

© 2026 г. Д.А. КОЗОРЕЗ, д-р техн. наук (dk@mai.ru),

А.Н. СИРОТИН, д-р физ.-мат. наук (asirothin2@yandex.ru)

(Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)),

К.И. СЫПАЛО, д-р техн. наук (ksypalo@mail.ru)

(ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская область)

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ УПРАВЛЯЕМЫХ КОММУТАТИВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Для билинейных управляемых систем с дискретным временем и коммутативными матрицами установлены новые свойства множеств управляемости для фиксированного числа шагов.

Ключевые слова: билинейная система, множество управляемости.

DOI: 10.7868/S2413977726110022

1. Введение

Билинейные системы представляют собой самый простой класс нелинейных систем. Основной интерес к таким системам заключается в том, что они широко используются в реальных процессах [1–4]. Кроме того, они лучше изучены, чем большинство других нелинейных систем.

В исследованиях билинейных систем управляемость является важной темой. Эта проблема особенно актуальна для случая непрерывного времени. Результатам управляемости билинейных систем с непрерывным временем уделяется значительное внимание благодаря использованию мощных математических инструментов, таких как теория дифференциальных многообразий, методы алгебры Ли и т.д. В литературе были получены разные математические критерии управляемости билинейных систем с непрерывным временем [1]. Однако даже сейчас для билинейных систем с дискретным временем результаты по свойствам управляемости довольно скромные по сравнению с их аналогами с непрерывным временем.

Для общих нелинейных систем, в частности билинейных систем с дискретным временем, исчерпывающих необходимых и достаточных условий управляемости к настоящему времени не имеется. Тем не менее для специального класса билинейных систем с перестановочными матрицами имеется возможность установить конструктивные необходимые и достаточные условия управляемости [5–8]. А в [9] доказаны необходимые и достаточные условия управляемости дискретных билинейных систем с коммутативными матрицами.

Следующим шагом является расширение свойств управляемости для таких систем, и в первую очередь изучение свойств множеств управляемости для конечного числа шагов. Оказывается, свойства таких систем являются не очевидными и более сложными, чем казалось с первого взгляда. Например, оказывается неверным свойство монотонности по включению множеств управляемости (т.е. при увеличении числа шагов «размер» таких множеств не обязан увеличиваться), не установлено свойство замкнутости множеств управляемости для произвольного конечного числа шагов и т.п.

В статье обсуждаются новые свойства [10] множеств управляемости билинейных систем с дискретным временем и коммутативными матрицами.

2. Основная цель исследования

Рассматривается автономная билинейная система (A, B) с дискретным временем и скалярным управлением без ограничений

$$(1) \quad x(k+1) = (A + u_k B)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\},$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояний; $u_k \in \mathbb{R}$ – управления в текущий шаг (момент времени); $A, B \in \mathbb{R}^n$ – соответствующие матрицы системы.

Билинейная система (A, B) называется управляемой, если для произвольной пары граничных допустимых векторов $x^\circ, x^{\circ\circ} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеется хотя бы один конечный набор управлений $\{u_0, \dots, u_{K-1}\}$ и число шагов $K \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ таких, что $x(0) = x^\circ$, $x(K) = x^{\circ\circ}$. Для системы (A, B) вводится множеств управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K) \subset \mathbb{R}^n$ из начального состояния x° за K шагов как множество

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : y = (A + u_{K-1}B) \dots (A + u_0B)x^\circ, \ u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \bigcup_{u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}} \{y \in \mathbb{R}^n : y = (A + u_{K-1}B) \dots (A + u_0B)x^\circ\}. \end{aligned}$$

В этом случае билинейная система (A, B) является управляемой тогда и только тогда, когда для каждого допустимого $x^\circ \neq 0$ верно равенство

$$\mathcal{Y}(x^\circ) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathcal{Y}(x^\circ) := \bigcup_{K \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Множества управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ могут быть построены с помощью (1) рекуррентно:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) &= \bigcup_{u_K \in \mathbb{R}} (A + u_K B) \mathcal{Y}(x^\circ, K), \\ \mathcal{Y}(x^\circ, 0) &= \{x^\circ\}. \end{aligned}$$

В настоящее время полного описания необходимых и достаточных условий управляемости для произвольных билинейных систем нет. Имеются разрозненные, в общем случае не связанные частичные необходимые и достаточные

условия для фрагментарных билинейных систем. Это не позволяет подробно изучить их свойства.

Тем не менее имеется специальный класс билинейных систем, для которых полные необходимые и достаточные условия управляемости установлены и доказаны [9] – это билинейные системы с коммутативными (перестановочными матрицами), т.е.

$$[A, B] = 0, \quad [A, B] := AB - BA.$$

В [5–9] доказано, что если билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является управляемой, то $n \leq 2$. Следовательно, управляемых систем с перестановочными матрицами при $n > 2$ не существует, а такие управляемые системы достаточно изучать при $n = 1$ и $n = 2$. Тем не менее билинейные системы с перестановочными матрицами, которые не являются управляемыми, существуют при любом натуральном n . Управляемые системы (A, B) с коммутативными матрицами при $n = 1$ не представляют интереса и сложности в силу их простоты и несложных свойств. Однако для управляемых билинейных систем с перестановочными матрицами при $n = 2$ множества управляемости для произвольного числа шагов обладают неочевидными свойствами.

