

Стохастические системы

© 2026 г. Н.П. МЕЛОШНИКОВА (n.meloshnikova@gmail.com),
Е.А. ФЁДОРОВА, канд. физ.-мат. наук (ekat_fedorova@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ, ММРР-ПОТОКОМ И КАТАСТРОФАМИ

Проводится исследование многолинейной системы массового обслуживания с повторными вызовами (RQ-системы) с входящим марковским модулированным пуассоновским потоком (ММРР). Для анализа негативных воздействий внешних факторов в модели рассматривается поток отрицательных заявок, при наступлении событий которого в системе случаются катастрофы, т.е. уничтожение всех находящихся на обслуживании и на орбите заявок. В качестве метода исследования рассмотренной модели предлагается метод асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего ММРР-потока заявок. Доказана теорема о виде асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите. Представлены результаты численного анализа точности асимптотических результатов.

Ключевые слова: математическое моделирование, RQ-система, катастрофы, асимптотический анализ, высокая интенсивность потока.

DOI: 10.7868/S2413977726110048

1. Введение

RQ-системы (Retrial Queueing Systems), или системы массового обслуживания с повторными вызовами, представляют собой класс моделей теории массового обслуживания. Отличительной особенностью таких систем является отсутствие классической очереди: заявки, не получившие обслуживание, не покидают систему, а направляются на орбиту, где совершают случайную задержку перед повторной попыткой обращения к прибору обслуживания. Подобные модели широко применяются для анализа и оптимизации инфокоммуникационных систем, в которых требования при невозможности немедленного обслуживания осуществляют повторные обращения через случайные промежутки времени. Такие ситуации характерны для сетей связи с протоколами множественного случайного доступа, call-центров, а также облачных технологий, где при высокой нагрузке часть пользователей вынуждена ожидать и повторять запросы [1, 2].

В современных информационных системах существенное значение приобретает исследование негативных воздействий, связанных с ошибками пе-

редачи данных, аппаратными и программными сбоями, вредоносной активностью и хакерскими атаками. Для описания подобных явлений в рамках теории массового обслуживания (ТМО) используется понятие G-систем (или G-сетей) – это модели массового обслуживания с потоком отрицательных заявок, введенные Е. Gelenbe [3–6]. Дальнейшее развитие направления отражено в обзорных работах [7, 8], подтверждающих высокую значимость моделей с отрицательными заявками и их востребованность в современных сетевых и вычислительных приложениях.

Отрицательные заявки описывают воздействия на систему, приводящие к уничтожению обслуживаемых требований как на отдельном приборе, так и во всем блоке обслуживания, либо к катастрофам. Под катастрофами понимаются случайные негативные события, полностью «обнуляющие» систему: блок обслуживания и орбита становятся свободными, а все находящиеся в системе заявки покидают ее, не получив обслуживания. В реальных условиях такие ситуации могут быть вызваны аварийными отказами оборудования, массовыми сбоями программных сервисов или атаками на инфраструктуру. Катастрофы являются наиболее критическим типом негативного воздействия, поскольку радикально изменяют динамику системы и существенно влияют на ее вероятностные характеристики и показатели производительности.

Исследования RQ-систем, учитывающих отрицательные заявки и катастрофы, представлены в ряде работ [9–11]. В [9] исследуются системы повторных вызовов с несколькими потоками отрицательных заявок и различными дисциплинами обслуживания. Многолинейные модели с различными типами негативных воздействий рассмотрены в Y. Shin [10]. Однако стоит отметить, что большинство работ в этой области посвящено исследованию моделей с простейшим потоком, тогда как реальные потоки в телекоммуникационных сетях имеют более сложную структуру. Наиболее подходящими моделями информационных потоков являются классы нестационарных коррелированных потоков MAP (Markovian Arrival Process) и BMAP (Batch Markovian Arrival Process) [12]. Рассматриваемый в настоящей работе MMPP-поток (Markov Modulated Poisson Process) является частным случаем MAP-потока, отличающегося нулевой вероятностью наступления событий потока в моменты перехода управляющей цепи Маркова в другие состояния. Отметим, что аналитические исследования для RQ моделей с MMPP-входящим потоком и отрицательными заявками практически не известны [13].

