

Управление в технических системах

© 2026 г. Д. ВАН (van6.d@edu.spbstu.ru),

Е.С. ГЕБЕЛЬ, канд. техн. наук (gebel_es@spbstu.ru),

Д.Г. АРСЕНЬЕВ, д-р техн. наук (vicerector.int@spbstu.ru)

(Высшая школа управления кибер-физическими системами, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого)

МЕТОД ПЛАНИРОВАНИЯ ПОТРЕБНОСТЕЙ В МАТЕРИАЛАХ ДЛЯ ГИБКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ НА ОСНОВЕ ИНВЕРСНЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ¹

В работе решается задача обеспечения алгоритмической замкнутости процесса обратного планирования материальных потребностей в дискретных производственных системах на основе инверсных сетей Петри. Предложен алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), реализующий формальную процедуру виртуального срабатывания переходов с топологическим ранжированием позиций и маскированием ресурсных узлов. Алгоритм обеспечивает полную декомпозицию материальных потоков до множества исходных компонентов без изменения структуры сети и корректно различает расходуемые материалы и возобновляемые ресурсы. Экспериментальная верификация на модели многостадийного сборочного производства в среде GPenSIM показала полное совпадение расчетных потребностей с теоретическими значениями, подтверждая достижение алгоритмической замкнутости и исключение необходимости экспертной интерпретации.

Ключевые слова: дискретно-событийные системы, инверсная сеть Петри, планирование потребностей в материалах, проблема остаточных маркеров, алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков, маскирование ресурсов, GPenSIM.

DOI: 10.7868/S2413977726110063

1. Введение

Планирование потребности в материалах (Material Requirements Planning, MRP) составляет фундаментальную задачу управления дискретными производственными системами, определяя эффективность использования ресурсов и устойчивость выполнения производственной программы [1, 2]. Традици-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Стипендии правительства Китая и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-674 от 20 августа 2025 г.).

онные системы MRP и модули ERP базируются на детерминированных ведомостях материалов и фиксированных нормах расхода, реализуя алгоритм разузлования изделий для расчета зависимого спроса [1, 3]. Данный подход неявно предполагает бесконечную доступность производственных мощностей и игнорирует структурные ограничения реальных систем. В условиях параллельных операций и конкуренции за ресурсы стандартная логика MRP требует сложного согласования с задачами календарного планирования [2, 4], что снижает автоматизации принятия решений. В условиях перехода к киберфизическим системам проблема анализа отклонений и управления эффективно становится особенно острой [5], требуя более совершенных инструментов моделирования.

В последние десятилетия существенное внимание исследователей привлекают формальные модели дискретно-событийных систем [6, 7], прежде всего сети Петри [8, 9], обеспечивающие строгое математическое описание динамики производства с учетом параллелизма, синхронизации и ресурсных конфликтов. Сети Петри предоставляют унифицированный математический аппарат для моделирования материальных и ресурсных потоков, анализа достижимости состояний и синтеза стратегий управления [10, 11]. Особый интерес представляет обратная задача: определение начальных потребностей в сырье на основе заданного целевого выпуска продукции.

Формальные основы этого направления заложены в работах по инверсным сетям Петри [12], где обращение матрицы инцидентности позволяет аналитически связать целевую и начальную маркировки. Данный подход был адаптирован для задач MRP в [13], где предложено использовать инверсные сети для визуализации результатов планирования, включая построение диаграмм Ганта. Однако этот метод не решает проблему остаточных маркеров, возникающих при некратности размеров партий объема заказа, что вынуждает прибегать к ручной корректировке результатов. Наличие таких остатков в промежуточных позициях приводит к состоянию структурной блокировки: алгоритм останавливается, не достигнув уровня исходного сырья. В результате процесс планирования теряет алгоритмическую замкнутость, а часть реальных требований остается скрытой в виде незавершенного производства.

Анализ литературы показывает, что задача автоматического устранения остаточных состояний при обратном планировании в дискретно-событийных моделях с некратными партиями остается открытой. Ключевыми требованиями к решению являются: сохранение структуры исходной модели сети Петри; корректное различение расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов; возможность прямой интеграции в имитационную среду без перехода к внешним оптимизационным постановкам; обеспечение алгоритмической замкнутости, т.е. обеспечение полной декомпозиции материальных потоков до уровня исходного сырья за конечное число шагов.

Целью данной работы является разработка алгоритма автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), обеспечивающего полную декомпозицию материальных потоков в инверсных сетях Петри. Предложенный алгоритм реализует процедуру виртуального срабатывания переходов с топологическим ранжированием материальных позиций и маскированием ресурсных узлов. В отличие от метода [13] ААРПО автоматически устраняет все остаточные маркеры и обеспечивает последовательную декомпозицию материальных потоков до множества исходных компонентов без участия эксперта. При этом сохраняется семантика модели и корректно учитывается различие между материальными и ресурсными позициями. Алгоритм реализован в среде GPenSIM [14] и верифицирован на модели многостадийного сборочного производства в условиях конкуренции за мощности.

