализация алгоритма сводится к поиску по сетке допустимых точек.

Для пары точек плана $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$ строится множество всех допустимых промежуточных точек $\mathcal{X}_{\text{cand}}$. Для каждого кандидата $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{X}_{\text{cand}}$ вычисляется величина

$$R^{(k)} = \left| \Delta f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta x_i \right|.$$

В качестве промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$ выбирается точка с минимальной невязкой:

$$\mathbf{x}^\alpha = \arg \min_{\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{X}_{\text{cand}}} R^{(k)}.$$

Полученная точка $\mathbf{x}^\alpha$ используется для вычисления градиента $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^\alpha)$ при формировании информационной матрицы (3) по стандартной схеме, описанной в разделе 3.

Стабильность координат промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$, соответствующих дискретным факторам, при анализе различных пар точек плана служит естественной мерой робастности. Если для разных пар $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$ из оптимального плана найденные промежуточные точки $\mathbf{x}^\alpha$ сильно различаются по значениям дискретных факторов, это указывает на высокую зависимость влияния этих факторов от значений других факторов, что соответствует низкой робастности модели. Стабильность положения промежуточной точки свидетельствует о предсказуемом и устойчивом влиянии дискретных факторов, что характеризует высокую робастность модели к их вариациям.

Выбор типа оптимальности зависит от целей анализа и структуры модели. Для комплексного учета разнородных требований может быть использован взвешенный сложный критерий:

$$(8) \quad \Phi_{\text{комб}}(\mathbf{M}) = \omega_D \log(\det(\mathbf{M})) + \omega_A(-\text{tr}(\mathbf{M}^{-1})) + \omega_E \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \rightarrow \max,$$

где $\omega_D, \omega_A, \omega_E \geq 0$, $\omega_D + \omega_A + \omega_E = 1$ – веса, отражающие приоритеты полноты информации, точности ранжирования и устойчивости плана соответственно. Такой подход позволяет гибко адаптировать планирование эксперимента к специфическим требованиям анализа сложных моделей в задачах управления.

4. Вычислительный эксперимент

В качестве тестовой модели построим структуру, включающую нелинейное взаимодействие двадцати трех входных переменных:

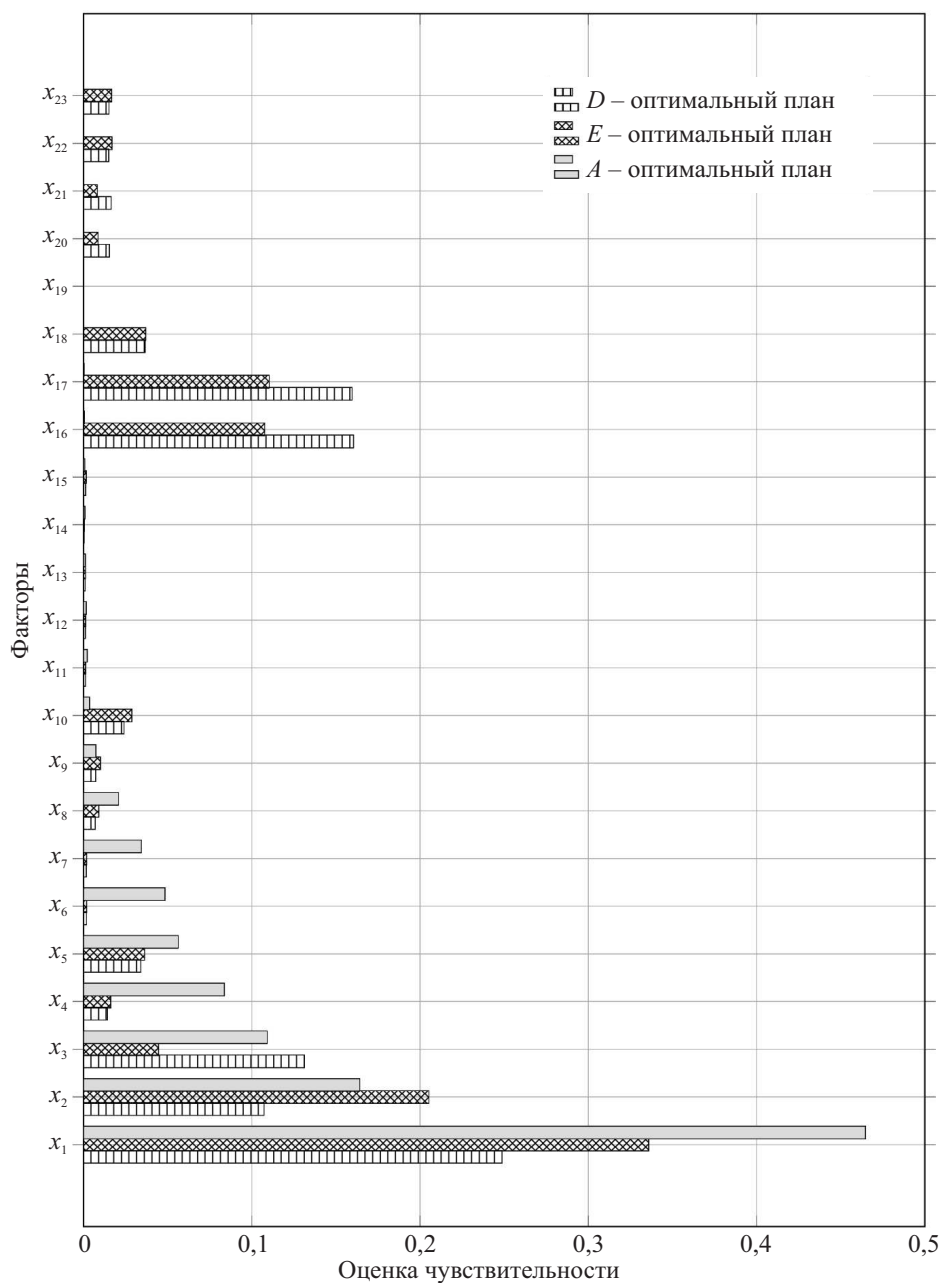
$$(9) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & 2x_1^{1,5} + 3\sin(x_2x_3) + 0,8e^{x_4/2} + 1,2\log(|x_5| + 1) + 0,6x_8x_9 - \\ & - 1,4\cos(x_{10}) + 0,4(x_{11}x_{12}x_{13})^{1/3} + 0,3\tanh(x_{14})x_{15}^2 - \\ & - 0,7(x_{16} + x_{17})^2 + 1,8\sin(0,5x_{18})\cos(0,3x_{19}) + \\ & + 0,9\sin(x_{20} + x_{21}) + 0,4(x_6x_7)^{1/4} + 0,6|x_{22} - x_{23}|^{1,5}. \end{aligned}$$