Ранее в [14] был выполнен асимптотический анализ многолинейной RQ-системы с катастрофами с простейшим входящим потоком. Настоящая статья является развитием данного направления и посвящена исследованию RQ-системы с катастрофами и MMPP-входящим потоком. Для анализа модели применяется асимптотический метод в условиях высокой интенсивности входящего потока, что позволяет получить аппроксимации вероятностных характеристик системы и исследовать влияние катастроф в предельном режиме.

2. Описание модели

В работе рассматривается многолинейная RQ-система, представленная на рис. 1. На вход системы поступает марковский модулированный пуассоновский поток заявок (ММРР-поток), определяемый диагональной матрицей Λ условных интенсивностей λ_n и матрицей Q инфинитезимальных характеристик q_{nn} управляющей цепи Маркова $n(t)$, где $n = 1, \dots, N$. Будем называть заявки этого потока положительными. Стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$ задается вектором $\mathbf{r}$, определяемым системой:

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}Q &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}\mathbf{e} &= 1, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}$ – единичный вектор размера $N \times 1$, $\mathbf{0}$ – вектор с нулевыми элементами размером $1 \times N$.

Положительные заявки поступают в блок обслуживания, состоящий из K приборов (серверов). Время обслуживания каждой заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром μ . Если все приборы оказываются заняты, то входящая заявка идет на орбиту, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . После случайной задержки заявка с орбиты вновь обращается к блоку обслуживания, если имеется хотя бы один свободный прибор, она занимает его для обслуживания, иначе мгновенно возвращается на орбиту. С орбиты реализуется протокол множественного случайного доступа, т.е. любая заявка может обратиться к обслуживающим приборам после реализации задержки (нет очереди).

Также в систему поступает простейший поток отрицательных заявок с параметром γ . Отрицательная заявка не нуждается в обслуживании, она оказывает негативное воздействие на систему. В данной работе рассмотрена модель с катастрофами, а именно при поступлении в систему отрицательная заявка «обнуляет» всю систему, т.е. уничтожает все заявки, находящиеся на приборах и на орбите. При наступлении катастроф заявки навсегда покидают систему необслуженными.

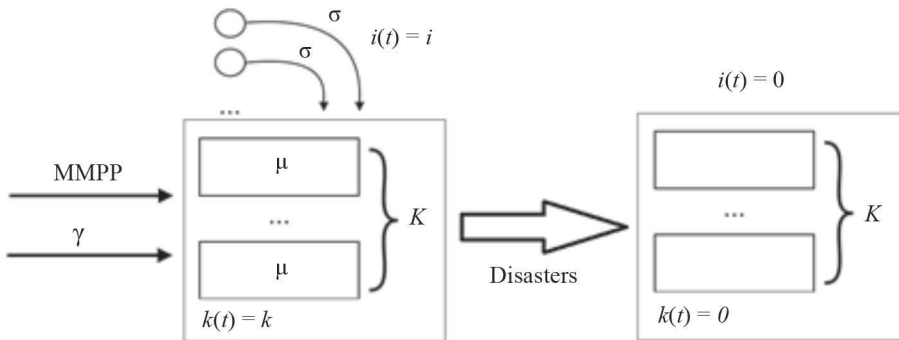


Рис. 1. RQ-система ММРР/М/К с катастрофами.

Состояние системы в момент времени t определяется трехмерной цепью Маркова $\xi(t) = \{k(t), n(t), i(t)\}$, $t \geq 0$, где $i(t)$ – число заявок на орбите, $n(t)$ – цепь Маркова, управляющая ММРР-потокком, $k(t)$ – состояние блока обслуживания:

$$k(t) = \begin{cases} 0 & (\text{все приборы свободны}), \\ 1 & (\text{один прибор занят}), \\ \dots \\ k & (k \text{ приборов занято}), \\ \dots \\ K & (\text{все приборы заняты}). \end{cases}$$

Обозначим: $P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$ – вероятность того, что в момент времени t блок обслуживания находится в состоянии k , цепь Маркова, управляющая ММРР-потокком – в состоянии n и на орбите имеется i заявок.