Для удобства будет использовано линейное невырожденное преобразование вектора состояния системы (A, B) . Пусть $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det P \neq 0$, тогда положим

$$\bar{x}(k) := P^{-1}x(k), \quad \bar{A} = P^{-1}AP, \quad \bar{B} = P^{-1}AP.$$

В этом случае верны представления

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= (\bar{A} + u_k \bar{B}) \bar{x}(k), \\ \bar{\mathcal{Y}}(\bar{x}^\circ, K) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : y = (\bar{A} + u_{K-1} \bar{B}) \dots (\bar{A} + u_0 \bar{B}) \bar{x}^\circ, u_0, \dots, u_{K-1} \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{x}^\circ &:= P^{-1}x^\circ, \\ \bar{\mathcal{Y}}(\bar{x}^\circ, K) &= P^{-1}\mathcal{Y}(x^\circ, K). \end{aligned}$$

Система (A, B) управляема тогда и только тогда, когда управляема система $(\bar{A}, \bar{B})$.

Для некоторой невырожденной матрицы P билинейная управляемая система $(\bar{A}, \bar{B})$ с коммутативными матрицами может быть полностью охарактеризована необходимыми и достаточными условиями [5, 6, 9]:

$$(2) \quad \bar{A} = rR(\varphi_1), \quad \bar{B} = R(\varphi_2),$$

$$(3) \quad 0 < r^2 \sin^2 \theta < 1, \quad \theta := \varphi_1 - \varphi_2,$$

где

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \text{SO}(2).$$

В современной интерпретации эти условия могут быть эквивалентно записаны так: билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами управляема тогда и только тогда, когда

1) матрицы подобны матрицам $SO(2)$ с помощью одной невырожденной матрицы;

2) $0 < \frac{1}{2} \frac{\rho(A)}{\rho(B)} \det(A^T B - B^T A) < 1$, где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A .

Билинейные системы с перестановочными матрицами, которые не являются управляемыми, согласно критерию [9] не обладают хотя бы одним свойством (2) или (3). Например, если

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I, \quad r = 1, \quad \bar{A}, \bar{B} \in SO(2)$$

или

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}, \bar{B} \notin SO(2),$$

то соответствующие билинейные системы $(\bar{A}, \bar{B})$ не являются управляемыми, хотя соответствующие матрицы коммутативны.

Целью настоящей статьи является характеристика специальных свойств множеств управляемости билинейных систем с перестановочными матрицами с дискретным временем для фиксированного числа шагов. Билинейные системы представляют собой семейство простейших нелинейных систем. Как оказывается, различие таких систем от известных линейных систем состоит в конструкции топологии соответствующих множеств управляемости. Действительно, множества управляемости для линейных систем с управлениями без ограничений представляют собой аффинные (в частности, линейные) подпространства. Множества управляемости билинейных систем представляют собой линейчатые поверхности, которые в общем случае не являются аффинными множествами, и более того, невыпуклыми множествами.

Везде далее в силу критерия управляемости считается, что $n = 2$ и билинейные системы с коммутативными матрицами управляемы.

3. Основной результат 1

В рассуждениях используется понятие проективного пространства. Как известно [11–13], 2-мерное проективное пространство $\mathbb{RP}^2$ есть множество, точками которого являются вещественные прямые в 3-мерном вещественном линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящие через начало координат.

Введем требуемые обозначения. Пусть $l_{a,b} \in \mathbb{RP}^2$ – прямая

$$l_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = a + tb, t \in \mathbb{R}\},$$

описываемая параметрическим уравнением с помощью векторов $a, b \in \mathbb{R}^2$. (Здесь, в частности, при $b = 0$ прямая $l_{a,0}$ может соответствовать точке

$a \in \mathbb{R}^2$). Вектор $l_{a,b}(t) = a + tb \in \mathbb{R}^2$ отвечает точке прямой $l_{a,b}$ при параметре t . Таким образом,

$$l_{a,b} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{l_{a,b}(t)\} \equiv \bigcup_t l_{a,b}(t),$$

$$\mathbb{RP}^2 := \bigcup_{a,b \in \mathbb{R}^2} l_{a,b}.$$

Далее для удобства используется обозначение

$$\bigcup_t (\cdot) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\cdot).$$

Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ вводится [14] понятие пучка матриц $h_{A,B}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$h_{A,B}(t) = A + tB, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$h_{A,B} = \bigcup_t h_{A,B}(t).$$

Здесь пучок $h_{A,B}$ удобно интерпретировать как прямую в $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, т.е. $h_{A,B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Введем естественное определение умножения множеств:

$$h_{A,B}(t)\mathcal{X} := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}(t)x, \quad \mathcal{X} \in \mathbb{R}^2,$$

$$h_{A,B}\mathcal{X} := \bigcup_t h_{A,B}(t)\mathcal{X} = \bigcup_t \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}(t)x = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} h_{A,B}x.$$

Теорема 1. Справедливы утверждения:

- 1) $\mathcal{Y}(x^\circ, 1) \in \mathbb{RP}^2$;
- 2) $\mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$;
- 3) $\mathcal{Y}(x^\circ, K) \subset \mathbb{RP}^2$ при $K \geq 2$ и, следовательно, множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ является линейчатой поверхностью в $\mathbb{R}^2$;
- 4) $\dim \mathcal{Y}(x^\circ, 1) = 1$;
- 5) $\dim \text{Lin} \mathcal{Y}(x^\circ, K) = 2$ при $K \geq 2$.