С использованием структуры модели (9) был получен набор данных, содержащий 2000 реализаций, которые впоследствии были разделены на 80% строк для обучения и 20% строк для анализа качества модели. Данная модель выбрана из-за своей сбалансированной сложности, сочетающей в себе достаточную нелинейность (наличие степенных зависимостей, тригонометрических и экспоненциальных функций) и умеренную размерность (23 входных переменных достаточно для тестирования масштабируемости предлагаемых алгоритмов, но при этом не слишком много для визуализации и интерпретации). Диапазоны изменений входов модели $[0, 1]$.

Для тестирования подходов была выбрана модель полносвязной нейронной сети, что позволит исследовать, как модель с непрерывными нелинейными преобразованиями оценивает вклад признаков. Параметры эксперимента представлены в табл. 1. В качестве модели для анализа чувствительности была выбрана модель, состоящая из одного скрытого слоя с 10 нейронами. В качестве функции активации использована логистическая функция.

Таблица 1. Параметры исследуемых нейросетевых моделей и точность аппроксимации

Архитектура модели	Метрики точности			
	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i> , %	<i>RMSE</i>	<i>R</i> ²
один слой, десять нейронов	0,080527	3,34	0,063836	0,99526
два слоя, по пять нейронов	0,220495	9,49	0,173303	0,96562
три слоя, по три нейрона	0,246480	9,43	0,187653	0,95704



Сравнение оценок чувствительности по факторам модели (9), полученных с помощью различных вариантов планирования эксперимента.

В табл. 3 представлены характеристики проведенных экспериментов – настройки управляющих параметров алгоритмов оптимального планирования, количество точек, включенных в оптимальный план, а также 5 наиболее значимых факторов по результатам проведенного анализа. На рисунке пред-

Таблица 2. Параметры численных экспериментов и сравнение полученных результатов

Тип планирования	Параметры алгоритма	Число точек в плане	Наиболее влиятельные факторы
<i>D</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	63	$S(x_1) = 0,249$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_{16}) = 0,160$
	$\theta = 0,1$		$S(x_{17}) = 0,160$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_3) = 0,131$ $S(x_2) = 0,107$
<i>E</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	38	$S(x_1) = 0,336$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_2) = 0,205$
	$\lambda = 0,1$		$S(x_{17}) = 0,110$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_{16}) = 0,108$ $S(x_3) = 0,045$
<i>A</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	52	$S(x_1) = 0,465$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_2) = 0,164$
	$\theta = 0,1$		$S(x_3) = 0,109$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_4) = 0,084$ $S(x_5) = 0,056$