2. Постановка задачи и математическое моделирование

2.1. Формализация производственной системы

Рассматривается дискретная производственная система, технологическая структура которой задана в виде Р/Т-сети Петри [8]. Модель используется для формального описания материальных потоков, технологических операций и возобновляемых ресурсов в процессе производства. Предполагается, что структура изделия и технологические маршруты заданы детерминированно, а все операции выполняются дискретными партиями с фиксированными коэффициентами потребления. Формально производственная система описывается сетью Петри:

$$(1) \quad N = \langle P, T, F, W, M_0 \rangle,$$

где $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ – конечное множество позиций, моделирующих буферы, складские зоны и ресурсы; $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ – конечное множество переходов, представляющих технологические операции; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – множество ориентированных дуг, задающее структуру сети; $W : F \rightarrow \mathbb{N}^+$ – функция весов дуг, определяющая коэффициенты расхода и выпуска партий; $M_0 : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ – начальная маркировка, задающая распределение материальных запасов и доступность ресурсов.

Динамика сети описывается стандартным уравнением состояния в векторной форме:

$$(2) \quad M_{k+1} = M_k + Bu_k,$$

где k – номер дискретного шага; $M_k \in \mathbb{N}_0^n$ – вектор маркировки на шаге k ; $u_k \in \mathbb{N}_0^m$ – вектор срабатываний переходов (количество запусков каждого перехода); $B \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ – матрица инцидентности сети Петри, определяемая как $B = B^+ - B^-$, где $B^-(p, t) = W(p, t)$ для $(p, t) \in F$, $B^+(p, t) = W(t, p)$ для $(t, p) \in F$, и 0 в остальных случаях.

2.2. Инверсная сеть Петри для обратного планирования

Для задач планирования потребности в материалах рассматривается обратная постановка: задана целевая маркировка $M_{\text{target}} : P \rightarrow \mathbb{N}_0$, определяющая требуемый объем выпуска готовой продукции, необходимо определить начальную маркировку $M_{\text{raw}} : P_{\text{raw}} \rightarrow \mathbb{N}_0$, задающую потребности в исходном сырье.

Для решения данной задачи вводится инверсная сеть Петри:

$$(3) \quad N^{-1} = (P, T, F^{-1}, W^{-1}, M_{\text{target}}),$$

где $F^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\}$ – инверсное отношение инцидентности (все дуги меняют направление); $W^{-1}(y, x) = W(x, y)$ для всех $(x, y) \in F$ – инверсная функция весов (веса дуг сохраняются); M_{target} – целевая маркировка, используемая как начальное состояние для обратного вывода.

Матрица инцидентности инверсной сети связана с матрицей прямой сети соотношением

$$(4) \quad B^{-1} = B^{-1+} - B^{-1-} = B^{-} - B^{+} = -B.$$

Обратное моделирование в N^{-1} , начиная с M_{target} , позволяет последовательно восстанавливать потребности в полуфабрикатах и материалах, двигаясь от конечной продукции к исходному сырью, при сохранении структурного соответствия между сетью и технологическим процессом.

2.3. Таксономия позиций

Критически важным элементом предлагаемой модели является введение строгой таксономии множества позиций P , обеспечивающей корректность обратного вывода в инверсной сети. Для этого вводится бинарное разбиение

$$(5) \quad P = P_{\text{mat}} \cup P_{\text{res}}, \quad P_{\text{mat}} \cap P_{\text{res}} = \emptyset.$$

Материальные позиции P_{mat} интерпретируются как расходуемые и производимые объекты: сырье, заготовки, полуфабрикаты, готовая продукция. Такие позиции участвуют в трансформационных процессах, и токены в них представляют реальные материальные запасы. Граничные классы материальных позиций определяются:

$$(6) \quad \begin{aligned} P_{\text{raw}} &= \{p \in P_{\text{mat}} \mid \bullet p = \emptyset\} && \text{(исходное сырье),} \\ P_{\text{prod}} &= \{p \in P_{\text{mat}} \mid p^{\bullet} = \emptyset\} && \text{(готовая продукция),} \\ P_{\text{inter}} &= P_{\text{mat}} \setminus (P_{\text{raw}} \cup P_{\text{prod}}) && \text{(промежуточная продукция),} \end{aligned}$$

где $\bullet p = \{t \in T \mid (t, p) \in F\}$ – множество входных переходов позиции p (производителей в прямой сети), а $p^{\bullet} = \{t \in T \mid (p, t) \in F\}$ – множество выходных переходов (потребителей).

Ресурсные позиции P_{res} моделируют возобновляемые производственные мощности: станки, оборудование, рабочие места, персонал. Такие позиции являются консервативными: токены в них циркулируют, отражая занятость и освобождение ресурса, но не потребляются безвозвратно. Формально для каждой ресурсной позиции $p \in P_{\text{res}}$ выполняется условие:

$$(7) \quad \forall t \in \bullet p \cup p^\bullet : W(p, t) = W(t, p).$$

Это означает, что каждое срабатывание перехода, забирающее токен ресурса на входе, возвращает его на выходе с тем же весом, обеспечивая сохранение суммарной маркировки ресурсной позиции во времени.

2.4. Проблема остаточных маркеров

Принципиальная сложность задачи обратного планирования связана с дискретностью производственных партий. В реальных системах веса дуг, задающие коэффициенты расхода и выпуска, как правило, не согласованы с целевым объемом заказа и не являются его делителями. Для формального описания этого эффекта введем множество остаточных позиций R :

$$(8) \quad R = \left\{ p \in P_{\text{inter}} \mid 0 < M_{\text{final}}(p) < \min_{t \in T(p)} W^{-1}(p, t) \right\},$$

где $T(p) = \{t \in T \mid W^{-1}(p, t) > 0\}$ – множество выходных переходов позиции p в инверсной сети; $M_{\text{final}} : P \rightarrow \mathbb{N}_0$ – маркировка, полученная в результате обратной имитации до момента остановки; $W^{-1}(p, t)$ – вес дуги $p \rightarrow t$ в инверсной сети.