Для распределения вероятностей $P(k, n, i, t)$ была составлена система дифференциальных уравнений Колмогорова. В стационарном режиме система уравнений баланса имеет следующий вид:

для $i = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_n + \gamma - q_{nn})P(0, n, 0) + \mu P(1, n, 0) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(0, v, 0) + \gamma = 0, \\ -(\lambda_n + k\mu + \gamma - q_{nn})P(k, n, 0) + \lambda_n P(k-1, n, 0) + \sigma P(k-1, n, 1) + \\ + (k+1)\mu P(k+1, n, 0) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(k, v, 0) = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ -(\lambda_n + K\mu + \gamma - q_{nn})P(K, n, 0) + \lambda_n P(K-1, n, 0) + \\ + \sigma P(K-1, n, 1) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(K, v, 0) = 0, \end{array} \right.$$

для $i > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_n + i\sigma + \gamma - q_{nn})P(0, n, i) + \mu P(1, n, i) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(0, v, i) = 0, \\ -(\lambda_n + i\sigma + k\mu + \gamma - q_{nn})P(k, n, i) + \lambda_n P(k-1, n, i) + \\ + \sigma(i+1)P(k-1, n, i+1) + (k+1)\mu P(k+1, n, i) + \\ + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(k, v, i) = 0, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ -(\lambda_n + K\mu + \gamma - q_{nn})P(K, n, i) + \lambda_n P(K-1, n, i) + \lambda_n P(K, n, i-1) + \\ + (i+1)\sigma P(K-1, n, i+1) + \sum_{v \neq n}^N q_{vn}P(K, v, i) = 0, \end{array} \right.$$

где $n = 1, \dots, N$.

Стоит отметить, что стационарный режим в рассматриваемой системе существует при любых значениях параметров, что обусловлено наличием потерь заявок в результате наступления катастроф.

Для дальнейшего исследования запишем систему в матричном виде, обозначив $\mathbf{P}(k, i) = \{P(k, 1, i), \dots, P(k, n, i), \dots, P(k, N, i)\}$. Получим

для $i = 0$:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(0, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \gamma\mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1, 0) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(k, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(k-1, 0)\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{P}(k-1, 1) + \\ + (k+1)\mu\mathbf{P}(k+1, 0) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{P}(K, 0)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(K-1, 0)\mathbf{\Lambda} + \sigma\mathbf{P}(K-1, 1) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

для $i > 0$:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (i\sigma + \gamma)\mathbf{I}) + \mu\mathbf{P}(1, i) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{P}(k, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (i\sigma + k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(k-1, i)\mathbf{\Lambda} + \\ + \sigma(i+1)\mathbf{P}(k-1, i+1) + (k+1)\mu\mathbf{P}(k+1, i) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{P}(K, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(K-1, i)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}(K, i-1)\mathbf{\Lambda} + \\ + (i+1)\sigma\mathbf{P}(K-1, i+1) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Введем частичные характеристические функции:

$$\mathbf{H}_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} \mathbf{P}(k, i),$$

где j – мнимая единица.

Из системы уравнений (2)–(3) получим:

$$(4) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_0(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + \mu\mathbf{H}_1(u) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_k(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{H}'_k(u) + \mathbf{H}_{k-1}(u)\mathbf{\Lambda} - \\ - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{k-1}(u) + (k+1)\mu\mathbf{H}_{k+1}(u) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{H}_K(u)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda}(1 - e^{ju}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{H}_{K-1}(u)\mathbf{\Lambda} - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{K-1}(u) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Сложив все уравнения системы (4) и умножив на вектор $\mathbf{e}$, получим так называемое согласованное уравнение:

$$(5) \quad j\sigma(1 - e^{-ju}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{H}'_k(u)\mathbf{e} - \mathbf{H}_K(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}(1 - e^{ju}) + \gamma - \gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k(u)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Решение $\mathbf{H}(u) = \{\mathbf{H}_0(u), \dots, \mathbf{H}_k(u), \dots, \mathbf{H}_K(u)\}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \mathbf{H}_k(0) &= \mathbf{r}, \\ \sum_{k=0}^K \mathbf{H}_k(0)\mathbf{e} &= 1. \end{aligned}$$