ставлено сравнение оценок чувствительности по факторам модели (9), полученных с помощью различных методов оптимального планирования эксперимента. Стоит отметить, что фактор x_1 идентифицируется всеми тремя алгоритмами как наиболее чувствительный, что указывает на его безусловную значимость в модели; факторы x_2 и x_3 также стабильно входят в число наиболее значимых. Алгоритм, основанный на построении *D*-оптимального плана, выявляет факторы x_{16} и x_{17} как высокочувствительные и обнаруживает больше факторов со средней чувствительностью, что вполне соответствует ожиданию о равномерном покрытии пространства факторов, позволяющем выявить скрытые зависимости. Алгоритм, основанный на построении *E*-оптимального плана, понижает значимость факторов x_2 и x_3 , что соответствует подавлению факторов, т.е. выравнивание их вклада. Алгоритм, основанный на построении *A*-оптимального плана, обнаруживает x_4 и x_5 как влиятельные факторы, что пропущено другими подходами. Также необходимо уделить особое внимание факторам x_{16} и x_{17} , которые показывают высокую чувствительность в алгоритмах оптимального планирования. Стоит отметить, что анализ чувствительности модели (9), проведенный методом Морриса, выявляет факторы x_1 , x_2 , x_{17} , x_{16} и x_3 как наиболее влиятельные, что полностью подтверждает непротиворечивость полученных результатов.

5. Заключение

Проведенное исследование подтвердило эффективность алгоритмов оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности на основе метода анализа конечных изменений. Разработанные *D*-, *E*- и *A*-

оптимальные стратегии позволили преодолеть ключевой недостаток метода – необъективность выбора точек – и обеспечили воспроизводимое и устойчивое ранжирование факторов по степени их влияния на выход сложной нелинейной модели. Эксперименты показали, что подход значительно сокращает вычислительные затраты за счет целенаправленного отбора наиболее информативных точек для расчета модели.

Разработанные алгоритмы оптимального планирования эксперимента позволяют эффективно решать задачи анализа чувствительности для сложных моделей объектов управления. Полученные результаты ранжирования факторов по степени влияния могут быть непосредственно использованы для оптимизации систем сбора данных (датчики наиболее влиятельных факторов должны иметь повышенную точность и надежность); при проектировании систем автоматического регулирования (знание ключевых переменных позволяет обоснованно выбирать каналы управления и настраивать регуляторы); для создания цифровых двойников технических объектов (метод позволяет целенаправленно уточнять модель в тех областях пространства входов, которые наиболее важны для работы системы в штатных и аварийных режимах).

Перспективы исследования связаны с практической адаптацией метода для решения прикладных задач. Планируется разработка модификаций алгоритмов для работы с коррелированными входными параметрами, что часто встречается в реальных данных. В долгосрочной перспективе метод может лечь в основу стандартизированного подхода к планированию экспериментов для анализа чувствительности, позволяющего получать надежные результаты при ограниченном бюджете вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенбассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. М.: Энергия, 1969.
2. Бурэ Э.Г., Розенбассер Е.Н. Об исследовании чувствительности автоколебательных систем // АиТ. 1974. № 7. Р. 9–17.
3. Sobol I.M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models // Math. Model. Comput. Exp. 1993. No. 1. P. 407–414.
4. Homma T., Saltelli A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models // Reliability Engineering & System Safety. 1996. V. 52. No. 1. P. 1–17.
5. Saltelli A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices // Comput. Phys. Commun. 2002. V. 145. No. 2. P. 280–297.
6. Saltelli A., Annoni P., Azzini I., Campolongo F., Ratto M., Tarantola S. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index // Comput. Phys. Commun. 2010. V. 181. No. 2. P. 259–270.
7. Jansen M.J.W. Analysis of variance designs for model output // Comput. Phys. Commun. 1999. V. 117. No. 1–2. P. 35–43.
8. Mara T.A., Tarantola S. Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs // Reliability Engineering & System Safety. 2012. V. 107. P. 115–212.