Наличие таких позиций означает, что количество маркеров в них положительно, но недостаточно для активации ни одного исходящего перехода (в логике прямой сети). В терминах инверсной сети это означает структурную блокировку: алгоритм не может продолжить декомпозицию материальных потоков дальше вверх по технологической цепи, так как ни один переход-производитель не может быть активирован согласно стандартным правилам срабатывания.

2.5. Формулировка задачи

Наличие множества остаточных позиций $R \neq \emptyset$ означает, что план материальных потребностей является неполным: часть реальных требований остается скрытой в виде незавершенного производства на промежуточных стадиях и не декомпозируется до уровня исходного сырья P_{raw} . В существующих подходах данная проблема компенсируется ручной экспертной корректировкой результатов моделирования, что снижает уровень автоматизации, воспроизводимости и надежности планирования.

Постановка задачи. Для заданной инверсной сети Петри N^{-1} и целевой маркировки M_{target} требуется разработать автоматическую процедуру пересчета маркировки M_{final} , обладающую следующими свойствами:

1. **Алгоритмическая полнота:** достижение состояния $R = \emptyset$, при котором все промежуточные маркеры полностью декомпозированы до уровня сырья;
2. **Инвариантность структуры:** сохранение исходной топологии сети Петри без введения дополнительных позиций или переходов;
3. **Ресурсная семантика:** корректное разграничение расходуемых материалов (P_{mat}) и возобновляемых ресурсов (P_{res}) для исключения ложных запросов на оборудование;
4. **Сходимость и детерминизм:** завершение расчета за конечное число шагов с формированием однозначного вектора потребностей;
5. **Программная интеграция:** возможность прямой реализации в среде GPenSIM без обращения к внешним солверам.

Решение данной задачи обеспечит переход от открытого процесса планирования (требующего человеческого участия) к замкнутому, полностью автоматизированному алгоритму обратного вывода на основе инверсных сетей Петри.

3. Разработка алгоритма автоматического устранения остаточных состояний

Для разрешения проблемы незамкнутости, сформулированной в разделе 2, предлагается алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО). Алгоритм применяется после выполнения стандартной процедуры обратного моделирования и использует полученную маркировку M_{final} в качестве исходного состояния для коррекции.

3.1. Ключевая идея алгоритма

Алгоритм интерпретирует остаточные маркеры в промежуточных материальных позициях ($p \in R$) как недекомпозированные требования, которые необходимо последовательно распространить вверх по технологической структуре до уровня исходного сырья (P_{raw}). При этом алгоритм не модифицирует структуру сети Петри и не вводит внешних оптимизационных моделей, а действует исключительно на уровне маркировки, используя правила *виртуального срабатывания* переходов.

Под *виртуальным срабатыванием* понимается формальная процедура обновления маркировки, имитирующая запуск перехода в обратном направлении (в инверсной сети) с целью устранения остатка в выходной позиции. В отличие от стандартного срабатывания *виртуальное срабатывание* не требует выполнения предусловий (достаточности входных маркеров), а принудительно рассчитывает необходимую кратность запусков на основе операции округления вверх.

3.2. Маскирование ресурсных позиций

Для корректного различения расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов вводится индикаторная функция маскирования

$$(9) \quad \delta(p) = \begin{cases} 1, & p \in P_{\text{mat}}, \\ 0, & p \in P_{\text{res}}. \end{cases}$$

Функция $\delta(p)$ используется для блокирования распространения остаточных требований через ресурсные позиции. Это обеспечивает инвариантность алгоритма по отношению к циклам использования оборудования и предотвращает ложное формирование потребностей в средствах производства. Физически это означает, что при виртуальном срабатывании перехода потребность в токенах из ресурсных позиций не включается в итоговый расчет материальных потребностей, поскольку ресурс не расходуется, а лишь временно используется. Формально множество P_{res} задается на этапе инициализации алгоритма как входной параметр. Отсутствие данного параметра в случае наличия ресурсных позиций в модели может привести к критическим логическим ошибкам: циклические потоки ресурсов будут восприняты алгоритмом как материальные, что вызовет ложное формирование заказов на закупку оборудования и возможную расходимость итерационного процесса. В случае отсутствия ресурсных позиций ($P_{\text{res}} = \emptyset$) данный параметр может быть опущен, и алгоритм корректно обработает чисто материальные потоки.

3.3. Топологическое ранжирование материальных позиций

Для снижения эффекта округления и приближения к минимальному потреблению сырья критически важен порядок обработки остаточных позиций. Для исключения избыточного резервирования, возникающего при операциях округления, введена функция топологического ранга $\text{Rank} : P_{\text{mat}} \rightarrow \mathbb{N}_0$, определяющая расстояние каждой материальной позиции от исходного сырья в прямой сети.

Ключевым аспектом данного подхода является исключение ресурсных позиций P_{res} из графа зависимостей. Это позволяет изолировать материальные потоки от циклических связей, характерных для оборота оборудования, и обеспечивает ацикличность графа. Ранг материальных позиций определяется по следующим правилам.