Получить решение системы уравнений (4)–(5) в явном аналитическом виде довольно затруднительно, поэтому далее предлагается использовать асимптотический подход к исследованию [14]. Существует несколько направлений асимптотического анализа, применяемых для построения аппроксимации искомого распределения, которые можно классифицировать по предельным условиям:

- условие большой загрузки системы ($\rho \rightarrow S_{\max}$) [15];
- условие большой задержки заявок на орбите в RQ-системах ($\sigma \rightarrow 0$) [16];
- условие высокой интенсивности входящего потока ($\lambda \rightarrow \infty$) [14].

Учитывая особенность функционирования рассматриваемой системы с катастрофами, можно сделать вывод, что предельные условия большой задержки и большой загрузки здесь неосуществимы. Из-за потерь заявок стационарный режим в такой модели существует при любых значениях параметров. Таким образом, систему удастся исследовать лишь в условии высокой интенсивности входящего потока положительных заявок. Данное предельное условие обычно использовалось для анализа бесконечнолинейных систем массового обслуживания [17, 18] и впервые было применено для исследования RQ-систем с отрицательными заявками в [14].

3. Асимптотический анализ

Для описания условия высокой интенсивности в ММРР-потоке введем параметр S , являющийся бесконечно большой величиной ($S \rightarrow \infty$). Представим матрицы условных интенсивностей и инфинитезимальных характеристик следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= S\tilde{\mathbf{L}}, \\ \mathbf{Q} &= S\tilde{\mathbf{Q}}.\end{aligned}$$

Такой вид матриц обусловлен определением высокоинтенсивного МАР-потока (и ММРР-потока как его частного случая), представленным в монографии [18]. Совместное масштабирование матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}$ обеспечивает сопоставимость интервалов времени между моментами поступления заявок и временами пребывания ММРР-потока в своих состояниях, т.е. высокую динамику входящего потока в целом.

Тогда из уравнений (4) и (5) получим систему:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_0(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}}) + j\sigma\mathbf{H}'_0(u) + \mu\mathbf{H}_1(u) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_k(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}} - (k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{H}'_k(u) + \mathbf{H}_{k-1}(u)S\tilde{\mathbf{L}} - \\ - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_k(u) + (k+1)\mu\mathbf{H}_{k+1}(u) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{H}_K(u)(S\tilde{\mathbf{Q}} - S\tilde{\mathbf{L}}(1 - e^{-ju}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{H}_{K-1}(u)S\tilde{\mathbf{L}} - \\ - j\sigma e^{-ju}\mathbf{H}'_{K-1}(u) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

$$(7) \quad j\sigma(1 - e^{-ju}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{H}'_k(u)\mathbf{e} - \mathbf{H}_K(u)S\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{e}(1 - e^{-ju}) + \gamma - \gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_k(u)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

В результате исследования данной системы методом асимптотического анализа было сформулировано следующее.

Теорема. Асимптотическая характеристическая функция $h(u)$, аппроксимирующая характеристическую функцию стационарного распределения вероятностей числа заявок $i(t)$ на орбите RQ-системы ММРР/М/К с катастрофами в условии высокой интенсивности входящего потока, имеет вид характеристической функции экспоненциального распределения:

$$h(u) = \frac{\gamma}{\gamma - ju\lambda},$$

где $\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$.

Доказательство.