9. *Oakley J.E., O'Hagan A.* Probabilistic sensitivity analysis of complex models: a Bayesian approach // *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*. 2004. V. 66. No. 3. P. 751–769.
10. *Sudret B.* Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions // *Reliability Engineering & System Safety*. 2008. V. 93. No. 7. P. 964–979.
11. *Crestaux T., Le Maître O., Martinez J.M.* Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis // *Reliability Engineering & System Safety*. 2009. V. 94. No. 7. P. 1161–1172.
12. *Lataniotis C., Marelli S., Sudret B.* Extending classical surrogate modeling to high dimensions through supervised dimensionality reduction: a data-driven approach // *International Journal for Uncertainty Quantification*. 2020. V. 10. No. 1. P. 1–39.
13. *Morris M.D.* Factorial sampling plans for preliminary computational experiments // *Technometrics*. 1991. V. 33. No. 2. P. 161–174.
14. *Campolongo F., Cariboni J., Saltelli A.* An effective screening design for sensitivity analysis of large models // *Environmental modelling & software*. 2007. V. 22. No. 10. P. 1509–1518.
15. *Ge Q., Menendez M.* Extending Morris method for qualitative global sensitivity analysis of models with dependent inputs // *Reliability Engineering & System Safety*. 2017. V. 162. P. 28–39.
16. *Sin G., Gernaey K.V.* Improving the Morris method for sensitivity analysis by scaling the elementary effects // *Computer Aided Chemical Engineering*. 2009. V. 26. P. 925–930.
17. *Borgonovo E.* A new uncertainty importance measure // *Reliability Engineering & System Safety*. 2007. V. 92. No. 6. P. 771–784.
18. *Plischke E., Borgonovo E., Smith C.L.* Global sensitivity measures from given data // *European Journal of Operational Research*. 2013. V. 226. No. 3. P. 536–550.
19. *Da Veiga S.* Global sensitivity analysis with dependence measures // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2015. V. 85. No. 7. P. 1283–1305.
20. *Box G.P.E., Hunter J.S., Hunter W.G.* Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery. N.Y.: John Wiley & Sons, 2005.
21. *Montgomery D.C.* Design and analysis of experiments. New York: John Wiley & Sons, 2017.
22. *Smith R.C.* Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications. N.Y.: SIAM, 2013.
23. *Pukelsheim F.* Optimal Design of Experiments. New York: SIAM, 2006.
24. *Boyd S.P., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004.

Статъя представена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 23.09.2025

После доработки 27.01.2026

Принята к публикации 28.02.2026

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

- Суменков О.Ю., Тарабукин И.М., Гусев С.В., Фридман Л.М. Приложение
Ляпуновского синтеза к релейному управлению классом возмущенных ли-
нейных систем с неопределенными периодическими коэффициентами 3

Нелинейные системы

- Козорез Д.А., Сиротин А.Н., Сыпало К.И. О некоторых специальных свой-
ствах управляемых коммутативных билинейных систем с дискретным вре-
менем 25
- Фуртат И.Б. Интегральная устойчивость динамических систем: метод взве-
щенного фазового объема и эллипсоидальная аппроксимация 43

Стохастические системы

- Мелощникова Н.П., Фёдорова Е.А. Асимптотический анализ системы массо-
вого обслуживания с повторными вызовами, ММРР-поток и катастро-
фами 71

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Тужилин М.А. Серия инвариантных характеристик реальных сетей 84

Управление в технических системах

- Ван Д., Гебель Е.С., Арсеньев Д.Г. Метод планирования потребностей в мате-
риалах для гибких производственных систем с ограниченными ресурсами
на основе инверсных сетей Петри 98

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Сысоев А.С., Погодаев А.К., Галкин А.В. Оптимальное планирование экспе-
римента при проведении анализа чувствительности по факторам матема-
тических моделей 114

C O N T E N T S

Linear Systems

- Sumenkov O.Yu., Tarabukin I.M., Gusev S.V., Fridman L.M.** Relay Control of a Class of Disturbed Linear Systems with Uncertain Periodic Coefficients: A Lyapunov Function Based Approach 3

Nonlinear Systems

- Kozorez D.A., Sirotin A.N., Sypalo K.I.** On Some Special Properties of Controllable Commutative Bilinear Discrete-Time Systems 25
- Furtat I.B.** Integral Stability of Dynamic Systems: Weighted Phase Volume Method and Ellipsoidal Approximation 43

Stochastic Systems

- Meloshnikova N.P., Fedorova E.A.** Asymptotic Analysis of a Retrieval Queueing System with Markovian Modulated Arrival Process and Catastrophes 71

Robust, Adaptive and Network Control

- Tuzhilin M.A.** A Series of Real Networks Invariants 84

Control in Technical Systems

- Wang D., Gebel E.S., Arsenyev D.G.** Material Requirements Planning Method for Resource-Constrained Flexible Manufacturing Systems Based on Inverse Petri Nets 98

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Sysoev A.S., Pogodaev A.K., Galkin A.V.** Optimal Design of Experiment for Sensitivity Analysis According to Factors of Mathematical Model 114