Для позиций, представляющих исходное сырье, ранг равен нулю:

$$(10) \quad \text{Rank}(p) = 0, \quad \forall p \in P_{\text{raw}}.$$

Для любой другой позиции p , являющейся выходным узлом перехода t ($p \in t^\bullet$), ранг вычисляется на основе рангов его входных материальных узлов:

$$(11) \quad \text{Rank}(p) = 1 + \max\{\text{Rank}(p') \mid p' \in {}^\bullet t \cap P_{\text{mat}}\}.$$

Вычислительная реализация функции $\text{Rank}(p)$ осуществляется путем итерационного распространения меток по графу материальных потоков. Процедура повторяется до достижения стабильного состояния вектора рангов. Поскольку материальный подграф является ациклическим, алгоритм гарантированно завершается за конечное число шагов.

В ААРПО обработка позиций выполняется в порядке строгого убывания их ранга (от готовой продукции к сырью). Такая стратегия гарантирует, что перед выполнением *виртуального срабатывания* для позиции p в ней будут консолидированы все требования от зависимых технологических переделов более высокого уровня. Это позволяет выполнить операцию округления один раз для суммарного объема потребности, что минимизирует итоговый объем закупаемого сырья и исключает накопление логистических ошибок.

Если на этапе декомпозиции позиции p обнаруживается несколько альтернативных переходов, алгоритм переходит к процедуре разрешения конфликтов, представленной ниже.

3.4. Разрешение конфликтов при выборе технологического маршрута

В условиях альтернативных технологических маршрутов одна и та же промежуточная продукция может производиться несколькими различными переходами. Формально это означает, что для остаточной позиции $p \in R$ существует множество кандидатов $T_{\text{cand}} = \{t \in T \mid W^{-1}(p, t) > 0\}$, где каждый переход способен устранить текущий остаток.

Выбор конкретного перехода для виртуального срабатывания напрямую влияет на итоговый вектор потребностей, так как различные маршруты могут иметь разные коэффициенты расхода сырья. Для обеспечения детерминированности и оптимизации результатов в ААРПО применяется иерархическая стратегия разрешения конфликтов, основанная на трех последовательных критериях.

Критерий 1: Максимизация приоритета перехода. При наличии альтернатив предпочтение отдается переходу с наибольшим значением экспертно заданного весового коэффициента $\pi(t)$. Формально выделяется подмножество переходов с максимальным приоритетом:

$$(12) \quad T_1 = \left\{ t \in T_{\text{cand}} \mid \pi(t) = \max_{t' \in T_{\text{cand}}} \pi(t') \right\}.$$

Данный критерий позволяет технологу явно указать предпочтительный путь производства через назначение приоритетов переходам.

Критерий 2: Минимизация суммарного расхода материалов. Если несколько переходов имеют одинаковый максимальный приоритет, выбирается тот, который минимизирует общее потребление ресурсов. Для этого вычисляется стоимостная функция $C(t)$:

$$(13) \quad C(t) = \sum_{p \in \bullet t} W^{-1}(p, t),$$

где $W^{-1}(p, t)$ – вес дуги (p, t) в инверсной сети, а $\bullet t$ – множество входных позиций перехода. Далее выбирается подмножество

$$(14) \quad T_2 = \left\{ t \in T_1 \mid C(t) = \min_{t' \in T_1} C(t') \right\}.$$

Этот критерий обеспечивает выбор наиболее экономичного маршрута с точки зрения материалоемкости. Критерии применяются последовательно: сначала формируется множество T_1 , затем критерий применяется только к элементам T_1 , формируя подмножество $T_2 \subseteq T_1$.

Критерий 3: Детерминированный выбор по индексу. Если после применения первых двух критериев остается несколько эквивалентных кандидатов, выбирается переход с минимальным индексом согласно заранее фиксированной нумерации переходов в модели. Это обеспечивает полную воспроизводимость результатов при повторных запусках алгоритма на идентичных входных данных.

3.5. Рекурсивный пересчет остатков

Пусть $p \in R$ – выбранная остаточная позиция с остатком $M(p) > 0$, а t – соответствующий переход согласно процедуре разрешения конфликтов. Число виртуальных срабатываний перехода определяется как

$$(15) \quad \Delta u(t) = \left\lceil \frac{M(p)}{W^{-1}(p, t)} \right\rceil.$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – оператор округления вверх до ближайшего целого, обеспечивающий полное покрытие остаточной потребности.

После этого выполняется обновление маркировки (вектора остаточных потребностей) в двух фазах:

1. **Фаза абсорбции.** Остаток в позиции p устраняется:

$$(16) \quad M_{\text{new}}(p) = \max \{0, M(p) - \Delta u(t) \cdot W^{-1}(p, t)\} = 0;$$

2. **Фаза распространения.** Маркировка всех входных материальных позиций перехода t увеличивается пропорционально $\Delta u(t)$ с учетом функции маскирования:

$$(17) \quad \forall p' \in \bullet t: \quad M_{\text{new}}(p') = M(p') + \Delta u(t) W^{-1}(p', t) \delta(p'),$$

где $\bullet t$ – множество входных позиций перехода t ; $W^{-1}(p', t)$ – веса соответствующих дуг инверсной сети; $\delta(p') \in \{0, 1\}$ – индикаторная функция маскирования.

Благодаря использованию $\delta(p')$, приращение происходит исключительно в материальных позициях, тогда как маркировка ресурсных позиций (оборудования, персонала) остается неизменной, что отражает их консервативную природу.

