

© 2026 г. О.Ю. СУМЕНКОВ (sumenkov.oy@talantiuspeh.ru),
И.М. ТАРАБУКИН (tarabukin.im@talantiuspeh.ru),
С.В. ГУСЕВ, канд. физ.-мат. наук (gusev.sv@talantiuspeh.ru)
(Научно-технологический университет “Сириус”, Сириус),
Л.М. ФРИДМАН, д-р техн. наук (lfridman@unam.mx)
(Национальный автономный университет Мексики, Мехико)

ПРИЛОЖЕНИЕ ЛЯПУНОВСКОГО СИНТЕЗА К РЕЛЕЙНОМУ УПРАВЛЕНИЮ КЛАССОМ ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Рассматривается задача стабилизации класса периодических линейных систем с неопределенностями в матрицах состояния/управления и незатухающими согласованными возмущениями. Предложен метод на основе квадратичной функции Ляпунова, построенной для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния, существование которой доказывается с помощью дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. Показано, что любая стабилизирующая обратная связь на его основе определяет семейство линейных многообразий (скольжения), где траектории системы асимптотически устойчивы. Синтезируются разрывные регуляторы, обеспечивающие сходимость решений к выбранному многообразию за конечное время в присутствии неопределенности в матрице управления и внешних возмущениях. Эффективность методики подтверждена численным моделированием.

Ключевые слова: скользящие режимы, разрывное управление, неопределенные системы, Ляпуновские методы, линейные системы с периодическими коэффициентами.

DOI: 10.7868/S2413977726110014

1. Введение

В классическом подходе к построению вынужденного скользящего режима, предложенном В. И. Уткиным [1], первым шагом является выбор многообразия пониженной размерности (поверхности скольжения), которое должно обладать желаемыми динамическими свойствами. Это можно осуществить, например, путем последовательного преобразования системы в регулярную форму [2] и последующего задания собственных значений или же, альтернативно, используя формулу Аккерманна и т.д. После чего формируется разрывный (релейный) закон управления, обеспечивающий достижение поверх-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20009).

ности скольжения за конечное время. Изначально, для доказательства использовались негладкие функции Ляпунова, требующие анализа устойчивости на пересечениях поверхностей скольжения, позже были получены достаточные условия для систем с доминирующей диагональю [3]. Таким образом, данный подход обеспечивает сходимость за конечное время к многообразию с желаемым поведением, а кроме того, инвариантность по отношению к *согласованным* возмущениям [4].

Группа Г. Лейтманна впоследствии развила метод [5], позже названный *Ляпуновским синтезом*. В данном подходе рассматривается система с неопределенностью, для устойчивой номинальной части которой предполагается известной (номинальная) функция Ляпунова. После чего строится унитарное управление [6], с тем чтобы компенсировать согласованные возмущения, а также обеспечить применимость номинальной функции Ляпунова для исследования устойчивости исходной неопределенной системы. Следует отметить, что существование или возникновение скользких режимов вследствие добавления разрывного унитарного управления в рамках данного метода авторами не рассматривалось.

1.1. Мотивационный пример управления с позиций Ляпуновского синтеза и скользких режимов

Рассмотрим автономную систему $(x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m)$ аффинную по управлению с неопределенностью в матрице управления и ограниченным возмущением $\delta(t, x)$, действующим в канале управления,

$$(1) \quad \dot{x} = f(x) + B(x) ((\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x)),$$

где $f(x)$, $B(x)$ – известные гладкие непрерывные функции, а функция $\Delta B(t)$ неизвестна, но ограничена. Пусть существует *вспомогательный* закон управления по обратной связи $u_{\text{aux}} \triangleq \varphi(x)$ такой, что при замыкании системы

$$(2) \quad \dot{x} = f(x) + B(x)u_{\text{aux}}$$

ее решения асимптотически устойчивы. Также предположим, что известна непрерывная функция Ляпунова $V(x)$, такая что для ее производной на решениях замкнутой системы (2) выполняется неравенство $\dot{V}(x) \leq -\alpha(\|x\|)$, где α – $\mathcal{K}$ -функция.

Следуя процедуре Ляпуновского синтеза, обозначив $(\partial V(x)/\partial x)^\top B(x)$ как $w^\top(x)$, вычислим производную функции Ляпунова $V(x)$ на решениях исходной *возмущенной* системы (1), замкнутой $u = \varphi(x) + v$:

$$(3) \quad \dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) + 2w^\top(x) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))v + \delta(t, x) + \Delta B(t)\varphi(x) \right].$$

Тогда цель нового управления v , изначально реализованного в виде унитарного регулятора [6]

$$v = -\kappa_{\text{unit}}(t, x) \frac{w(x)}{\|w(x)\|},$$

где $\kappa_{\text{unit}}(t, x) \in \mathbb{R}_{++}$ (здесь и далее $\mathbb{R}_{++}$ ($\mathbb{R}_+$) обозначает множество положительных (неотрицательных) вещественных чисел), при его подстановке в (3)

$$\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) - 2w^\top(x) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) \kappa_{\text{unit}}(t, x) \frac{w(x)}{\|w(x)\|} - \delta(t, x) - \Delta B(t)\varphi(x) \right]$$

состоит в том, чтобы обеспечить неотрицательность выражения в скобках, предполагая ограниченность $\|\delta(t, x) + \Delta B(t)\varphi(x)\| \leq \Delta(t, x)$. Откуда будет следовать: $\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|) < 0$ – асимптотическая устойчивость замкнутой системы (1).

При рассмотрении (3) заметим, что идейно альтернативный подход к обеспечению неравенства $\dot{V}(x) < 0$ на решениях замкнутой системы предлагается в теории скользящих режимов. Выбрав $w(x) \triangleq B(x)^\top (\partial V(x)/\partial x)$ в качестве *переменной скольжения*, синтезируем **разрывное** управление, например векторное

$$u = \kappa_{\text{rel}}(t, x) \text{Sign}(w(x)),$$

где

$\kappa_{\text{rel}}(t, x) = \text{diag}\{\kappa_{\text{rel}_1}, \dots, \kappa_{\text{rel}_m}\}$, $\text{Sign}(w(x)) = [\text{sign}(w_1(x)), \dots, \text{sign}(w_m(x))]^\top$, такое что равенство $w(t, x) = 0$ *будет выполняться* для всех $t \geq t_w \geq 0$. Соответственно для $\forall t \geq t_w$ будет справедливо неравенство $\dot{V} \leq -\alpha(\|x\|)$.

Таким образом, процедура Ляпуновского синтеза предоставляет естественный выбор переменной скольжения в виде $w(x) = B(x)^\top (\partial V(x)/\partial x)$. Более того, любая функция Ляпунова для вспомогательной системы позволяет сгенерировать поверхность разрыва, которая гарантирует устойчивость возмущенной системы. В свою очередь, если задана переменная скольжения (поверхность скольжения), то в теории скользящих режимов предлагается множество регуляторов, в том числе непрерывные, Липшицевы и даже алгоритмы на высших порядков [7, 8]. Соответственно, независимо развиваемые подходы – Ляпуновский синтез и скользящие режимы – могут существенным образом обогатить друг друга.

С точки зрения данной парадигмы первым примером можно считать работу [9], где для *линейной автономной системы с неопределенностями* авторами была предпринята попытка продемонстрировать возможность выбора множества линейных поверхностей скольжения на основе квадратичной функции Ляпунова, используя алгебраическое уравнение Риккати. Более детально данный подход был развит в [10], где для аналогичных целей применялся аппарат линейно-матричных неравенств (ЛМН), а также были получены необходимые и достаточные условия на существование такого множества поверхностей скольжения. Значительно позже утверждение о том, что существование стабилизирующей обратной связи на основе квадратичной функции Ляпунова эквивалентно существованию регулятора на скользящих режимах (существованию многообразия скольжения), было сформулировано в [11], а затем приложено к задаче синтеза отказоустойчивого управления в [8].