Здесь $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ рассматривается как подмножество евклидовой плоскости в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство теоремы 1. 1. При $K = 1$ получаем по определению множества управляемости

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) = \bigcup_{u_0} ((A + u_0 B)x^\circ) = \bigcup_{u_0} (h_{A,B}(u_0)x^\circ) =$$

$$= \left(\bigcup_{u_0} h_{A,B}(u_0) \right) x^\circ = h_{A,B}x^\circ \in \mathbb{RP}^2,$$

так как

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) = h_{A,B}x^\circ = \bigcup_{\tau} ((A + \tau B)x^\circ) = \bigcup_{\tau} (Ax^\circ + \tau Bx^\circ) = l_{Ax^\circ, Bx^\circ} \in \mathbb{RP}^2.$$

2. Рассуждения проведем по индукции. Для $K = 1$ из утверждения 1 имеем

$$\mathcal{Y}(x^\circ, 1) \in \mathbb{RP}^2.$$

Предположим, что для $K > 2$ верно включение

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) \in \mathbb{RP}^2.$$

Тогда по определению произведения множеств управляемости получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) &= \bigcup_{u_0, \dots, u_K} \{y \in \mathbb{R}^2: y = (A + u_K B) \dots (A + u_0 B)x^\circ\} = \\ &= \left(\bigcup_{u_K} (A + u_K B) \right) \left(\bigcup_{u_0, \dots, u_{K-1}} \{y \in \mathbb{R}^2: y = (A + u_{K-1} B) \dots (A + u_0 B)x^\circ\} \right) = \\ &= \left(\bigcup_{u_K} (A + u_K B) \right) \mathcal{Y}(x^\circ, K) = h_{A,B} \mathcal{Y}(x^\circ, K). \end{aligned}$$

Теперь утверждение 2 следует из принципа математической индукции.

3. Данное утверждение теперь следует из п. 2 и леммы 1.

4. В силу п. 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ есть прямая в $\mathbb{R}^2$ и поэтому оно является аффинным множеством [15, §1]. Размерность $\dim \mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ непустого аффинного множества $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ считается равной размерности подпространства, параллельного ему.

5. Выбираем и фиксируем $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ из условия

$$\begin{aligned} y &\in \mathcal{Y}(x^\circ, K-1) \text{ при } K > 1, \\ y &= x^\circ \text{ при } K = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{u_{K-1}} (A + u_{K-1} B)y &\subset \mathcal{Y}(x^\circ, K), \\ \bigcup_{u_{K-1}} (A + u_{K-1} B)y &= l_{Ay, By}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Из п. 2, следовательно, получаем

$$h_{A,B} l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K+1).$$

Выбираем произвольно различные вещественные числа $t_1 \neq t_2$. Поэтому

$$h_{A,B} l_{Ay, By}(t_i) \in \mathbb{RP}^2, \quad i = 1, 2,$$

и тогда

$$\begin{aligned} h_{A,B} l_{Ay,By}(t_i) &= \bigcup_{\tau} (A(Ay + t_i By) + \tau B(Ay + t_i By)) = \\ &= l_{A(Ay+t_i By), B(Ay+t_i By)} \in \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

Вычислим определитель, связанный с векторами $B(Ay + t_i By) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \det(B(Ay + t_1 By) | B(Ay + t_2 By)) &= \det B \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(PBP^{-1}) \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(\overline{B}) \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = \\ &= \det(Ay + t_1 By | Ay + t_2 By) = (t_2 - t_1) \det(Ay | By) = \\ &= (t_2 - t_1) \det(PAP^{-1}y | PBP^{-1}y) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det(\overline{A}(P^{-1}y) | \overline{B}(P^{-1}y)) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det \overline{B} \det(\overline{B}^{-1} \overline{A}(P^{-1}y) | (P^{-1}y)) = \\ &= (t_2 - t_1) \det P \det(rR(\theta)(P^{-1}y) | (P^{-1}y)). \end{aligned}$$

В силу необходимых и достаточных условий (3) заключаем:

$$R(\theta) \neq I$$

и поэтому

$$(t_2 - t_1) \det P \det(rR(\theta)(P^{-1}y) | (P^{-1}y)) \neq 0.$$

Это в свою очередь означает, что

$$\det(B(Ay + t_1 By) | B(Ay + t_2 By)) \neq 0.$$

Поэтому прямые $l_{A(Ay+t_i By), B(Ay+t_i By)}$ при $i = 1, 2$ не являются параллельными в $\mathbb{R}^2$. Это означает, что

$$\dim \text{Lin} \{l_{A(Ay+t_1 By), B(Ay+t_1 By)}, l_{A(Ay+t_2 By), B(Ay+t_2 By)}\} = 2$$

и тем более

$$\dim \text{Lin} \mathcal{Y}(x^\circ, K) = 2$$

при $K \geq 2$.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для каждого $K \geq 1$ множества управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ являются неограниченными множествами.

Следствие 2. Множества управляемости при $K \geq 1$ могут быть представлены как объединения прямых из $\mathbb{R}^2$, т.е.

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) = \bigcup_{\alpha(K) \in \hat{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha(K)), b(\alpha(K))}, \quad l_{a(\alpha(K)), b(\alpha(K))} \in \mathbb{RP}^2,$$

где $a(\alpha(K)), b(\alpha(K)) \in \mathbb{R}^2$, $b(\alpha(K)) \neq 0$ и множество индексов $\hat{A}$ не обязано быть счетным.