Процедура повторяется рекурсивно до тех пор, пока множество остаточных позиций R не станет пустым. Новые остатки могут возникать в позициях $p' \in \bullet t$ вследствие операции округления в (15), что приводит к каскадному распространению коррекции вверх по сети от нижних уровней к сырьевым позициям.

4. Экспериментальные исследования

4.1. Базовая валидация алгоритма

Для базовой верификации предложенного алгоритма ААРПО использована синтетическая Р/Т-сеть Петри, сконструированная авторами и отражающая типовые элементы дискретного производства: партионность операций, альтернативные ветви технологического маршрута, а также конкуренцию за возобновляемые ресурсы (рис. 1). Цель данного тестового примера – создать контролируруемую постановку, в которой стандартное обратное моделирование в инверсной сети приводит к появлению остаточных маркеров в промежуточных материальных позициях, что позволяет наглядно проверить корректность ААРПО.

Сеть включает три входных материальных позиции, соответствующие исходным компонентам (pRawA, pRawB, pRawC, табл. 1), две ресурсные позиции (pMachine, pPaintRoom, табл. 1) и набор технологических операций (переходов, табл. 2), длительности которых показаны над соответствующими переходами. Начальная маркировка ресурсных позиций равна 1, что моделирует наличие единственного универсального станка и одной покрасочной камеры.

Ресурсные позиции pMachine и pPaintRoom подключены к соответствующим переходам симметричными дугами с весом 1 (ресурс изымается и возвращается), что обеспечивает конкуренцию за мощности.

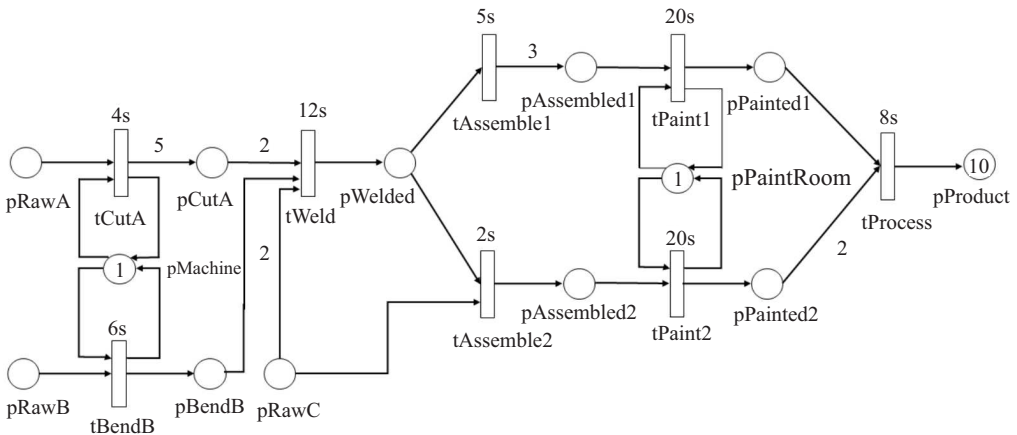


Рис. 1. Тестовая модель производственного процесса в виде Р/Т-сети Петри. Для упрощения схемы позиции вспомогательных расходуемых материалов (например, краски для tPaint1 и tPaint2) опущены, показаны только возобновляемые ресурсы (pMachine, pPaintRoom).

Таблица 1. Функциональное назначение позиций модели

Обозначение	Класс	Подкласс	Материальный объект
pRawA	P_{mat}	P_{raw}	Листовой металл
pRawB	P_{mat}	P_{raw}	Металлический профиль
pRawC	P_{mat}	P_{raw}	Крепежные элементы
pCutA	P_{mat}	P_{inter}	Панели корпуса
pBendB	P_{mat}	P_{inter}	Гнутые профили
pWelded	P_{mat}	P_{inter}	Сварной каркас
pAssembled1	P_{mat}	P_{inter}	Штампованные детали
pAssembled2	P_{mat}	P_{inter}	Основной корпус в сборе
pPainted1	P_{mat}	P_{inter}	Окрашенные детали
pPainted2	P_{mat}	P_{inter}	Окрашенный корпус
pProduct	P_{mat}	P_{prod}	Электротехнический шкаф
pMachine	P_{res}	–	Универсальный обрабатывающий центр
pPaintRoom	P_{res}	–	Покрасочная камера

Таблица 2. Параметры технологических переходов

Переход	Операция	Время	Вход / выход (веса дуг)
tCutA	Лазерная резка	4 с	$1 \cdot pRawA \rightarrow 5 \cdot pCutA$
tBendB	Гибка	6 с	$1 \cdot pRawB \rightarrow 1 \cdot pBendB$
tWeld	Сварка	12 с	$2 \cdot pCutA + 1 \cdot pBendB + 2 \cdot pRawC \rightarrow 1 \cdot pWelded$
tAssemble1	Штамповка	5 с	$1 \cdot pWelded \rightarrow 3 \cdot pAssembled1$
tAssemble2	Сборка корпуса	2 с	$1 \cdot pWelded + 1 \cdot pRawC \rightarrow 1 \cdot pAssembled2$
tPaint1	Окраска деталей	20 с	$1 \cdot pAssembled1 \rightarrow 1 \cdot pPainted1$
tPaint2	Окраска корпуса	20 с	$1 \cdot pAssembled2 \rightarrow 1 \cdot pPainted2$
tProcess	Финальная сборка	8 с	$1 \cdot pPainted1 + 2 \cdot pPainted2 \rightarrow 1 \cdot pProduct$

Технологический процесс состоит из следующих стадий:

1. Заготовительная стадия (конкуренция за ресурс). Выполняются операции раскроя листового материала и гибки профиля. Обе операции используют общий универсальный обрабатывающий центр, что формирует конкуренцию за мощности уже на входном этапе. Партиционность операций и коэффициенты выпуска/потребления задаются весами дуг.