Обобщение подхода к стабилизации систем с неопределенными коэффициентами в присутствии согласованных возмущений с позиций теории скользящих режимов [11] для систем с *периодическими* коэффициентами находится на начальной стадии.

В частности, в [12] исследовалась робастная орбитальная стабилизация в контексте управления неполноприводными системами с помощью метода виртуальных сервосвязей [13]. В работе с использованием преобразования Флоке–Ляпунова периодическая линеаризованная трансверсальная динамика приводилась к автономной системе, после чего происходил синтез линейной поверхности скольжения. Позднее в [14] для линейной системы с периодическими коэффициентами и скалярным управлением была предложена процедура построения скользящего режима, служащего для компенсации ограниченных согласованных возмущений, зависящих от времени.

Задача стабилизации систем с *периодическими коэффициентами* при наличии внешних возмущений рассматривалась теоретически в [15], а для нестационарных систем в [16]. Подобная задача в случае неопределенностей представляет интерес для ряда приложений, таких как стабилизация периодических траекторий шагающих механизмов [17], сферических роботов [18], маятниковых систем [13], манипуляторов [19, 20] и др.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается возмущенная линейная система с неопределенными [21] *периодическими* коэффициентами

$$(4) \quad \dot{x} = [A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)]x + B(t)[(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x)],$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих воздействий, $A(t) = A(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) = B(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – известные непрерывные T -периодические матричные функции. Неопределенность в матрице состояния принадлежит образу $B(t)$; $E(t) = E(t+T) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ есть известная непрерывная T -периодическая матричная функция; матричная функция $\Gamma(t) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ неизвестна. Неопределенность в матрице управления определяется неизвестным $\Delta B(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $\delta(t, x) \in \mathbb{R}^m$ – вектор возмущений, действующих в канале управления (*согласованных*) [4].

Допущение 1. Относительно неопределенностей и вектора возмущения системы (4) предполагается выполненным следующее:

Д.1.1 Неопределенность в матрице состояний удовлетворяет оценке

$$\Gamma(t)^\top \Gamma(t) \leq \mathbb{I};$$

Д.1.2 Неопределенность в матрице управления удовлетворяет оценке²

$$\|\Delta B(t)\|_* \leq \bar{\varepsilon} < 1;$$

² Через $\|W\|_2$ обозначена спектральная норма W , а через $\|W\|_\infty$ – максимальная сумма абсолютных значений элементов строк W .

Д.1.3 Возмущение $\delta(t, x)$ ограничено известной неотрицательной функцией $\rho(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$, так что

$$0 \leq \|\delta(t, x)\|_2 \leq \rho(t, x).$$

Отметим, что допущение **Д.1.1** не умаляет общности неопределенности в матрице состояния, поскольку можно провести ее масштабирование за счет соответствующего выбора матричных функций $B(t)$ и $E(t)$.

Задача 1. Синтезировать закон управления линейной системы с периодическими коэффициентами при наличии ограниченных согласованных возмущений и неопределенностей заданной структуры в матрицах состояния и управления (4), который гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

В данной работе предлагается решение задачи 1 на основе Ляпуновского синтеза, включающее три этапа. На первом этапе для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния строятся квадратичные функции Ляпунова на основе анализа дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. На втором этапе указанные функции используются для построения семейства периодических многообразий скольжения пониженной размерности, на которых замкнутая система асимптотически устойчива. На третьем этапе синтезируется разрывный регулятор (векторный и унитарный), обеспечивающий достижение выбранного многообразия за конечное время при наличии неопределенностей в матрице управления и ограниченных согласованных возмущений.

Ключевые особенности подхода заключаются в следующем: 1. Разделение неопределенностей между этапами синтеза: неопределенности в матрице состояния учитываются на этапе построения функции Ляпунова и поверхности скольжения, тогда как неопределенности в матрице управления и согласованные внешние возмущения компенсируются средствами скользящих режимов. 2. Синтез разрывного управления осуществляется без приведения системы к регулярной форме [1, 2]. Переменная скольжения задается непосредственно в исходных координатах, это сохраняет структуру системы (включая структуру неопределенностей) и исключает необходимость введения дополнительных нестационарных преобразований координат, что особенно важно для систем с периодическими коэффициентами.

3. Стабилизация вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния

Сначала рассмотрим систему (4) без учета неопределенности в матрице управления и возмущения

$$(5) \quad \dot{x} = \left[A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t) \right] x + B(t)u.$$

Определение 1 [22, 23]. Пара $A(t)$, $B(t)$ называется стабилизируемой тогда и только тогда, когда существует T -периодическая $m \times n$ матричная функция $K(t) = K(t + T)$, такая что система $\dot{x} = (A(t) + B(t)K(t))x$ устойчива.

С учетом этого определения сформулируем следующее содержательное утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) Пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема на периоде $[0, T]$;
- 2) Неопределенная матричная функция $\Gamma(t)$ удовлетворяет допущению **Д.1.1**.

Тогда система (5), замкнутая линейной обратной связью с периодическими коэффициентами

$$(6) \quad u = -R^{-1}(t) B^{\top}(t) P(t)x,$$

асимптотически устойчива. Здесь $P(t) \in \mathbb{S}_{++}^n$ ³ является непрерывным T -периодическим положительно определенным решением периодического дифференциального уравнения Риккати

$$(7) \quad \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\top}(t)P(t) - P(t)B(t) (R^{-1}(t) - \mu(t)\mathbb{I}) B^{\top}(t)P(t) + \\ + \frac{1}{\mu(t)} E^{\top}(t) E(t) + Q(t) = 0$$

для заданных непрерывных $Q(t) = Q(t + T) \in \mathbb{S}_{++}^n$, $R(t) = R(t + T) \in \mathbb{S}_{++}^m$ и $0 < \mu(t) < \lambda_{\min}(R^{-1}(t))$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова $V(t, x(t)) = x(t)^{\top} P(t) x(t)$. Производная $V(t, x(t))$ на решениях замкнутой системы (5), (6) имеет вид

$$(8) \quad \dot{V}(t, x) = x^{\top} \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^{\top}(t)P(t) \right] x - \\ - 2x^{\top} P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x + \\ + x^{\top} \left[(B(t)\Gamma(t)E(t))^{\top} P(t) + P(t)B(t)\Gamma(t)E(t) \right] x.$$

Воспользовавшись известным фактом [21], что для любых матриц X , Y соответствующих размерностей выполняется неравенство $X^{\top}Y + Y^{\top}X \leq \mu X^{\top}X + \frac{1}{\mu}Y^{\top}Y$ для любых $\mu > 0$, заметим, что для части (8), содержащей неопределенность, справедливо следующее неравенство:

$$x^{\top} \left[P(t)B(t)\Gamma(t)E(t) + \Gamma^{\top}(t)E^{\top}(t)B^{\top}(t)P(t) \right] x \leq \\ \leq x^{\top} \left[\mu(t)P(t)B(t)B^{\top}(t)P(t) + \frac{1}{\mu(t)} E^{\top}(t)\Gamma^{\top}(t)\Gamma(t)E(t) \right] x$$

³ Здесь и далее $\mathbb{S}_{++}^n$ обозначает конус положительно определенных матриц размером $n \times n$.