Введем асимптотические замены:

$$(8) \quad \begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon}, \quad u = \varepsilon w, \quad \mathbf{H}_K(u) = \mathbf{F}_K(w, \varepsilon), \\ \mathbf{H}_k(u) &= \varepsilon \mathbf{F}_k(w, \varepsilon), \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

где ε – бесконечно малая величина.

Подставим замены (8) в уравнения (6)–(7). После некоторых математических преобразований получим:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w, \varepsilon) + \mu\varepsilon\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ &\mathbf{F}_k(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon(k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{k-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{k-1}(w, \varepsilon) + (k+1)\mu\varepsilon\mathbf{F}_{k+1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-2}, \\ &\mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon((K-1)\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{K-2}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{K-2}(w, \varepsilon) + K\mu\mathbf{F}_K(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = K-1, \\ &\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}(1 - e^{jw\varepsilon}) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}\right) + \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ &\quad - j\sigma e^{-jw\varepsilon}\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \begin{aligned} &j\sigma(1 - e^{-jw\varepsilon}) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}'_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}(1 - e^{jw\varepsilon}) + \gamma - \\ &\quad - \gamma\varepsilon \sum_{k=1}^{K-1} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \gamma\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд Тейлора в уравнениях (9) и (10), получим:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w, \varepsilon) + \mu\varepsilon\mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon(k\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{k-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{k-1}(w, \varepsilon) + (k+1)\mu\varepsilon\mathbf{F}_{k+1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-2}, \\ \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \varepsilon((K-1)\mu + \gamma)\mathbf{I}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_{K-2}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{K-2}(w, \varepsilon) + K\mu\mathbf{F}_K(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \quad k = K-1, \\ \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{Q}} - \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\left(-j\varepsilon w - \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right) - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}\right) + \mathbf{F}_{K-1}(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ - j\sigma(1 - j\varepsilon w)\mathbf{F}'_{K-1}(w, \varepsilon) = \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \begin{aligned} j\sigma\left(j\varepsilon w - \frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}'_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}\left(-jw - \varepsilon\frac{(jw)^2}{2}\right) + \gamma - \\ - \varepsilon\gamma \sum_{k=1}^K \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)\mathbf{e} - \gamma\mathbf{F}_K(w, \varepsilon)\mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Совершая некоторые преобразования, выполним в уравнениях (11)–(12) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, обозначив $\mathbf{F}_k(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_k(w, \varepsilon)$. Получим

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_0(w) + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_k(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_k(w) + \mathbf{F}_{k-1}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - j\sigma\mathbf{F}'_{k-1}(w) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_{K-1}(w)(\tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{\Lambda}}) + j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w) + \mathbf{F}_{K-2}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - \\ - j\sigma\mathbf{F}'_{K-2}(w) + \mu(k+1)\mathbf{F}_K(w) = \mathbf{0}, \quad k = \overline{1, K-1}, \\ \mathbf{F}_K(w)\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_K(w)(jw\tilde{\mathbf{\Lambda}} - (K\mu + \gamma)\mathbf{I}) + \mathbf{F}_{K-1}(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}} - j\sigma\mathbf{F}'_{K-1}(w) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

и

$$(14) \quad \mathbf{F}_K(w)\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}jw + \gamma - \gamma\mathbf{F}_K(w)\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Из предпоследнего уравнения (13), учитывая условия (1), нетрудно сделать вывод, что решение имеет вид

$$(15) \quad \mathbf{F}_K(w) = \mathbf{r}\Phi(w),$$

где $\mathbf{r}$ – стационарное распределение состояний ММРР-потока, а $\Phi(w)$ – некоторая скалярная функция.

Из уравнения (14) нетрудно получить, что

$$\mathbf{F}_K(w)(\gamma - jw\tilde{\mathbf{\Lambda}})\mathbf{e} = \gamma.$$

Подставляя выражение (15) и учитывая равенства (1), получим вид функции $\Phi(w)$:

$$\Phi(w) = \frac{\gamma}{\gamma - jw \cdot \mathbf{r}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{e}}.$$

Таким образом, асимптотическая характеристическая функция распределения вероятностей числа заявок на орбите в условии высокой интенсивности входящего потока имеет вид

$$(16) \quad h(u) = F_K \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon) \approx \mathbf{F}_K \left(\frac{u}{\varepsilon} \right) \mathbf{e} = \frac{\gamma}{\gamma - ju\lambda},$$

что эквивалентно характеристической функции экспоненциального распределения с параметром γ/λ , где $\lambda = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$ – средняя интенсивность входящего потока.