2. Сварка. Компоненты, полученные на заготовительной стадии, и крепежные элементы поступают на сварку, в результате чего формируется сварной каркас. Дискретные коэффициенты расхода на входных дугах создают предпосылки к появлению остаточных маркеров при обратном планировании.

3. Разветвление потока и промежуточная сборка. После сварки материальный поток разделяется на две параллельные ветви, моделируя альтернативные и параллельные технологические маршруты. Такая структура позволяет проверить устойчивость ААРПО к конфликтам выбора переходов.

4. Окраска (узкое место). Обе ветви используют общий ресурс покрасочной камеры. Существенно большая длительность цикла окраски по сравнению с заготовительными операциями формирует «узкое место» системы и усиливает эффект конкуренции за ресурсы.

5. Финальная операция. Окрашенные компоненты обеих ветвей объединяются в конечное изделие в несимметричной пропорции, задаваемой весами дуг. Это усиливает влияние дискретности партий и делает тест чувствительным к корректности перерасчета остатков.

Таким образом, модель на рис. 1 намеренно включает три ключевых фактора, критичных для обратного планирования: дискретные партии (веса дуг), конкуренцию за возобновляемые ресурсы (универсальный станок и покрасочная камера) и разветвление и последующее объединение потоков с несимметричными коэффициентами. Это обеспечивает репрезентативную проверку способности ААРПО устранять остаточные состояния и формировать однозначный вектор потребностей в сырье.

4.2. Постановка эксперимента

Экспериментальная проверка ААРПО выполнена на синтетической Р/Т-сети Петри (рис. 1), в качестве тестового сценария задан заказ на выпуск конечного изделия: $M_{\text{target}}(\text{pProduct}) = 10$.

Сравнение проводится для двух подходов: базовый метод – стандартная обратная имитация в инверсной сети N^{-1} по правилам срабатывания без дополнительной компенсации остатков; предложенный метод – применение ААРПО к маркировке M_{final} , полученной базовым методом, до достижения состояния $R(M) = \emptyset$.

В качестве итогового результата рассматривается вектор потребностей в сырье по позициям pRawA, pRawB, pRawC.

4.3. Результаты: наличие остаточных маркеров и корректировка ААРПО

Остаточное состояние при стандартной обратной имитации. Результат базового обратного моделирования при $M_{\text{target}}(\text{pProduct}) = 10$ представлен на рис. 2.

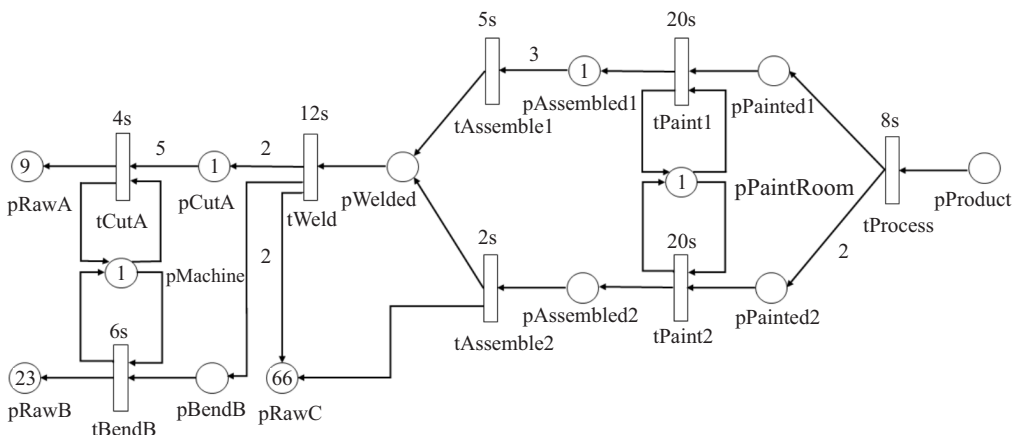


Рис. 2. Остаточные маркеры после обратной имитации.

Процесс обратного вывода останавливается при наличии положительной маркировки в промежуточных позициях, не позволяющей активировать дальнейшую декомпозицию по стандартным правилам. В частности, наблюдаются остаточные маркеры в позициях pCutA и pAssembled1 (по одному маркеру), что соответствует условию $R(M_{\text{final}}) \neq \emptyset$ из раздела 2.4. Это приводит к заниженной оценке сырьевых потребностей: $(\text{pRawA}, \text{pRawB}, \text{pRawC}) = (9, 23, 66)$.

Для устранения остаточного состояния к результату базовой имитации применен ААРПО, получен новый вектор потребностей: $(\text{pRawA}, \text{pRawB}, \text{pRawC}) = (10, 24, 68)$, при этом остаточные состояния устраняются ($R(M) = \emptyset$).