для некоторой гладкой скалярной функции $\mu(t) > 0$. Принимая во внимание **Д.1.1**: $\Gamma^\top(t)\Gamma(t) \leq \mathbb{I}$, покажем, что выражение (8) ограничено сверху следующим образом:

$$(9) \quad \dot{V}(t, x) \leq x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x - \\ - x^\top P(t)B(t) \left[2R^{-1}(t) - \mu(t)\mathbb{I} \right] B^\top(t)P(t)x + \frac{1}{\mu(t)} x^\top E^\top(t)E(t)x.$$

Вычтя периодическое дифференциальное уравнение Риккати (7) из (9), получим

$$\dot{V}(t, x) \leq -x^\top P(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)P(t)x - x^\top Q(t)x \leq -x^\top Q(t)x < 0.$$

Из того факта, что $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывны T -периодичны и положительно определены, следует, что $\exists \alpha > 0 : Q(t) \geq \alpha P(t) \forall t$, это влечет оценку $\dot{V}(t, x(t)) \leq -\alpha V(t, x(t))$ на решениях замкнутой системы и, соответственно, $V(t, x(t)) \leq e^{-\alpha t} V(0, x(0)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу их непрерывности и периодичности существует $\beta > 0$, такое что $\|x(t)\|^2 \leq \beta V(t, x(t))$ для $\forall t$, откуда следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы (5), (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 гарантирует (см. [23], теорема 6.3) существование периодического положительно определенного решения $P(t) = P(t+T) \in \mathbb{S}_{++}^n$ дифференциального уравнения Риккати (7) при $0 < \mu(t) < \lambda_{\min}(R^{-1}(t))$ в случае согласованных неопределенностей $B(t)\Gamma(t)E(t)$.

4. Стабилизация исходной возмущенной системы (4)

В соответствии с процедурой Ляпуновского синтеза, описанной в разделе 1.1, введем новую переменную

$$(10) \quad w(t, x) \triangleq B(t)^\top (\partial V(t, x)/\partial x) = B^\top(t)P(t)x \triangleq K(t)x,$$

определяемую периодической функцией Ляпунова $P(t)$ системы (5), которая была получена с помощью стабилизирующего решения уравнения (7).

4.1. Ляпуновский синтез для системы (4)

Вторая часть подхода к стабилизации системы (4) на основе Ляпуновского синтеза заключается в построении унитарного регулятора на основе теоремы 1. В частности, выпишем производную функции Ляпунова из теоремы 1 на решениях системы (4), замкнутую $u(t, x) = v - R^{-1}(t)K(t)x$ при $K(t)$, определяемым (10),

$$(11) \quad \dot{V} = x^\top \left(\dot{P}(t) + P(t)A_{cl}(t) + A_{cl}^\top(t)P(t) \right) x + \\ + 2x^\top P(t)B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))v - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x + \delta(t, x) \right],$$

где $A_{cl}(t) \triangleq A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t) - B(t)R^{-1}(t)K(t)$.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, а также неопределенность $\Delta B(t)$ и возмущение $\delta(t, x)$ удовлетворяют допущениям Д.1.2 и Д.1.3 соответственно. Тогда регулятор вида

$$(12) \quad u = -R^{-1}(t)K(t)x - \kappa_{lr}(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|},$$

где $w(t, x)$ определяется (10), а коэффициент $\kappa_{lr}(t, x) > 0$ выбран так что

$$(13) \quad \kappa_{lr}(t, x) > \frac{\rho(t, x) + \bar{\varepsilon} \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|}{1 - \bar{\varepsilon}},$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (4).

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Отметим, несмотря на то, что утверждение 1 устанавливает асимптотическую устойчивость системы с *верхней* оценкой скорости сходимости (определяемой теоремой 1) к тривиальному решению $x = 0$, фактическое поведение решения $x(t)$ при наличии возмущений остается неопределенным, поскольку не гарантируется выполнение условия $w(t, x) = 0$.

В этой ситуации естественным образом привлекается теория скользящих режимов, позволяющая обеспечить не только асимптотическую устойчивость системы (4), но и *точно предопределить* динамику $x(t)$ на заданном многообразии скольжения начиная с некоторого момента времени $t_w \geq 0$. Это достигается благодаря свойству инвариантности (invariance conditions) скользящих режимов по отношению к согласованным возмущениям [4].

4.2. Синтез скользящих режимов

Важно подчеркнуть, что в отличие от случая линейных поверхностей скольжения для систем с постоянными коэффициентами в настоящей работе рассматривается система с периодическими коэффициентами. В этом случае функция Ляпунова и соответствующий стабилизирующий линейный закон управления (6) зависят от времени t явным образом. Введенная ранее переменная (скольжения) (10) задает семейство линейных многообразий скольжения $\mathcal{W}(t) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : w(t, x) = 0\}$. В связи с этим возникает необходимость предварительного исследования свойств данного семейства и условий, при которых возможно обеспечить достижение и поддержание скользящего режима.

4.2.1. Исследование поведения решений замкнутой системы на выбранном многообразии скольжения

Следующая теорема позволяет описать поведение решений системы (4) на $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, а также следующие условия:

$$1) \text{ rank } B(t) = m, \forall t$$

2) Неопределенность в матрице управления $\Delta B(t)$ удовлетворяет допущению Д.1.2;

3) Известен некоторый закон управления $\psi(t, x)$, обеспечивающий $w(t, x) = 0$ (10) для некоторого решения $x(t)$ системы (4), замкнутой $\psi(t, x)$, за конечное время t_w .

Тогда это решение $x(t)$ асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы 2. Поведение переменной скольжения $w(t, x)$ (10) в силу решений (4) может быть описано следующим выражением:

$$\dot{w}(t, x) = \dot{K}(t)x + K(t)\dot{x} = \left[\dot{K}(t) + K(t)A_{\Delta}(t) \right] x + K(t)B(t) [(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t)],$$

где $A_{\Delta}(t) = A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)$. Условие теоремы предполагает существование закона управления $\psi(t, x)$, обеспечивающего выполнение $w(t, x) = 0$; следовательно, $\dot{w}(t, x) = 0$ для всех $t \geq t_w$. Тогда управление для замкнутой системы при $t \geq t_w$, также известное как *эквивалентное управление* [1], имеет вид

$$(14) \quad u_{eq} = -(\mathbb{I} + \Delta B(t))^{-1} \left(\delta(t) + (K(t)B(t))^{-1} \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right] x \right).$$

Заметим, что $(\mathbb{I} + \Delta B(t))^{-1}$ существует в силу Д.1.2, а матрица $K(t)B(t) = B^{\top}(t)P(t)B(t)$ не вырождается, поскольку $B(t)$ полного ранга m в соответствии с условием теоремы, а $P(t) \succ 0$ из условия теоремы 1.