Заметим, что полученная формула аналогична результату, приведенному ранее для модели М/М/К [14], что говорит об асимптотической эквивалентности (в условии высокой интенсивности) распределения вероятностей числа заявок на орбите в RQ-системах с катастрофами с входящим ММРР-потокотом и простейшим потоком заявок. А отсутствие параметра σ в асимптотической формуле обусловлено наличием катастроф, которые приводят к мгновенному обнулению орбиты и тем самым нивелируют влияние параметра интенсивности повторных обращений.

4. Численный анализ

Для анализа области применимости предложенных асимптотических методов проведем численное сравнение полученного асимптотического распределения $PA(i)$, построенного путем дискретизации распределения (16), и распределения $P(i)$, найденного с помощью численного алгоритма. Для реализации численного анализа был написан алгоритм, включающий в себя блок решений уравнений с элементами программирования, в программной среде Mathcad Prime.

Для оценки степени близости этих распределений будем использовать метрики, позволяющие количественно измерять различия между теоретическими и экспериментальными результатами, например расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max \left| \sum_{n=0}^i PA(n) - \sum_{n=0}^i P(n) \right|$$

и относительные погрешности моментов первого и второго порядка.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть параметры системы принимают следующие значения:

$$\mu = 1, \quad \gamma = 1, \quad \sigma = 30, \quad K = 3, \quad \mathbf{\Lambda} = S\tilde{\mathbf{\Lambda}}, \quad \mathbf{Q} = S\tilde{\mathbf{Q}}, \quad S = 60,$$

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & -0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 & -0,6 \end{pmatrix}.$$

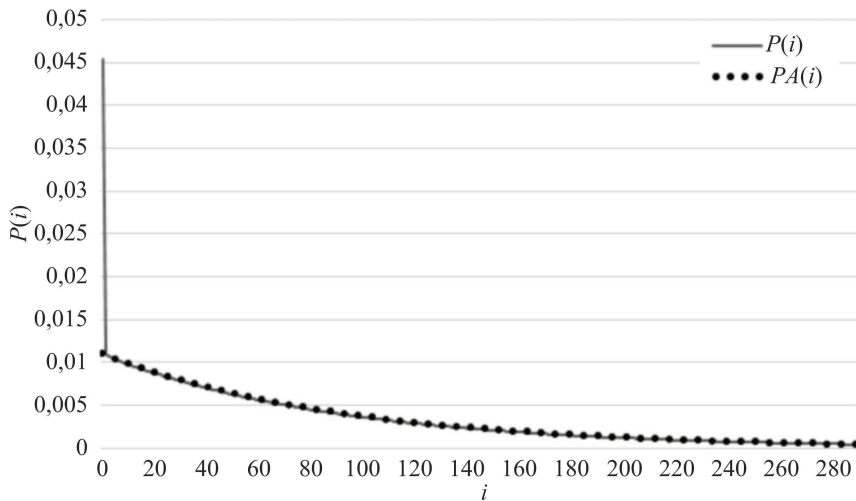


Рис. 2. Сравнение асимптотического $PA(i)$ и точного $P(i)$ распределений вероятностей числа заявок на орбите для RQ-системы MMPP/M/K.