Добавка по сырью имеет вид $\Delta M_{\text{raw}} = (+1, +1, +2)$ и обусловлена накоплением дробных невязок на промежуточных переделах. Наиболее показателен ресурс pRawA: при стандартной имитации формируется потребность в 9 листах, что эквивалентно 45 заготовкам после резки (партия $1 \rightarrow 5$). Однако для корректного выполнения сварочной стадии требуется еще одна сварочная операция, что увеличивает потребность в заготовках pCutA на две единицы; из-за партионности резки это приводит к переходу на следующий целочисленный запуск и, как следствие, к увеличению заказа pRawA на +1.

Для ресурса pRawC эффект проявляется еще более наглядно из-за его использования на двух стадиях (табл. 2): при сварке и при сборке корпуса. Теоретическая потребность при выпуске 10 изделий вычисляется аналитически по структуре сети:

- 1) финальная сборка требует 10 ед. pPainted1 и 20 ед. pPainted2;
- 2) следовательно, необходимо 10 запусков покраски деталей и 20 запусков покраски корпуса;
- 3) для получения 10 ед. pAssembled1 при выпуске 3 ед. за запуск требуется $\lceil 10/3 \rceil = 4$ запуска промежуточной операции, т.е. 4 сварных каркаса;
- 4) для ветви корпуса требуется 20 каркасов и дополнительно 20 ед. pRawC;
- 5) итого каркасов 24, а потребность в pRawC равна $2 \cdot 24 + 20 = 68$.

Стандартная обратная имитация фиксирует лишь 66 единиц, поскольку остановка при $R(M_{\text{final}}) \neq \emptyset$ не позволяет полностью учесть одну дополнительную итерацию на стыке ветвей. ААРПО, выполняя рекурсивную компенсацию остатков, восстанавливает теоретически корректное значение 68, что подтверждает достижение алгоритмической замкнутости задачи обратного планирования.

4.4. Верификация механизма маскирования ресурсов

Критически важным элементом ААРПО является оператор маскирования $\delta(p)$, обеспечивающий разделение расходуемых материалов и возобновляемых ресурсов. Для верификации данного механизма в модели выделено множество ресурсных позиций $P_{\text{res}} = \text{pMachine}, \text{pPaintRoom}$, удовлетворяющих условию консервативности $W(p, t) = W(t, p)$ (см. (7)). В ходе прямой

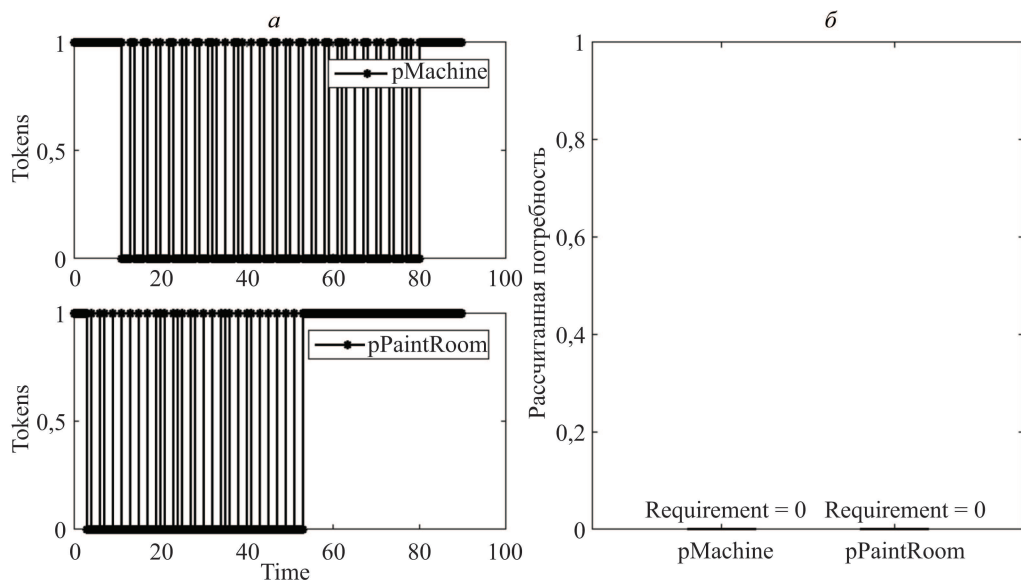


Рис. 3. Моделирование временных рядов состояния ресурсов (а) и результаты эксперимента по маскированию (б).

имитации ресурсы интенсивно используются и возвращаются в систему, что проявляется в колебаниях их маркировки между состояниями «свободен / занят» (рис. 3,а).

Далее к результату обратного вывода применяется ААРПО; итоговые значения расчетной потребности для ресурсных позиций представлены на рис. 3,б. Как видно, для pMachine и pPaintRoom алгоритм формирует нулевую потребность, т.е. $M(p) = 0$, несмотря на их активное участие в технологическом процессе.

Полученный результат подтверждает корректность определения $\delta(p)$ (см. (9)) и правила распространения, в котором приращение маркировки умножается на $\delta(p')$ (см. (17)). Тем самым исключается распространение «дефицита» через ресурсные позиции и устраняется риск формирования ложных заявок на закупку оборудования, что является принципиально важным для практического применения метода.

4.5. Выводы по результатам экспериментальных исследований

Результаты проведенных экспериментальных исследований позволяют сформулировать следующие выводы: ААРПО устраняет остаточные состояния и обеспечивает завершение обратного вывода до уровня сырья, что проявляется в систематическом устранении занижений, характерных для стандартной обратной имитации.