Подставив эквивалентное управление (14) в исходную систему (4), получим, так называемое уравнение *идеального скользящего режима*

$$(15) \quad \dot{x} = \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right) x.$$

Выберем в качестве кандидата функцию Ляпунова, использованную в доказательстве теоремы 1. Ее производная на решениях (15) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) = & x^{\top} P(t) \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - \right. \\ & \left. - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right) x + \\ & + x^{\top} \left(\left[\mathbb{I} - B(t)(K(t)B(t))^{-1}K(t) \right] A_{\Delta}(t) - \right. \\ & \left. - B(t)(K(t)B(t))^{-1}\dot{K}(t) \right)^{\top} P(t)x + x^{\top} \dot{P}(t)x. \end{aligned}$$

Упростим получившееся выражение и сгруппируем его следующим образом:

$$\begin{aligned} (16) \quad \dot{V}(t, x) = & x^{\top} \dot{P}(t)x + x^{\top} P(t)A_{\Delta}(t)x + x^{\top} A_{\Delta}^{\top}(t)P(t)x - \\ & - x^{\top} P(t)B(t)(K(t)B(t))^{-1} \\ & \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right] x - x^{\top} \left[K(t)A_{\Delta}(t) + \dot{K}(t) \right]^{\top} (K(t)B(t))^{-\top} B^{\top}(t)P(t)x. \end{aligned}$$

В силу эквивалентного управления выполняется условие $w(t, x) = 0$, т.е. $B^\top(t)P(t)x = 0$. Упростим (16) как

$$(17) \quad \dot{V}(t, x) = x^\top \dot{P}(t)x + x^\top P(t)A_\Delta(t)x + x^\top A_\Delta^\top(t)P(t)x.$$

Выполнение условия $B^\top(t)P(t)x = 0$ означает, что эквивалентное управление (14) приводит систему к номинальному виду (с неопределенностью $B(t)\Gamma(t)E(t)$), т.е. выражение (17) совпадает с (8), которое приведено в доказательстве теоремы 1. Применяя последовательно рассуждения, приведенные в теореме 1, получим $V(t, x(t)) \leq e^{-\alpha t}V(0, x(0))$ и, следовательно, асимптотическую устойчивость рассматриваемого решения $x(t)$.

4.2.2. Синтез разрывных регуляторов

В предыдущих разделах были сформулированы теоремы 1 и 2, позволяющие естественным образом выбрать семейство многообразий скольжения, на котором решения системы асимптотически устойчивы, в случае периодических коэффициентов, а также учитывая неопределенность в матрице состояния. Финальным шагом является синтез разрывных регуляторов с целью обеспечить сходимость выбранных переменных скольжения к нулю (условие теоремы 2) при наличии неопределенностей в матрице управления и ограниченных согласованных возмущений. Модифицировав допущение **Д.1.2**, положим выполненным следующее

Допущение 2. Неопределенность в матрице управления удовлетворяет оценке

$$\|K(t)B(t)\Delta B(t)(K(t)B(t))^{-1}\|_* \leq \varepsilon < 1,$$

где $K(t)$ определено в соответствии с (10).

Рассмотрим динамику выбранной переменной скольжения $w(t, x) = K(t)x$ на решениях исходной системы (4)

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{w}(t, x) = & \left[\dot{K}(t) + K(t)(A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)) \right] x + \\ & + K(t)B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t))u + \delta(t, x) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть неопределенности и возмущения удовлетворяют допущениям **Д.1.1–Д.1.3**, **Д.2**.

Тогда для системы (18) регулятор вида

$$(19) \quad u = -(K(t)B(t))^{-1} \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) \right),$$

где $\text{Sign}(w(t, x)) = [\text{sign}(w_1(t, x)), \dots, \text{sign}(w_m(t, x))]^\top$, а матрица коэффициентов $\kappa(t, x) = \text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\} > 0$ выбрана таким образом, что выполня-

ются поэлементные неравенства⁴

$$(20) \quad \kappa_i(t, x) > \varepsilon \sum_{j=1}^m \kappa_j(t, x) + \eta_i(t, x), \quad i = \overline{1, m},$$

при $\eta_i(t, x) = \|K_i(t)B(t)\|\rho(t) + \left(\|K_i(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\|$, обеспечивает сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \leq \frac{1}{\gamma}\|w(0, x(0))\|$ для некоторого $\gamma > 0$.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении. Аналогичный результат может быть получен для унитарного управления.

Теорема 4. Пусть неопределенности и возмущения удовлетворяют допущениям Д.1.1–Д.1.3.

Тогда для системы (18) регулятор вида

$$(21) \quad u = - (K(t)B(t))^{-1} \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} \right),$$

где коэффициент $\kappa_{\text{unit}}(t, x) > 0$ выбран таким образом, что выполняется неравенство

$$(22) \quad \kappa_{\text{unit}}(t, x) > \frac{\eta(t, x)}{1 - \varepsilon}$$

при $\eta(t, x) = \|K(t)B(t)\|\rho(t) + \left(\|K(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\|$, обеспечивает сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \leq \frac{1}{\beta}\|w(0, x(0))\|$ для некоторого $\beta > 0$.

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Следствие 1. Система (4), замкнутая (19), (20) (или (21), (22)), глобально асимптотически устойчива.

Доказательство следствия 1. Применяя теорему 2 к каждому решению $x(t)$ замкнутой системы (4), (19), (20) (или (4), (21), (22)), получим сформулированное следствие 1.

4.3. Сравнение Ляпуновского синтеза и теории скользящих режимов

Построение поверхности разрыва для линейных систем с *периодическими* коэффициентами в рамках теории скользящих режимов представляет собой нетривиальную задачу. Конструктивный подход к ее решению дает процедура Ляпуновского синтеза [5]. Применительно к рассматриваемому

⁴ При достаточно малом ε система неравенств (20) разрешима, в частности при $\varepsilon < 1/m$.

классу систем она позволяет построить *периодическую* квадратичную функцию Ляпунова $V(t, x(t)) = x^\top(t)P(t)x(t)$ (теорема 1) для вспомогательной системы (5), задаваемую решением периодического дифференциального уравнения Риккати специального вида (7). Согласно теореме 2 решения системы $x(t)$ асимптотически устойчивы на семействе линейных многообразий $\mathcal{W}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : w(t, x) = 0\}$, где переменная скольжения $w(t, x)$ определяется как производная Ли функции $V(t, x(t))$ вдоль векторного поля $B(t)$. Тем самым множество $\mathcal{W}(t)$ параметризуется стабилизирующими решениями уравнения (7), которые соответствуют различному выбору матриц $Q(t)$ и $R(t) \succ 0$.

Кроме того, унитарный регулятор, использующийся в рамках данной методологии [6], испытывает разрыв только на $w(t, x) = 0$ и обеспечивает одновременную сходимость всех компонент $w(t, x)$ к нулю. Несмотря на установление асимптотической устойчивости (утверждение 1) с *верхней* оценкой скорости сходимости к $x = 0$, фактическое поведение решения $x(t)$ при наличии возмущений остается неопределенным, поскольку выполнение условия $w(t, x) = 0$ не гарантируется.

В этих условиях применение теории скользящих режимов позволяет не только обеспечить асимптотическую устойчивость системы (4), но и полностью определить динамику $x(t)$ на семействе $\mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq t_w \geq 0$ за счет свойства инвариантности относительно согласованных возмущений [4].

При условии построения семейства $\mathcal{W}(t)$ теория скользящих режимов обеспечивает: (i) существование регуляторов, гарантирующих достижение условия $w(t, x) = 0$ за конечное время: релейных (продемонстрировано в теореме 3), липшицевых, терминальных, на основе скользящих режимов высших порядков; (ii) возможность определения эквивалентного управления, поддерживающего выполнение условия $w(t, x) = 0$ при $t \geq t_w$, в отличие от Ляпуновского подхода.

Платой за *полную* определенность динамики на $\mathcal{W}(t)$ являются увеличенные оценки коэффициентов усиления разрывных регуляторов $\kappa(t, x)$ (теорема 3) и $\kappa_{\text{unit}}(t, x)$ (теорема 4), что приводит к более выраженному эффекту чаттеринга в канале управления $u(t)$ по сравнению с регуляторами на основе Ляпуновского синтеза (см. $\kappa_{\text{lr}}(t, x)$ в утверждении 1).