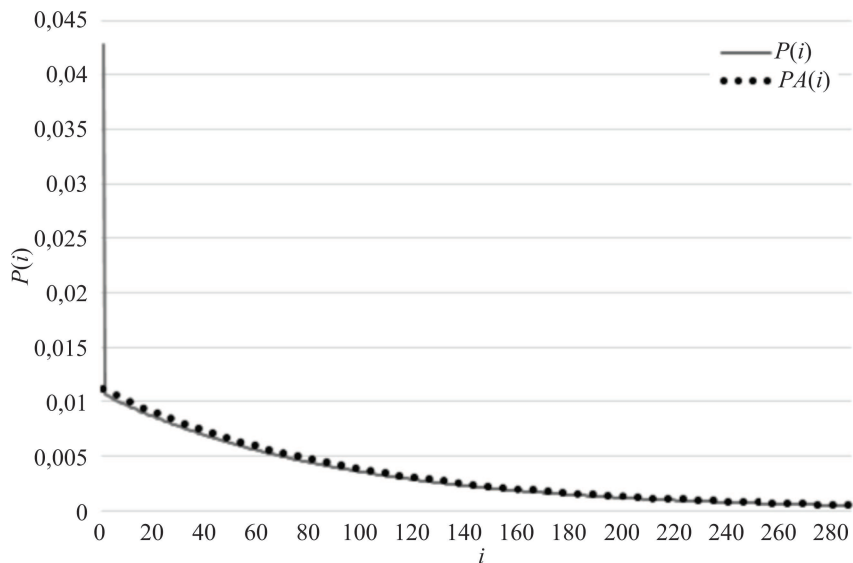


Рис. 3. Сравнение асимптотического $PA(i)$ и численного $P(i)$ распределений вероятностей для RQ-системы M/M/K.

На рис. 2 представлено сравнение асимптотического и численного распределений вероятностей числа заявок на орбите для рассмотренных параметров.

Расстояние Колмогорова между распределениями в данном случае: $\Delta = 0,034$.

Так как в работе была показана асимптотическая эквивалентность систем с MMPP и простейшим потоками, то в следующем численном приме-

ре продемонстрируем сравнение асимптотического и точного распределений для системы М/М/К, при этом значения параметров выберем аналогичными предыдущему примеру. На рис. 2 представлены результаты сравнения.

Расстояние Колмогорова между распределениями в рассмотренном случае составило $\Delta = 0,033$.

Сравнивая распределения, представленные на рис. 2 и 3, можно сделать вывод, что распределения вероятностей числа заявок в RQ-системах с ММРР и простейшим входящими потоками действительно достаточно близки. Основное различие наблюдается в точке $i = 0$, для которой разность вероятностей для различных численных примеров не превысила 0,005. Отметим, что близость распределений увеличивается с ростом интенсивности λ .

В следующих таблицах приведем результаты оценки точности предложенной аппроксимации для различных значений средней интенсивности входящего потока.

Таблица 1. Расстояние Колмогорова между асимптотическим и численным распределением для разных значений λ

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,206	0,048	0,024	0,011

Таблица 2. Относительная погрешность асимптотического среднего

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,305	0,075	0,038	0,019

Таблица 3. Относительная погрешность асимптотической дисперсии

	$\lambda = 10$	$\lambda = 50$	$\lambda = 100$	$\lambda = 150$
Δ	0,517	0,145	0,075	0,038

Из полученных результатов можно сделать вывод, что точность метода увеличивается с ростом интенсивности потока, что согласуется с рассматриваемым асимптотическим условием. Предполагая приемлемой погрешностью $\Delta < 0,05$, можно говорить о применимости асимптотических результатов для $\lambda \geq 50$ для приведенных значений параметров системы. Однако можно заметить, что наибольшее расхождение между распределениями наблюдается в точке $i = 0$ («нулевом» состоянии системы), что обусловлено особенностями функционирования систем с катастрофами.

Отметим также, что проведенные многочисленные численные эксперименты показали, что при достаточно больших значениях интенсивности входящего потока значения других параметров системы, а именно числа занятых приборов (при неизменной суммарной интенсивности обслуживания) и величины задержки, оказывают незначительное влияние на результаты.