4. Основной результат 2

Утверждение теоремы 1 означает, что множество управляемости для фиксированного числа шагов как геометрический объект определяется множествами из проективного пространства и может быть построено как некоторое объединение прямых из $\mathbb{R}^2$. Следующий факт связан с тем наблюдением, что для такого объединения прямых выполняются некоторые специальные свойства, которые будут установлены далее.

Теорема 2. Пусть билинейная система (A, B) с коммутативными матрицами является управляемой. Тогда справедливы утверждения:

- 1) множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представимо в виде объединения семейства замкнутых полуплоскостей из $\mathbb{R}^2$, поэтому множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ является пересечением семейства открытых полуплоскостей;
- 2) множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ в $\mathbb{R}^2$ – выпуклое множество, и, наоборот, $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ в $\mathbb{R}^2$ – невыпуклое множество.

Доказательство теоремы 2. 1. При $b \neq 0$ справедливо равенство

$$(4) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b} = h_{A,B} l_{a,b}.$$

Действительно, при $\varepsilon \geq 1$ получаем очевидное включение

$$h_{A,B} l_{a,b} \equiv 1 \cdot h_{A,B} l_{a,b} \subset \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b}.$$

Обратно. Выбираем произвольный вектор

$$x \in \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b}.$$

Это означает, что найдутся вещественные τ_1, t_1 и $\varepsilon \geq 1$ такие, что

$$x = \varepsilon h_{A,B}(\tau_1) l_{a,b}(t_1).$$

В силу леммы 2 всегда найдутся вещественные числа τ_2, t_2 такие, что

$$\varepsilon h_{A,B}(\tau_1) l_{a,b}(t_1) = h_{A,B}(\tau_2) l_{a,b}(t_2)$$

и поэтому

$$x \in h_{A,B} l_{a,b}.$$

Следовательно, получаем обратное включение

$$\bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a,b} \subset h_{A,B} l_{a,b}$$

и требуемое равенство (4) получено.

Для произвольного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2$ введем его полное описание:

$$(5) \quad \mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)},$$

где $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathbb{R}^2$, $b(\alpha) \neq 0$. Тогда получаем соответствующее равенство

$$(6) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} = h_{A,B} \mathcal{X},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \left(\varepsilon h_{A,B} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} \right) \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = h_{A,B} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = h_{A,B} \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Покажем, что множество $h_{A,B} \mathcal{X}$ есть объединение замкнутых полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$.

Действительно, выполним последовательные преобразования

$$\begin{aligned} (7) \quad \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \left(\varepsilon h_{A,B} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)} \right) \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} \bigcup_t l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t). \end{aligned}$$

Теперь по определению получаем

$$\begin{aligned} h_{A,B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) &= \bigcup_{\tau} h_{A,B}(\tau) l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \bigcup_{\tau} (A + \tau B)(a(\alpha) + tb(\alpha)) = \\ &= \bigcup_{\tau} (A(a(\alpha) + tb(\alpha)) + \tau B(a(\alpha) + tb(\alpha))) = \\ &= \bigcup_{\tau} l_{A(a(\alpha) + tb(\alpha)), B(a(\alpha) + tb(\alpha))}(\tau) = l_{A(a(\alpha) + tb(\alpha)), B(a(\alpha) + tb(\alpha))} \in \mathbb{RP}^2. \end{aligned}$$

К этому моменту использовалось определение параметрического уравнения для прямой. Теперь обратимся к соответствующему эквивалентному общему уравнению прямой на плоскости [17].

Выберем вектор $c(t, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$c^T(t, \alpha) B(a(\alpha) + tb(\alpha)) = 0.$$

Такой вектор всегда существует, и он может быть не единственен. Поэтому такой ненулевой вектор $c(t, \alpha)$ выбираем из дополнительного условия

$$c^T(t, \alpha) A(a(\alpha) + tb(\alpha)) \geq 0.$$

Положим

$$\lambda(t, \alpha) := c^T(t, \alpha)A(a(\alpha) + tb(\alpha)) \geq 0.$$

Определим множество

$$H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \lambda(t, \alpha)\},$$

которое определяет некоторое общее уравнение первоначальной прямой $l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))}$. Таким образом, верно равенство

$$l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))} = H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^-.$$

Определим множество

$$H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x \geq \lambda(t, \alpha)\},$$

которое соответствует некоторой замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^2$. В этом случае получаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \lambda(t, \alpha)\} = \\ &= \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x = \varepsilon \lambda(t, \alpha)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x \geq \lambda(t, \alpha)\} = H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq. \end{aligned}$$

Следовательно, из (7)

$$\begin{aligned} \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A, B} \mathcal{X} &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon h_{A, B} l_{a(\alpha), b(\alpha)}(t) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon l_{A(a(\alpha)+tb(\alpha)), B(a(\alpha)+tb(\alpha))} = \\ &= \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} \varepsilon H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^- = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t \bigcup_{\varepsilon \geq 1} H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq. \end{aligned}$$

И, наконец, из (6) получаем

$$(8) \quad h_{A, B} \mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcup_t H_{c(t, \alpha), \lambda(t, \alpha)}^\geq.$$

Это означает, что множество $h_{A, B} \mathcal{X}$ из (5) представляет собой объединение замкнутых полуплоскостей.