5. Иллюстративный пример

Для демонстрации предложенного метода рассмотрим систему с неопределенными периодическими коэффициентами вида

$$(23) \quad \dot{x} = (A + B(t)\Gamma(t)E(t))x + B(t)([1 + \Delta B(t)]u + \delta(t, x)),$$

где $A = TA_1T^{-1}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & A_2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \alpha \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}$,
 $B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \mathbb{O}_{2 \times 1} & B_1(t) \end{pmatrix}$, $B_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $E(t) = 0, 1(\sin(t) + 2)\mathbf{1}_4^\top$ (здесь $\mathbf{1}_4 -$

вектор-столбец размера 1×4 , заполненный единицами), а неопределенности и возмущения, удовлетворяющие допущениям Д.1.1–Д.1.3, приняты следующими:

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} 0,19 + 0,05\zeta_1 \\ -0,09 + 0,04\zeta_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta B(t) = \begin{pmatrix} 0,1\zeta_3 & 0,02\zeta_4 \\ 0,02\zeta_5 & 0,1\zeta_6 \end{pmatrix}, \quad \delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ \delta_2(t) \end{pmatrix},$$

где $\delta_1(t) = 0,2\zeta_7 + 0,4 \sin(3\pi t) + 0,3 \sin(11\pi t) + 5\|x\|$; $\delta_2(t) = 0,3\zeta_8 + 0,5 \sin(5\pi t) + 0,4 \sin(7\pi t) + 6\|x\|$, а ζ_i – независимые реализации равномерного шума из $[-1, 1]$ для $i = \overline{1, 8}$. Для согласованных возмущений $\delta(t, x)$ справедлива грубая оценка $\rho(x) \geq \|\delta(t, x)\|$, где $\rho(x) = 1,5 + 7,82\|x\|$.

Замечание 2. Для рассматриваемой пары $A(t)$, $B(t)$ матрица управляемости Калмана вырождена в каждой точке времени. Более того, обобщенная матрица управляемости [24] $\mathcal{O}_k(t) = (N_0(t) N_1(t) \cdots N_{k-1}(t))$, где $N_{j+1}(t) = \dot{N}_j(t) - A(t)N_j(t)$, $N_0(t) = B(t)$, $k \geq n$, имеет неполный ранг *при всех t и всех $k \geq n$* . Это обстоятельство затрудняет применение стандартных процедур синтеза, опирающихся на конструкции, требующие полной управляемости системы. В частности, в работе [25], посвященной задаче наблюдения для класса дифференциально наблюдаемых систем, используется увеличение размерности ($k > n$), при котором обеспечивается корректность выражений вида $(\mathcal{O}_k^\top(t) \mathcal{O}_k(t))^{-1} \mathcal{O}_k^\top(t)$. В рассматриваемом случае, ввиду неполного ранга $\mathcal{O}_k(t)$ для всех $k \geq n$, такая конструкция неприменима. В то же время система является стабилизируемой⁵, несмотря на отсутствие полной управляемости на периоде, и условия теоремы 1 выполняются, что позволяет применять предложенный подход.

5.1. Построение стабилизирующего решения (7)

Процедура построения стабилизирующих решений матричного дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами остается нетривиальной задачей. Классические подходы основаны на интегрировании в обратном времени [26, 27], методе периодического генератора [28], итерационном методе Ньютона–Клейнмана для дифференциальных уравнений Ляпунова [29], а также на вычислении устойчивых подпространств матриц монодромии гамильтоновых систем [30]. Однако указанные методы в той или иной степени опираются на решение неустойчивых дифференциальных уравнений и могут демонстрировать численную неустойчивость, особенно при больших значениях периода T или быстро меняющихся коэффициентах, что было отмечено в [31].

⁵ Мультипликаторы Флоке λ_i матрицы монодромии $\Phi(T, 0)$, где $\dot{\Phi}(t, 0) = (A(t) + B(t)K(t))\Phi(t, 0)$, $\Phi(0, 0) = \mathbb{I}_4$, были вычислены численно как $\lambda_i \in \{-0,2269 \pm 0,0837i; 0,0019; 1,7615 \cdot 10^{-4}\}$. Поскольку $|\lambda_i| < 1$ для всех $i = \overline{1, 4}$, замкнутая система при управлении $u = K(t)x$ является экспоненциально устойчивой и, следовательно, стабилизируемой (см. определение 1).

В отличие от них в настоящей работе используется подход [32], основанный на сведении задачи к конечномерной задаче полуопределенного программирования и не требующий численного интегрирования. Ниже приводится краткое описание данного метода.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Риккати с периодическими коэффициентами:

$$(24) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(P(t), t) &:= \dot{P}(t) + A^\top(t)P(t) + P(t)A(t) - \\ &- P(t)B(t)R^{-1}(t)B^\top(t)P(t) + Q(t) = 0, \end{aligned}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ являются T -периодическими непрерывными матрицами, причем $Q(t)$, $R(t) \succ 0$, а пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема.

Ключевую роль в построении решения играет следующее экстремальное свойство [33]: стабилизирующее решение $P^+(t)$ является наибольшим решением неравенства Риккати $\mathcal{R}(P(t), t) \succeq 0$ на интервале $t \in [0, T]$, для любого T -периодического решения данного неравенства $P(t)$ при всех t выполнено неравенство $P(t) \preceq P^+(t)$.

Это свойство является ключевым, поскольку позволяет свести задачу решения уравнения Риккати к задаче максимизации функционала. Действительно, используя лемму Шура, неравенство $\mathcal{R}(P(t), t) \succeq 0$ можно переписать в виде ЛМН

$$(25) \quad \mathcal{L}(P(t), t) := \begin{pmatrix} \dot{P}(t) + A^\top(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t) & P(t)B(t) \\ B^\top(t)P(t) & R(t) \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

В силу приведенного выше экстремального свойства функция $P^+(t)$ максимизирует функционал

$$\mathcal{F}(P) := \int_0^T \text{tr}(P(t)) dt,$$

рассматриваемый на множестве всех T -периодических симметрических матричных функций класса C^1 , удовлетворяющих ограничению (25).

Полученная задача является бесконечномерной задачей оптимизации. Для ее численного решения введем аппроксимацию $P(t)$ тригонометрическим полиномом степени M :

$$(26) \quad P_M(t) = \sum_{k=-M}^M e^{ik\omega t} F_k,$$

где $\omega \triangleq 2\pi/T$, матрица $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична, $F_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$, причем $F_{-k} = \overline{F_k}$.

Далее заменим континуальное семейство ограничений (25) их конечномерной дискретизацией в N равноотстоящих точках $t_j = (j-1)T/N$, $j = 1, \dots, N$:

$$\mathcal{L}(P(t_j), t_j) \succeq 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Для обеспечения компактности допустимого множества и корректности постановки задачи введем ограничения

$$-dI_n \preceq P(t_j) \preceq dI_n, \quad j = 1, \dots, N,$$

где $d > \|P^+(t)\|_C$ выбирается априори⁶. Отметим, что для аппроксимации (26) справедливо равенство

$$\int_0^T \text{tr}(P(t)) dt = T \cdot \text{tr}(F_0),$$

позволяющее перейти к конечномерной задаче полуопределенного программирования:

$$(27) \quad \max \quad \text{tr}(F_0) : \quad \mathcal{L}(P(t_j), t_j) \succeq 0, \quad -dI_n \preceq P(t_j) \preceq dI_n, \quad j = 1, \dots, N.$$

Обозначим через $P_{M,N}^+(t)$ решение задачи (27). Такая задача является стандартной в своем классе и может быть эффективно решена с использованием современных решателей.