5. Заключение

В работе предложен метод обеспечения алгоритмической замкнутости обратного планирования потребности в материалах на основе инверсных Р/Т-сетей Петри. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

1. Формализация причины неполноты обратного вывода. Показано, что при дискретных коэффициентах (партионности) стандартная процедура обратной имитации в инверсной сети может завершаться в состоянии структурной блокировки: в промежуточных материальных позициях сохраняются остаточные маркеры, не позволяющие продолжить декомпозицию по стандартным правилам срабатывания. Это приводит к систематическому занижению оценок потребности в сырье и необходимости внешней корректировки результата.

2. Разработка алгоритма для рекурсивной ликвидации остатков. Предложен алгоритм автоматического рекурсивного пересчета остатков (ААРПО), реализующий виртуальное срабатывание переходов в инверсной сети и рекурсивное распространение недекомпозированных требований вверх по технологической цепочке. Метод действует на уровне маркировки, не модифицируя топологию сети, и обеспечивает достижение состояния $R = \emptyset$ за конечное число итераций при фиксированной модели.

3. Семантическая корректность за счет маскирования ресурсов. Введен оператор маскирования $\delta(p)$, обеспечивающий формальное разделение расходуемых материалов P_{mat} и возобновляемых ресурсов P_{res} . Экспериментально подтверждено, что при интенсивной занятости ресурсных позиций алгоритм не формирует «потребность» в оборудовании (нулевые значения для ресурсных узлов), предотвращая ложные заявки на закупку мощностей.

4. Роль топологического ранжирования. Использование ранга $\text{Rank}(p)$ и обработка остатков в порядке убывания ранга (от верхних пределов к сырью) обеспечивает консолидацию требований перед округлением, что снижает влияние накопления локальных «дробных» невязок и повышает воспроизводимость результатов при альтернативных маршрутах.

5. Экспериментальная демонстрация замкнутости и устойчивости результатов. На тестовой модели многостадийного производства показано, что ААРПО устраняет остаточные состояния, характерные для стандартного обратного моделирования, и приводит к детерминированному вектору M_{raw} .

Дальнейшая работа будет направлена на: строгий математический анализ эквивалентности инверсных трансформаций для моделей со сложной топологией и оценку каскадного накопления погрешностей дискретизации; расширение модели на случай неидеального выхода за счет введения коэффициентов выхода / уровня годности и параметров доли брака на операциях, с последующей адаптацией процедуры обратного вывода для расчета потребностей с учетом потерь; расширение подхода на системы с возвратными потоками (рециклинг, ремонт, повторное использование), где возникают дополнитель-

ные циклы материальных позиций; интеграцию алгоритма в процедуры динамического перепланирования при изменении портфеля заказов и ограничений по мощностям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orlicky J.* Material Requirements Planning: The New Way of Life in Production and Inventory Management. N.Y.: McGraw-Hill, 1975.
2. *Vollmann T.E., Berry W.L., Whybark D.C.* Manufacturing Planning and Control Systems. 4th ed. N.Y.: McGraw-Hill, 1997.
3. *Toomey J.W.* Concepts and Logic of MRP // MRP II: Planning for Manufacturing Excellence. Boston, MA: Springer, 1996. P. 59–75.
https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4117-2_5
4. *Pinedo M.L.* Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. 6th ed. Cham: Springer, 2022.
5. *Болотов С.В., Гебель Е.С., Потехин В.В., Жуненков А.С.* Разработка метода анализа отклонений ключевых показателей эффективности производства под управлением киберфизической системы // Наука и технологии в трансформации социально-экономического ландшафта. СПб.: ЦНИТ «Астерион», 2024. С. 132–139.
6. *Ван. Д., Гудинов В.Н.* Синтез дискретно-событийных систем на примере станции распределения // ИТ. Наука. Креатив : Материалы II Междунар. форума (Омск, 13–15 мая 2025 г.). Омск. гос.техн. ун-т, 2025. С. 8–16.
7. *Cassandras C.G., Lafortune S.* Introduction to Discrete Event Systems. 3rd ed. Cham: Springer, 2021.
8. *Murata T.* Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proceedings of the IEEE. 1989. V. 77. No. 4. P. 541–580. <https://doi.org/10.1109/5.24143>
9. *Zhou M., DiCesare F.* Petri Nets and Manufacturing Systems / Petri Net Synthesis for Discrete Event Control of Manufacturing Systems. Boston, MA: Springer, 1993. P. 13–29. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-3126-5_2
10. *Desrochers A.A., Al-Jaar R.Y.* Applications of Petri Nets in Manufacturing Systems: Modeling, Control, and Performance Analysis. IEEE Press, 1995.
11. *David R., Alla H.* Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
12. *Yang S., Zhuo J., Guo J.* Inverse Petri nets: properties and applications // IFAC Proceedings Volumes. 1991. V. 24. No. 14. P. 91–95.
[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)69330-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)69330-3)
13. *Сочнев А.Н.* Планирование ресурсов производства на основе сетевых моделей // Управление большими системами. 2020. № 86. С. 116–131.
<https://doi.org/10.25728/ubs.2020.86.5>
14. *Davidrajuh R.* Modeling Discrete-Event Systems with GPenSIM: An Introduction. Cham: Springer, 2018.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Ю. Жиликовой.

Поступила в редакцию 23.01.2026

После доработки 17.04.2026

Принята к публикации 20.04.2026