По следствию 2 теоремы 1 и (5) получаем, что структура множеств $\mathcal{X}$ и множеств управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ идентична. Следовательно, по п. 2 теоремы 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = h_{A, B} \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$ идентично множеству $h_{A, B} \mathcal{X}$.

Здесь следует заметить, что множества $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 1$ являются невырожденными прямыми и поэтому не имеют изолированных точек. Это означает, что элементы множества (5) таковы, что $l_{a(\alpha), b(\alpha)}$ есть прямые и не состоят из изолированных точек, т.е. $b(\alpha) \neq 0$, а лемма 2 используется корректно.

По (8) заключаем, что множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представляет собой объединение замкнутых полупространств в $\mathbb{R}^2$.

Наоборот, множество $\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X})$ есть дополнение к $\mathbb{R}^2$ и поэтому

$$\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X}) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap_t \left(\mathbb{R}^2 \setminus H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{\geq} \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap_t H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{<},$$

где

$$H_{c(t,\alpha), \lambda(t,\alpha)}^{<} = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^T(t, \alpha)x < \lambda(t, \alpha)\}.$$

Данное множество представляет собой открытую полуплоскость в $\mathbb{R}^2$. Как и ранее, по п. 2 теоремы 1 множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K+1) = \mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K))$ при $K \geq 1$ идентично множеству $\mathbb{R}^2 \setminus (h_{A,B}\mathcal{X})$. Следовательно, множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ при $K \geq 2$ представляет собой пересечение открытых полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$.

2. По построению открытая полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ есть выпуклое множество. Следовательно, множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ всегда есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$ как пересечение выпуклых множеств.

Докажем теперь, что для всех $K \geq 2$ множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не является выпуклым множеством. Здесь достаточно рассмотреть два случая: $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не является полуплоскостью и $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ – полуплоскость.

Если множество $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ выпукло и одновременно не есть полуплоскость, то $\mathcal{Y}(x^\circ, K) = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K))$ не может быть выпуклым множеством.

Напротив, допустим, что $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Y}(x^\circ, K)$ есть (открытая) полуплоскость (выпуклое множество). Следовательно, по предположению множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ может оказаться замкнутой полуплоскостью, а поэтому выпуклым множеством.

Рассуждаем от противного. Допустим, что имеется K , при $K \geq 2$, и такое множество управляемости $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$, которое является полуплоскостью в $\mathbb{R}^2$. Поэтому найдется ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^2$ такой, что

$$c^T x \geq \lambda > 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{Y}(x^\circ, K).$$

Выбираем произвольно

$$y \in \mathcal{Y}(x^\circ, K-1)$$

и поэтому по построению $y \neq 0$.

Поскольку

$$\mathcal{Y}(x^\circ, K) = h_{A,B}\mathcal{Y}(x^\circ, K-1),$$

то

$$h_{A,B}y = l_{Ay, By} \subset \mathcal{Y}(x^\circ, K)$$

и поэтому должно выполняться неравенство

$$c^T l_{Ay, By}(t) \geq \lambda \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

Тогда верно неравенство

$$c^T (Ay + tBy) \geq \lambda \quad \text{при } t \in \mathbb{R}.$$

В силу произвольности параметра t получаем равенство

$$c^T By = 0.$$

Поэтому получаем неравенство

$$c^T Ay = (A^T c)^T y \geq \lambda > 0 \quad \text{при } y \in \mathcal{Y}(x^\circ, K - 1).$$

Вектор $A^T c \neq 0$, поскольку матрица $A = P^{-1} \bar{A} P$ невырождена, так как $\bar{A} \in \text{SO}(2)$. Это означает, что множество $\mathcal{Y}(x^\circ, K - 1)$ есть замкнутая полуплоскость в $\mathbb{R}^2$.

Следовательно, по индукции при $K \geq 2$ набор множеств управляемости $\{\mathcal{Y}(x^\circ, K), \mathcal{Y}(x^\circ, K - 1), \dots, \mathcal{Y}(x^\circ, 1)\}$ образует набор полуплоскостей. С другой стороны, в силу п. 1 теоремы 1 множество $\mathcal{Y}(x^\circ, 1)$ есть прямая в $\mathbb{R}^2$ и не может быть полуплоскостью.

Противоречие означает, что множества $\mathcal{Y}(x^\circ, K)$ не являются замкнутыми полуплоскостями, а поэтому не может оказаться выпуклым множеством.

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

Для билинейных систем с дискретным временем и коммутативными матрицами установлены новые специальные свойства множеств управляемости для фиксированного числа шагов: множества управляемости представляют собой линейчатые поверхности; дополнение к множеству управляемости есть пересечение полуплоскостей и поэтому является выпуклым множеством.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 1. Если

$$\mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2,$$

то

$$h_{A,B} \mathcal{X} \subset \mathbb{RP}^2.$$

Доказательство леммы 2. Для одноточечного множества $\mathcal{X} = \{y\}$ по определению получаем

$$h_{A,B} y = \bigcup_t h_{A,B}(t) y = \bigcup_t (A + tB) y = \bigcup_t (Ay + tBy) = \bigcup_t l_{Ay, By}(t) = l_{Ay, By},$$