5. Заключение

В работе рассмотрена многолинейная RQ-система с входящим ММРР-потокотом и катастрофами. Проведено исследование системы методом асимптотического анализа в условии высокой интенсивности входящего потока. Доказано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите имеет вид характеристической функции экспоненциального распределения. Стоит заметить, что полученное асимптотическое распределение не зависит от вида матриц входящего ММРР-потока, а только от средней интенсивности входящего потока. Таким образом в работе показано, что асимптотическое поведение системы (а именно распределение вероятностей числа заявок на орбите) эквивалентно функционированию более простой системы с простейшим входящим потоком, что может иметь широкое практическое значение в силу необходимости оценки лишь средних значений потока из статистических данных.

В работе также приведены результаты численного анализа результатов, из которых можно сделать вывод о высокой точности предлагаемой аппроксимации при значениях интенсивности входящего потока, в 50–100 раз превышающих интенсивность обслуживания. При этом наибольшая погрешность аппроксимации наблюдается в оценке вероятности «нулевого» состояния. В будущих исследованиях планируется разработать методы оценки вероятности данного состояния и разработать модификацию асимптотического метода для более сложных систем, например учитывающих эффект нетерпеливости заявок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems. 1st edn. Heidelberg: Springer Berlin, 2008.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. 1st edn. N.Y.: Springer, 1999.
3. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers // J. Appl. Probab. 1991. V. 28. No. 3. P. 656–663.
4. *Gelenbe E., Fourneau J.M.* G-networks with resets // Perform. Eval. 2002. V. 49. No. 1–4. P. 179–191.
5. *Gelenbe E., Fourneau J.M.* The first decade of G-networks // Eur. J. Oper. Res. 2000. V. 126. No. 2. P. 231–232.
6. *Gelenbe E., Morfopoulou C.* Routing and G-networks to optimise energy and quality of service in packet networks // Proc. Int. Conf. on Energy-Efficient Computing and Networking. 2010. P. 163–173.
7. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, negative customers and applications // Ann. Oper. Res. 2011. V. 48. P. 205–212.
8. *Caglayan M.* G-networks and their applications to machine learning, energy packet networks and routing: introduction to the special issue // Probab. Eng. Inform. Sci. 2017. V. 31. P. 381–395.

9. *Atencia I., Apice C.D., Manzo R., Salerno S.* Retrial queueing system with several input flows of negative customers and LCFS/PR discipline // Proc. Fourth Int. Workshop on Queueing Networks with Finite Capacity. 2000. P. 30–34.
10. *Shin Y.W.* Multi-server retrial queue with negative customers and disasters // Queueing Syst. 2007. V. 55. No. 4. P. 223–237.
11. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters // RAIRO Oper. Res. 1999. V. 33. No. 3. P. 371–382.
12. *Вишне夫斯基 В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // АиТ. 2017. № 8. С. 3–59.
13. *Raj R., Jain V.* Resource optimization for MMAP[c]/PH[c]/S catastrophic queueing model with PH retrial times // OPSEARCH. 2024. V. 61. P. 1192–1223.
14. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A.* Asymptotic analysis of a multiserver retrial queue with disasters // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Related Fields (ITMM 2024). Commun. Comput. Inf. Sci. Cham: Springer, 2025. V. 4272. P. 171–180.
15. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A., Plaksin D.A.* Asymptotic analysis of a multi-server retrial queue with disasters in the service block // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications (ITMM 2022). Commun. Comput. Inf. Sci. Cham: Springer, 2023. V. 1803. P. 55–67.
16. *Meloshnikova N.P., Fedorova E.A.* Asymptotic analysis of multiserver retrial queueing system with π -defeat of negative arrivals under heavy load // Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. 2025. V. 33. No. 2. P. 144–156.
17. *Моисеев А.Н.* Асимптотический анализ системы массового обслуживания MAP/GI/ ∞ с высокоинтенсивным входящим потоком // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. Т. 32. № 3.
18. *Моисеев А.Н., Назаров А.А.* Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2015.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.М. Хоровым.

Поступила в редакцию 26.02.2026

После доработки 21.05.2026

Принята к публикации 15.06.2026