Теорема 5 [[32], теорема 3.1]. Пусть $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ – T -периодические дважды непрерывно дифференцируемые матричные функции, $Q(t)$, $R(t) \succ 0$, пара $A(t)$, $B(t)$ стабилизируема и $d > \|P^+(t)\|_C$. Тогда

$$\|P^+(t) - P_{M,N}^+(t)\|_C \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad \frac{N}{M^3} \rightarrow \infty.$$

Отметим, что данная оценка отражает нетривиальную взаимосвязь между параметрами аппроксимации: увеличение N при фиксированном M (или наоборот) само по себе не гарантирует повышения точности, что подчеркивается в [32].

Предложенный подход принципиально отличается от классических методов тем, что полностью избегает численного интегрирования неустойчивых дифференциальных уравнений, что делает его особенно эффективным при больших значениях периода T и быстро меняющихся коэффициентах. Численные эксперименты [32] показывают: (i) экспоненциальную сходимость по параметру M , существенно превосходящую теоретические оценки; (ii) устойчивость метода к ослаблению условий на $Q(t)$ – на практике он часто успешно применяется и в случаях $Q(t) \succeq 0$ или даже при знаконеопределенных $Q(t)$.

⁶ Здесь и далее $\|H(t)\|_C \triangleq \max_{t \in [0, T]} \|H(t)\|$ для T -периодической матрицы $H(t)$.

При решении периодического дифференциального уравнения Риккати специального вида (7) (теоремой 1) методом, описанным в разделе 5.1, были выбраны весовые матрицы $Q = \mathbb{I}_4$, $R = 0,1\mathbb{I}_2$ и параметр $\mu = 0,5$. При этом, переменная $w(t, x)$ вычислялась в соответствии с (10) как $w(t, x) = K(t)x$, где $K(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$.

Для того чтобы обеспечить равенство $w(t, x) = 0$ для всех $t \geq t_w$, приступим к синтезу регуляторов на скользящих режимах, описанных в теоремах 3 и 4. Можно увидеть, что для неопределенностей, на основе полученной ранее матричной функции $K(t)$, выполняются следующие грубые оценки, в частности: $\|\Delta \bar{B}(t)\|_\infty < \varepsilon_1 = 0,16$ и $\|\Delta \bar{B}(t)\|_2 < \varepsilon_2 = 0,14$ (допущение 2), а также справедливо $\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \leq 2,0$, $\|K(t)B(t)\| \leq 0,77$, $\|K_1(t)B(t)\| \leq 0,76$, $\|K_2(t)B(t)\| \leq 0,29$.

Коэффициенты усиления для разрывного векторного (19) управления были выбраны как $\kappa_{rel} = \text{diag}\{\kappa_1, \kappa_2\}$, где $\kappa_1 = (\varepsilon_1/(1 - \varepsilon_1)(\eta_2(x) + \beta_2) + \eta_1(x) + \beta_1)/(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2/(1 - \varepsilon_1))$, $\kappa_2 = (\varepsilon_1\kappa_1 + \eta_2(x) + \beta_2)/(1 - \varepsilon_1)$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0,01$ (обозначения совпадают с приведенными в теореме 3 и его доказательстве). Аналогично, коэффициент усиления для унитарного управления (теорема 4) был выбран как $\kappa_{unit} = (\eta + \beta)/(1 - \varepsilon_2)$, при $\|\Delta \bar{B}(t)\|_2 < \varepsilon_2 = 0,3$ (допущение 2), $\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \leq 12$, $\|K(t)B(t)\| \leq 4,4$, $\beta = 1$, а $\eta(x) = 4,4\rho(x) + 12\varepsilon_2\|x\|$.

Ниже на рис. 1–3 представлены результаты моделирования (метод Эйлера с шагом $\Delta t = 10^{-4}$ с, начальные условия $x(0) = (2 \ -2 \ -3 \ 1,5)^\top$) системы (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) и унитарным (21), (22) регуляторами: графики переходных процессов фазовых координат, величин управляющих воздействий и соответствующих им переменных скольжения $w(t, x)$.

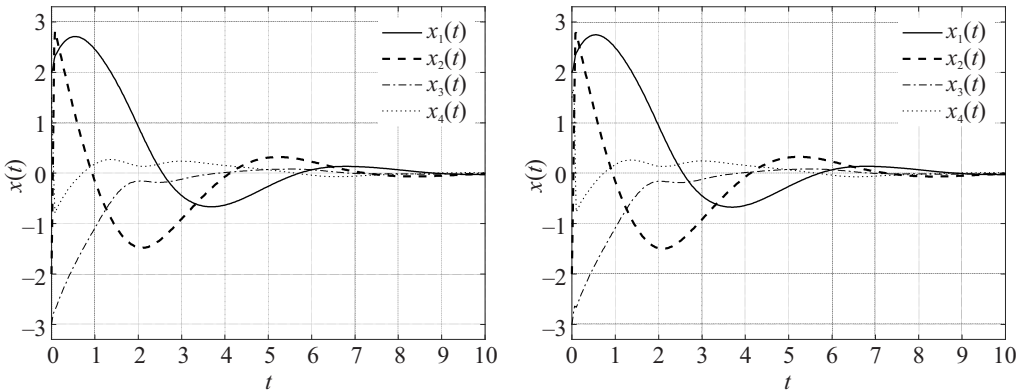


Рис. 1. Переходные процессы в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

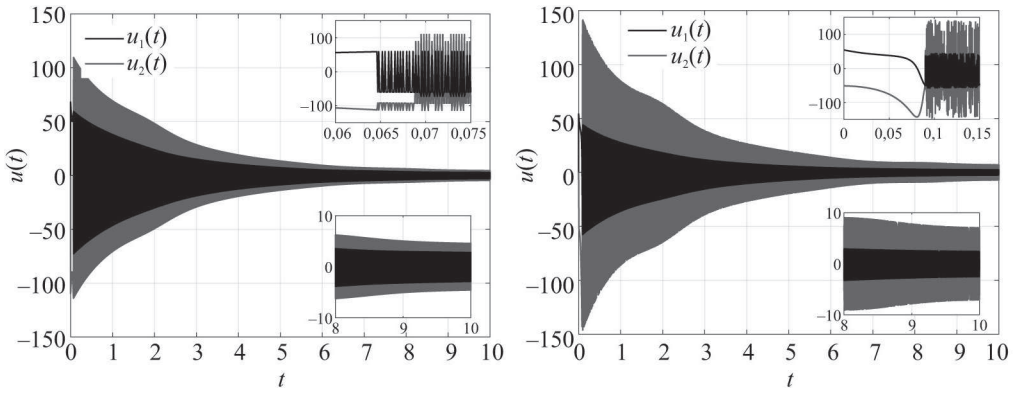


Рис. 2. Управление в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

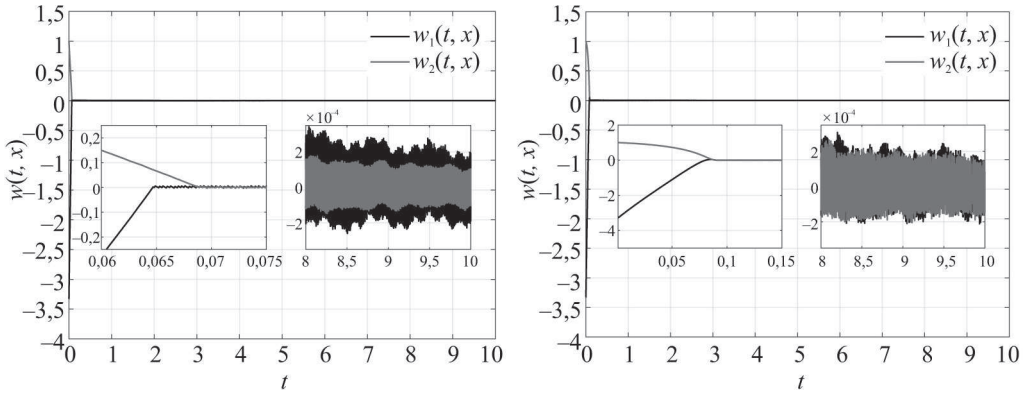


Рис. 3. Переменные скольжения $w(t, x)$ в системе (23), замкнутой релейным векторным (19), (20) (слева) и унитарным (21), (22) (справа) регуляторами.