и, следовательно,

$$h_{A,B} y \in \mathbb{RP}^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
h_{A,B}l_{a,b} &= \bigcup_t h_{A,B}(t)l_{a,b} = \bigcup_t h_{A,B}(t) \left(\bigcup_\tau l_{a,b}(\tau) \right) = \bigcup_t h_{A,B}(t) \left(\bigcup_\tau (a + \tau b) \right) = \\
&= \bigcup_t \bigcup_\tau h_{A,B}(t)(a + \tau b) = \bigcup_t \bigcup_\tau (h_{A,B}(t)a + \tau h_{A,B}(t)b) = \\
&= \bigcup_t \bigcup_\tau \left(l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b}(\tau) \right) = \bigcup_t l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b} \subset \mathbb{RP}^2,
\end{aligned}$$

поскольку по построению

$$l_{h_{A,B}(t)a, h_{A,B}(t)b} \in \mathbb{RP}^2.$$

Следовательно, по определению каждое множество $\mathcal{X}$ из $\mathbb{RP}^2$ может быть представлено в виде объединения прямых из $\mathbb{RP}^2$:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}} l_{a(\alpha), b(\alpha)}, \quad l_{a(\alpha), b(\alpha)} \in \mathbb{RP}^2,$$

где $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Это в силу проведенных рассуждений означает, что

$$h_{A,B}\mathcal{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} h_{A,B}l_{a(\alpha), b(\alpha)} \subset \mathbb{RP}^2,$$

поскольку

$$h_{A,B}l_{a(\alpha), b(\alpha)} \subset \mathbb{RP}^2.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для произвольных вещественных чисел τ_1, t_1 и $\varepsilon \geq 1$ найдутся подходящие вещественные числа τ_2, t_2 такие, что

$$(П.1) \quad \varepsilon h_{A,B}(\tau_1)l_{a,b}(t_1) = h_{A,B}(\tau_2)l_{a,b}(t_2)$$

при $b \neq 0$.

Доказательство леммы 2. Заметим, что равенство (П.1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется аналогичное равенство

$$(П.2) \quad \varepsilon h_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau_1)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t_1) = h_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau_2)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t_2),$$

где

$$\overline{a} = P^{-1}a, \quad \overline{b} = P^{-1}b.$$

Действительно, по определению

$$\begin{aligned}
h_{A,B}(\tau)l_{a,b}(t) &= (A + \tau B)(a + tb) = (P\overline{A}P^{-1} + \tau P\overline{B}P^{-1})(a + tb) = \\
&= P(\overline{A}P^{-1} + \tau\overline{B}P^{-1})(a + tb) = P(\overline{A} + \tau\overline{B})(P^{-1}a + tP^{-1}b) = \\
&= P(\overline{A} + \tau\overline{B})(\overline{a} + t\overline{b}) = Ph_{\overline{A}, \overline{B}}(\tau)l_{\overline{a}, \overline{b}}(t)
\end{aligned}$$

и матрица P невырожденная.

Равенство (П.2) запишем подробнее:

$$(П.3) \quad \varepsilon (rR(\varphi_1) + \tau_1 R(\varphi_2)) (\bar{a} + t_1 \bar{b}) = (rR(\varphi_1) + \tau_2 R(\varphi_2)) (\bar{a} + t_2 \bar{b}).$$

В силу $R(\varphi_2) \in \text{SO}(2)$ равенство (П.3) эквивалентно равенству

$$(П.4) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a} + t_1 \bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a} + t_2 \bar{b}).$$

Положим

$$(П.5) \quad t_i = t_i^\circ + t, \quad \bar{a}^\circ = \bar{a} + t\bar{b}, \quad i = 1, 2,$$

где t_i°, t будут определены далее. Поскольку

$$(П.6) \quad \bar{a} = t_i \bar{b} = (\bar{a} + t\bar{b}) + t_i^\circ \bar{b} \equiv \bar{a}^\circ + t_i^\circ \bar{b},$$

то число t выберем из условия

$$\bar{b}^T (\bar{a} + t\bar{b}) = 0$$

или

$$\bar{b}^T \bar{a}^\circ = 0.$$

Следовательно,

$$(П.7) \quad t = -\frac{\bar{b}^T \bar{a}}{\bar{b}^T \bar{b}}, \quad t_i^\circ = t_i + \frac{\bar{b}^T \bar{a}}{\bar{b}^T \bar{b}}.$$

Используя (П.5)–(П.7) в (П.4), получаем эквивалентное равенство

$$(П.8) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a}^\circ + t_1^\circ \bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a}^\circ + t_2^\circ \bar{b}).$$

Пусть $C \in \text{SO}(2)$, тогда в силу коммутативности матриц из $\text{SO}(2)$ получаем эквивалентное равенство

$$\varepsilon C (rR(\theta) + \tau_1 I) (\bar{a}^\circ + t_1^\circ \bar{b}) = C (rR(\theta) + \tau_2 I) (\bar{a}^\circ + t_2^\circ \bar{b})$$

или

$$(П.9) \quad \varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (C\bar{a}^\circ + t_1^\circ C\bar{b}) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (C\bar{a}^\circ + t_2^\circ C\bar{b}).$$

По условию $b \neq 0$, и поэтому матрица C может быть выбрана так, что

$$(П.10) \quad \mu > 0, \quad C\bar{b} = \mu e^1, \quad C\bar{a}^\circ = \lambda e^2; \quad e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вещественное число λ может быть произвольно.

Здесь равенство

$$\lambda = 0$$

верно тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}^\circ$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Действительно, пусть $\lambda = 0$, тогда из (П.10) следует

$$\bar{a}^\circ = 0.$$

По определению (П.6) и (П.7) получаем

$$(П.11) \quad 0 = (\bar{a}^\circ)^\top \bar{a}^\circ = \left(\bar{a} - \frac{\bar{b}^\top \bar{a} \bar{b}}{\bar{b}^\top \bar{b}} \right)^\top \left(\bar{a} - \frac{\bar{b}^\top \bar{a} \bar{b}}{\bar{b}^\top \bar{b}} \right) = \bar{a}^\top \bar{a} - \frac{(\bar{b}^\top \bar{a})^2}{\bar{b}^\top \bar{b}} = \\ = (\bar{b}^\top \bar{b}) \left((\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 \right)$$

и поэтому

$$(П.12) \quad (\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 = 0.$$

Как известно, неравенство Коши–Буняковского

$$(\bar{a}^\top \bar{a}) (\bar{b}^\top \bar{b}) - (\bar{b}^\top \bar{a})^2 \geq 0$$

обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Обратно, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то из (П.12) получаем (П.11), и это есть равенство $\bar{a}^\circ = 0$. Теперь из (П.10) получаем $\lambda = 0$.

В силу (П.10) замечаем, что равенство (П.9) эквивалентно соотношению

$$\varepsilon (rR(\theta) + \tau_1 I) (\lambda e^2 + \mu t_1^\circ e^1) = (rR(\theta) + \tau_2 I) (\lambda e^2 + \mu t_2^\circ e^1)$$

или

$$(П.13) \quad \varepsilon rR(\theta) \begin{pmatrix} \mu t_1^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} + \varepsilon \tau_1 \begin{pmatrix} \mu t_1^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} = rR(\theta) \begin{pmatrix} \mu t_2^\circ \\ \lambda \end{pmatrix} + \tau_2 \begin{pmatrix} \mu t_2^\circ \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая:

$$\lambda = 0, \quad \lambda \neq 0.$$

Пусть $\lambda = 0$. Введем обозначения

$$\hat{t}_i := r^{-1} \mu t_i^\circ, \quad i = 1, 2; \quad \hat{\tau}_1 := \varepsilon \tau_1, \quad \hat{\tau}_2 := \tau_2.$$

Тогда уравнение (П.13) приводится к виду

$$(П.14) \quad \varepsilon R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_1 \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_2 \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покоординатная запись (П.14) приводит к появлению двух скалярных уравнений

$$(П.15) \quad \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \hat{\tau}_2 \hat{t}_2, \\ -\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta = -\hat{t}_2 \sin \theta.$$

В силу (3) имеем $\sin \theta \neq 0$ и поэтому

$$(П.16) \quad \hat{t}_2 = \varepsilon \hat{t}_1.$$

Подстановка (П.16) в (П.15) приводит к уравнению

$$\varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \hat{\tau}_2 \hat{t}_1$$

или

$$\hat{t}_1 (\hat{\tau}_1 - \varepsilon \hat{\tau}_2) = 0.$$

Если $\hat{t}_1 = 0$, то это равенство выполняется тривиально, и, следовательно, $\hat{\tau}_2$ можно выбирать произвольно.

Если же $\hat{t}_1 \neq 0$, то должно быть верно равенство

$$(П.17) \quad \hat{\tau}_2 = \varepsilon^{-1} \hat{\tau}_1.$$

Это означает, что (П.17) и (П.16) составляют допустимое решение уравнения (П.14) для произвольных вещественных чисел $\hat{\tau}_1, \hat{t}_1$ и $\varepsilon \geq 1$. Поэтому при $\lambda = 0$ уравнение (П.14) всегда разрешимо относительно $\hat{\tau}_2, \hat{t}_2$. Здесь использовалась цепочка эквивалентных уравнений (П.14), (П.9), (П.8), (П.4), (П.3), (П.2).

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Введем обозначения

$$(П.18) \quad \hat{t}_i := r^{-1} \lambda^{-1} \mu t_i^0, \quad i = 1, 2; \quad \hat{\tau}_1 := \varepsilon \tau_1, \quad \hat{\tau}_2 := \tau_2.$$

Тогда уравнение (П.13) приводится к виду

$$(П.19) \quad \varepsilon R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_1 \begin{pmatrix} \hat{t}_1 \\ 1 \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{\tau}_2 \begin{pmatrix} \hat{t}_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к покоординатной записи

$$(П.20) \quad \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \sin \theta + \hat{\tau}_2 \hat{t}_2,$$

$$(П.21) \quad -\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + \varepsilon \cos \theta + \hat{\tau}_1 = -\hat{t}_2 \sin \theta + \cos \theta + \hat{\tau}_2.$$

Из (П.21) выражаем $\hat{\tau}_2$ через остальные параметры:

$$(П.22) \quad \hat{\tau}_2 = (\hat{t}_2 - \varepsilon \hat{t}_1) \sin \theta + (\varepsilon - 1) \cos \theta + \hat{\tau}_1.$$

Подстановка (П.22) в (П.20) приводит к соотношению

$$\varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \cos \theta + \sin \theta + (\hat{t}_2 - \varepsilon \hat{t}_1) \hat{t}_2 \sin \theta + (\varepsilon - 1) \hat{t}_2 \cos \theta + \hat{\tau}_1 \hat{t}_2$$