Как и следовало ожидать, компоненты $w(t, x)$ в случае унитарного регулятора сошлись к 0 одновременно. При этом амплитуда чаттеринга в канале управления больше, чем для векторного управления.

6. Заключение

Рассмотрен класс *периодических* линейных систем со структурными неопределенностями в матрицах состояния и управления при ограниченных возмущениях в канале управления. Предложен метод стабилизации, основанный на совместном использовании Ляпуновского синтеза и скользящих режимов. Установлено существование квадратичной периодической функции Ляпунова и соответствующей стабилизирующей обратной связи для вспомогательной системы с неопределенностью в матрице состояния на основе анализа дифференциального уравнения Риккати с периодическими коэффициентами. Показано, что любая такая функция индуцирует семейство линейных

многообразий скольжения, обеспечивающих асимптотическую устойчивость. Синтезированы разрывные регуляторы: векторный и унитарный, обеспечивающие конечное время сходимости траекторий к выбранному многообразию при неопределенностях в матрице управления и согласованных возмущениях. Основной особенностью метода является структурное разделение неопределенностей: неопределенности в матрице состояния учитываются при построении функции Ляпунова и поверхности скольжения, тогда как неопределенности в матрице управления и возмущения компенсируются скользящим режимом. Метод не требует приведения системы к регулярной форме и применим к системам с периодическими коэффициентами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим (11). Из доказательства теоремы 1 следует, что $x^\top \left(\dot{P}(t) + P(t)A_{cl}(t) + A_{cl}^\top(t)P(t) \right) x \leq -\alpha V(t, x(t))$. Приняв это во внимание и используя обозначение (10), перезапишем (11) в следующем виде:

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha V(t, x) + 2w^\top \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) v(t, x) - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x + \delta(t, x) \right].$$

При подстановке унитарного регулятора $v = -\kappa_{lr}(t, x) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|}$ можно заметить, что при $\kappa_{lr}(t, x) \geq (\rho(t, x) + \varepsilon \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|) / (1 - \varepsilon)$ обеспечивается выполнение $\dot{V}(t, x) \leq -\alpha V(t, x)$ в силу оценок: $\|\Delta B(t)\| \leq \bar{\varepsilon}$ (допущение Д.1.2) и $\|\delta(t, x) - \Delta B(t)R^{-1}(t)K(t)x\| \leq \rho(t, x) + \bar{\varepsilon} \|R^{-1}(t)K(t)\| \|x\|$ (допущение Д.1.3). Утверждение доказано.

Доказательство теоремы 3. При замыкании (18) законом управления (19) получим

$$\begin{aligned} (\text{П.1}) \quad \dot{w}(t, x) = & \left(K(t) [A(t) + B(t)\Gamma(t)E(t)] + \dot{K}(t) \right) x - \\ & - K(t) B(t) \left[(\mathbb{I} + \Delta B(t)) (K(t)B(t))^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \left(\left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] x + \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) \right) - \delta(t, x) \right]. \end{aligned}$$

Затем введя следующие обозначения $\Delta \bar{B}(t) = K(t)B(t)\Delta B(t)(K(t)B(t))^{-1}$ и $\bar{\delta}(t, x) = K(t)B(t)\delta(t, x) + \left(K(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta \bar{B}(t) \left[K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right] \right) x$, упростим выражение (П.1)

$$(\text{П.2}) \quad \dot{w}(t, x) = -(\Delta \bar{B}(t) + \mathbb{I}) \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) + \bar{\delta}(t, x).$$

Перейдем к оценке $\bar{\delta}(t, x)$, рассмотрев по отдельности компоненты $\bar{\delta}_i(t, x)$ при $i = \overline{1, m}$:

$$\bar{\delta}_i(t, x) = K_i(t)B(t)\delta(t, x) + \left(K_i(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta \bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) \right) x,$$

где i -е строчки матриц $K(t)$ и $\Delta\bar{B}(t)$ обозначены как $K_i(t)$ и $\Delta\bar{B}_i(t)$, соответственно. Воспользовавшись допущениями **Д.1.1–Д.1.3**, **Д.2**: $\Gamma^\top(t)\Gamma(t) \leq \mathbb{I}$, $\|\Delta\bar{B}(t)\|_\infty = \varepsilon \leq 1$ и $\|\delta(t, x)\| \leq \rho(t, x)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.3}) \quad & |\bar{\delta}_i(t, x)| \leq |K_i(t)B(t)\delta(t, x)| + \\
 & + \left| \left(K_i(t)B(t)\Gamma(t)E(t) - \Delta\bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) \right) x \right| \leq \|K_i(t)B(t)\| \|\delta(t, x)\| + \\
 & + \left(\|K_i(t)B(t)\| \|E(t)\| + \|\Delta\bar{B}_i(t) \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right)\| \right) \|x\| \leq \\
 & \leq \|K_i(t)B(t)\| \rho(t, x) + \left(\|K_i(t)B(t)\| \|E(t)\| + \varepsilon \|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\| \triangleq \eta_i(t, x).
 \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости решений (П.2) покажем что функция $V_w(t, x) = \frac{1}{2}w^\top(t, x)w(t, x)$ является функцией Ляпунова. Оценим производную этой функции на решениях системы, используя (П.2):

$$(\text{П.4}) \quad \dot{V}_w(t, x) = w^\top(t, x) \left[-(\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \kappa(t, x) \text{Sign}(w(t, x)) + \bar{\delta}(t, x) \right].$$

Перезапишем (П.4) в виде сумм, обозначив i -е компоненты векторов $\kappa(t, x)$ как κ_i , а ij -й элемент матрицы $\Delta\bar{B}$ как $\Delta\bar{\beta}_{ij}$ и используя оценку (П.3),

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_w(t, x) &= - \sum_{i=1}^n \kappa_i |w_i| + \sum_{i=1}^n w_i \bar{\delta}_i - \sum_{i,j=1}^n w_i \Delta\bar{\beta}_{ij} \kappa_j \text{sign}(w_j) \leq \\
 &\leq - \sum_{i=1}^n \kappa_i |w_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| \eta_i + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n |w_i| \kappa_j \leq - \sum_{i=1}^n |w_i| \left(\kappa_i - \eta_i - \varepsilon \sum_{j=1}^n \kappa_j \right).
 \end{aligned}$$

Поскольку матрица коэффициентов $\kappa(t, x)$ выбрана в соответствии с условием теоремы (20), то $\dot{V}_w(t, x)$ строго отрицательна. С другой стороны, если $\kappa_i = \varepsilon \sum_{j=1}^n \kappa_j + \eta_i + \beta_i$ для некоторых $\beta_i(t) > 0$ при $i = \overline{1, m}$, то

$$\dot{V}_w \leq -\gamma \|w(t, x)\|_1 \leq -\gamma \|w(t, x)\|_2 = -\gamma \sqrt{2V_w(t, x)},$$

где $\gamma = \min_{t,i} |\beta_i(t)|$, откуда следует сходимость $w(t, x(t))$ к нулю за конечное время $t_w \leq \frac{1}{\gamma} \|w(0, x(0))\|$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3 в тех же обозначениях, но с управлением (21), получим

$$(\text{П.5}) \quad \dot{w}(t, x) = -\kappa_{\text{unit}}(t, x) (\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} + \bar{\delta}(t, x).$$