или после преобразования

$$(П.23) \quad \begin{aligned} & \hat{t}_2^2 \sin \theta + [\cos \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + (\varepsilon - 1) \cos \theta + \hat{\tau}_1] \hat{t}_2 + \\ & + [(1 - \varepsilon) \sin \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta - \hat{\tau}_1 \hat{t}_1] = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (П.23) очевидно сводится к квадратному уравнению относительно переменной $\hat{t}_2$. Составим соответствующий дискриминант и выполним очевидные преобразования:

$$\begin{aligned} D &= [\varepsilon \cos \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta + \hat{\tau}_1]^2 - 4 \sin \theta [(1 - \varepsilon) \sin \theta - \varepsilon \hat{t}_1 \cos \theta - \hat{\tau}_1 \hat{t}_1] = \\ &= \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 - 2\varepsilon^2 \hat{t}_1 \cos \theta \sin \theta + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon^2 \cos \theta - \\ &\quad - 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta - 4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta + 4\varepsilon \hat{t}_1 \sin \theta \cos \theta + 4\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 \sin \theta = \\ &= \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 + 2\varepsilon \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + 2\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \cos \theta - 4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

По условию $\varepsilon \geq 1$, поэтому следуют неравенства

$$\begin{aligned} -4(1 - \varepsilon) \sin^2 \theta &\geq 0, \\ \varepsilon^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta &\geq (\varepsilon - 2)^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем неравенство вида

$$\begin{aligned} D &\geq \varepsilon^2 \cos^2 \theta + (\varepsilon - 2)^2 \hat{t}_1^2 \sin^2 \theta + \hat{\tau}_1^2 + \\ &\quad + 2\varepsilon \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta \cos \theta + 2\hat{\tau}_1 \hat{t}_1 (2 - \varepsilon) \sin \theta + \\ &\quad + 2\hat{\tau}_1 \varepsilon \cos \theta = [\varepsilon \cos \theta + (2 - \varepsilon) \hat{t}_1 \sin \theta + \hat{\tau}_1]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, у квадратного уравнения (П.23) всегда имеется хотя бы один вещественный корень $\hat{\tau}_1$. Это приводит к выводу, что уравнение (П.19) разрешимо относительно $\hat{\tau}_2, \hat{t}_2$ для произвольных $\varepsilon \geq 1$ и вещественных $\hat{\tau}_1, \hat{t}_1$. Однозначная зависимость $\hat{\tau}_i, \hat{t}_i$ от τ_i, t_i в силу формул (П.18) и (П.8) означает, что уравнение (П.3) разрешимо благодаря разрешимости соответствующих эквивалентных соотношений.

Разрешимость (П.3) эквивалентна разрешимости (П.2) и (П.1).

Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elliot D.L.* Bilinear Control Systems: Matrices in Action. Dordrecht: Springer, 2009.
2. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. New York: Academic, 1973.
3. *Mohler R.R., Kolodziej W.J.* An Overview of Bilinear System Theory and Applications // IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics. 1980. V. 10. No. 10. P. 683–688.
4. *Негойц К.* Применение теории систем к проблемам управления. М.: Мир, 1981.
5. *Сиротин А.Н.* Об управляемости однородных билинейных дискретных систем с коммутативными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2000. № 2. С. 13–14.
6. *Сиротин А.Н.* О свойствах управляемости билинейных систем с дискретным временем, связанных с блочно-треугольными и перестановочными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2018. № 6. С. 4–19.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820010126>

- Sirotin A.N.* On the Properties of Controllability of Discrete-Time Bilinear Systems Associated with Block-Triangular and Permutation Matrices // J. Comput Syst. Sci. Int. 2018. V. 57. No. 6. P. 841–853. <https://doi.org/10.1134/S1064230718060102>
7. *Tie L., Cai K.-Y., Lin Y.* On Controllability of Discrete-Time Bilinear Systems // Journal of the Franklin Institute. 2011. V. 348. No. 5. P. 933–940. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.03.003>
 8. *Tie L., Lin Y.* On Controllability of Two-Dimensional Discrete-Time Bilinear Systems // International Journal of Systems Sciences. 2015. V. 46. No. 10. P. 1741–1751. <https://doi.org/10.1080/00207721.2013.834999>
 9. *Сиротин А.Н.* Критерий управляемости дискретных билинейных систем с перестановочными матрицами // Известия РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 68–87. <https://doi.org/10.31857/S0002338820010126>
Sirotin A.N. Controllability Criterion for Discrete Bilinear Systems with Transition Matrices // J. Comput Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. No. 1. P. 63–82. <https://doi.org/10.1134/S1064230720010116>
 10. *Козорез Д.А., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О некоторых свойствах управляемых коммутативных билинейных систем с дискретным временем // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2024). 1–8 сентября 2024 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ. 2024. С. 325–326.
 11. *Крум Е.В.* Проективная геометрия. Санкт-Петербург: Лань, 2023.
 12. *Прасолов В.В., Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: МЦНМО, 2022.
 13. *Бэр Р.* Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1955.
 14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
 15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
 16. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
 17. *Ильин В.А., Поздняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Арутюновым.

Поступила в редакцию 07.10.2025

После доработки 29.12.2025

Принята к публикации 12.01.2026