Евклидова норма вектора $\bar{\delta}(t, x)$ может быть оценена, с применением допущений **Д.1.1–Д.1.3** при $\|\Delta\bar{B}(t)\|_2 \leq \varepsilon < 1$ (**Д.2**) как

$$\begin{aligned}
 (\text{П.6}) \quad \|\bar{\delta}(t, x)\| &\leq \|K(t)B(t)\|\rho(t, x) + \|\Delta\bar{B}(t)\| \left(K(t)A(t) + \dot{K}(t) \right) x \leq \\
 &\leq \|K(t)B(t)\|\rho(t, x) + \\
 &+ \left(\|K(t)B(t)\|\|E(t)\| + \varepsilon\|K(t)A(t) + \dot{K}(t)\| \right) \|x\| = \eta(t, x).
 \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости решений (П.5) покажем что функция $V_w(t, x) = -\frac{1}{2}w^\top(t, x)w(t, x)$ является функцией Ляпунова. Оценим производную этой функции на решениях системы, используя (П.6):

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_w(t, x) &= -w^\top(t, x) \left[\kappa_{\text{unit}}(t, x) (\Delta\bar{B}(t) + \mathbb{I}) \frac{w(t, x)}{\|w(t, x)\|} - \bar{\delta}(t, x) \right] \leq \\
 &\leq -\|w(t, x)\| [\kappa_{\text{unit}}(t, x) (1 - \varepsilon) - \eta(t, x)].
 \end{aligned}$$

Пусть $\kappa_{\text{unit}} = \frac{\eta(t, x) + \beta}{1 - \varepsilon}$ (условие (22)) для некоторого $\beta > 0$, тогда $\dot{V}_w \leq -\beta\|w(t, x)\| = -\beta\sqrt{2V_w(t, x)}$, откуда следует сходимость $w(t, x)$ к нулю за конечное время $t_w \leq \frac{1}{\beta}\|w(0, x(0))\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
2. Лукьянов А.Г., Уткин В.И. Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // АиТ. 1981. № 3. С. 5–13.
Luk'yanov A. G., Utkin V. I. Methods for Reduction of Equations of Dynamic Systems to a Regular Form // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 4. P. 413–420.
3. Уткин В.И., Орлов Ю.В. Системы управления с векторными реле // АиТ. 2019. № 9. С. 143–155.
Utkin V. I., Orlov Y. V. Control systems with vector relays // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. P. 1671–1680.
4. Drazenovic B. The Invariance Conditions in Variable Structure Systems // Automatica. 1969. V. 5. No. 3. P. 287–295.
5. Gutman S. Uncertain dynamical systems – A Lyapunov min-max approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 3. P. 437–443.
6. Gutman S., Leitmann G. Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty // IEEE CDC including the 15th Symp. Adap. Processes. 1976. P. 94–99.
7. Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // Int. J. Control. 1993. V. 58. No. 6. P. 1247–1263.
8. Estrada M. A., Moreno J. A., Fridman L. Passive Fault-Tolerant Control via Sliding-Mode-Based Lyapunov Redesign // IEEE Trans. Autom. Control. 2024. V. 69. No. 10. P. 6777–6788.

9. *Yasuda K., Nakatsuji Y.* Robust sliding mode control of uncertain systems // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems. 1996. P. 15–19.
10. *Choi H.H.* On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties // Automatica. 1999. V. 35. No. 10. P. 1707–1715.
11. *Estrada M.A., Moreno J.A., Fridman L.* Sliding Mode Controllers Design based on Control Lyapunov functions for uncertain LTI systems // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56, No. 2. P. 1615–1620.
12. *Sætre C.F., Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V., Fridman L.M.* Robust orbital stabilization: A Floquet theory-based approach // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 16. P. 8075–8108.
13. *Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V.* Transverse Linearization for Controlled Mechanical Systems With Several Passive Degrees of Freedom // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55. No. 4. P. 893–906.
14. *Tarabukin I.M., Gusev S.V.* An Approach to Sliding Mode Control of Linear Systems with Periodic Coefficients // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). 2024. P. 29–33.
15. *Yakubovich V.A., Fradkov A.L., Hill D.J., Proskurnikov A.V.* Dissipativity of T-periodic linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. V. 52. No. 6. P. 1039–1047.
16. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости // АиТ. 2020. № 8. С. 8–28.
Balandin D.V., Kogan M.M. Methods for Reduction of Equations of Dynamic Systems to a Regular Form // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 8. P. 1367–1384.
17. *Grizzle J.W., Moog C.H., Chevallereau C.* Nonlinear control of mechanical systems with an unactuated cyclic variable // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 5. P. 559–576.
18. *Karavaev Y.L., Kilin A.A.* The Dynamics of a Spherical Robot of Combined Type by Periodic Control Actions // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. No. 4. P. 497–5047.
19. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. М.: ЛЕНАНД, 2014. 208 с.
20. *Kochetkov S., Rassadin Y., Utkin, V.* Disturbance rejection in the tracking problem for robot-manipulators // Proc. IEEE Int. Workshop on Metrology for AeroSpace. 2017. P. 301–306.
21. *Khargonekar P.P., Petersen I.R., Zhou K.* Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H^∞ control theory // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 3. P. 356–361.
22. *Якубович В.А.* Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем. I // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27. № 4. С. 181–200.
Yakubovich V.A. A linear-quadratic optimization problem and the frequency theorem for periodic systems. I // Siberian Math. J. 1986. V. 27. No. 4. P. 614–630.
23. *Bittanti S., Colaneri P., De Nicolao G.* The periodic Riccati equation // The Riccati Equation / S. Bittanti, A. J. Laub, J. C. Willems (Eds.). Springer, 1991.
24. *Silverman L.M., Meadows H.E.* Controllability and observability in time-variable linear systems // SIAM J. Control. 1967. V. 5. No. 1. P. 64–73.

25. *Meléndez-Pérez R., Moreno J.A.* Bl-homogeneous observer for differentially uniformly observable LTV systems with a single output // Proc. of IEEE 17th Int. Workshop on Variable Structure Systems. 2024. P. 1–6.
26. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Mat. Mex. 1960. V. 5. P. 102–119.
27. *Shayman M.A.* On the phase portrait of the matrix Riccati equation arising from the periodic control problem // SIAM J. Control Optim. 1985. V. 23. No. 5. P. 717–751.
28. *Bekir E., Bucy R.S.* Periodic equilibria for matrix Riccati equations // SIAM J. Control Optim. 1976. V. 14. No. 4. P. 689–698.
29. *Kleinman D.L.* On an iterative technique for Riccati equation computations // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 114–115.
30. *Varga A.* On solving periodic Riccati equations // Numer. Linear Algebra Appl. 2008. V. 15. No. 9. P. 809–835.
31. *Varga A.* Computational issues for linear periodic systems: paradigms, algorithms, open problems // Int. J. Control. 2013. V. 86. No. 7. P. 1227–1239.
32. *Gusev S.V., Shiriaev A.S., Freidovich L.B.* SDP-based approximation of stabilising solutions for periodic matrix Riccati differential equations // Int. J. Control. 2016. V. 89. No. 7. P. 1396–1405.
33. *Chen S., Liu X., Chen G.* The extremal property of the periodic Riccati equation // Acta Math. Appl. Sin. 1989. V. 5. No. 4. P. 349–355.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.09.2025

После доработки 20.04.2026

Принята к публикации 28.04.2026