

Российская Академия Наук

ISSN 0005-2310 (Print)
ISSN 2413-9777 (Online)

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

12

декабрь

Москва 2026

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П., Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю., Каравай М.Ф., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И., Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В., Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю., Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443
Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru
Сайт: https://aitras.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ФГБУ «Издательство «Наука»

© Российская академия наук, 2026

Нелинейные системы

© 2026 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КРИТЕРИЙ ПОПОВА АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТАЦИОНАРНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ *S*-ПРОЦЕДУРЫ[1]

Для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями критерий Попова абсолютной устойчивости получен с использованием теоремы о свертывании без использования S-процедуры.

Ключевые слова: системы Лурье, устойчивость, критерий Попова, функции Лурье–Постникова, матричные неравенства.

DOI: 10.7868/S2413977726120013

1. Введение

Теория абсолютной устойчивости является важной частью теории автоматического регулирования и занимает значительное место в общей теории управления. Библиография по теории абсолютной устойчивости насчитывает сотни публикаций [1]. Интересный подробный очерк развития этой теории приводится в [2]. Теория абсолютной устойчивости берет свое начало с работы [3], в которой была рассмотрена задача абсолютной устойчивости системы автоматического управления с одним нелинейным стационарным элементом (системы Лурье). Первоначально критерий Попова был получен именно для таких систем. Как отмечено в [4], среди частотных условий абсолютной устойчивости «центральным результатом является критерий Попова». Если судить по известности и популярности, то с этим мнением можно согласиться и сейчас. При получении этого критерия методами функций Ляпунова критерий Попова является достаточным (и необходимым в случае одной нелинейности) условием существования для системы Лурье функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» (в случае нескольких нелинейностей – плюс сумма интегралов от нелинейностей). Такие функции Ляпунова получили название функций Лурье–Постникова (ФЛП). Для исследования отрицательной определенности производной ФЛП в силу системы используется специальный прием, в [5] названный S-процедурой. S-процедура позволяет перейти от неравенства на квадратичную форму, которое должно выполняться в области, выделяемой квадратичными ограничениями,

[1] В 2026 г. исполняется 90 лет со дня рождения Е.С. Пятницкого и 100 лет со дня рождения В.А. Якубовича. Статья посвящается памяти этих ученых.

к неравенству на квадратичную форму, которое должно выполняться во всем пространстве, т.е. к матричному неравенству (МН). Роль и значение S-процедуры для математической теории систем, а не только теории абсолютной устойчивости, освещаются в обзоре [6]. Полученные с помощью частотной теоремы (лемма Калмана–Якубовича–Попова, KYP лемма, см. [6, 7]) частотные условия разрешимости этого МН и являются частотными условиями критерия Попова.

Целью работы является получение критерия Попова для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями с использованием теоремы о свертывании без использования S-процедуры. Теорема о свертывании основана на теореме Пятницкого о переходе от системы из двух МН к одному МН, эквивалентному этой системе [8].

Здесь в разделе 2 формулируется задача абсолютной устойчивости для систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями и описывается класс ФЛП, используемый при получении критерия Попова.

В качестве исходного материала для дальнейших рассуждений критерий Попова выводится стандартным методом с использованием S-процедуры. Этому посвящен раздел 3.

В разделах 4–6 рассматриваются случаи систем с одной, двумя и произвольным конечным числом нелинейностей соответственно.

2. Задача абсолютной устойчивости

Система Лурье с несколькими стационарными нелинейностями имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(\sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x\rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b_j, c_j \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где нелинейности $\varphi_j(\sigma_j)$ удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения $x(t)$, $j = 1, \ldots, m$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$). Используется стандартное определение абсолютной устойчивости [5, 7]: система (1) абсолютно устойчива в классе N_φ нелинейностей $\varphi = \|\varphi_j\|_{j=1}^m$, удовлетворяющих секторным ограничениям

$$0 \leqslant \varphi_j \sigma_j \leqslant \sigma_j^2, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

если эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

Известный частотный критерий Попова является достаточным (при $m = 1$ и необходимым) [4, 7] условием существования для системы (1) функции Ляпунова, роль которой в данном случае выполняет ФЛП

$$v(x) = x^\top L x + \sum_{j=1}^{m} \theta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(\xi)\, d\xi, \tag{3}$$

представляющая собой квадратичную форму ($L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L^\top = L$) плюс сумму интегралов от нелинейностей, $\theta = \|\theta_j\|_{j=1}^m$ – вектор параметров, $\{\cdot\}^\top$ – символ транспонирования матриц.

3. Критерий Попова с использованием S-процедуры

Здесь используется следующая формулировка из [7]: S-процедура состоит в замене условия

$$x^\top G_0 x < 0 \ \text{ при } \ x^\top G_j x \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

на условие

$$\exists\, \tau_j > 0 \ (j = 1, \ldots, m) : x^\top G_0 x + \sum_{j=1}^m \tau_j\, x^\top G_j x < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0, \tag{5}$$

где $G_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_j^\top = G_j$, $j = 0, \ldots, m$. Очевидно, что из выполнения (5) следует выполнение (4). В случае $m = 1$ доказывается [7, гл. I, § 1.7, п. 1.7.2], что условие (5) является не только достаточным, но и необходимым для выполнения условия (4) (S-процедура неущербна).

Вопросы, касающиеся свойств S-процедуры, рассматриваются во многих публикациях (см., например, [2, 6, 7, 9]).

Секторные ограничения (2) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$F_j(x, \varphi_j) = \varphi_j(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j) \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

В соответствии с теоремой Барбашина–Красовского [7] для производной $\dot v(x, \varphi)$ ФЛП (3) в силу системы (1) должно выполняться неравенство

$$\dot v(x, \varphi) = \left(2x^\top L + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j^\top\right)\left(Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j\right) < 0, \quad (x, \varphi) \neq 0, \tag{7}$$

при всех (x, φ), удовлетворяющих (6). Использование S-процедуры приводит к неравенству на квадратичную форму

$$\left(2x^\top L + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j^\top\right)\left(Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j\right) + \sum_{j=1}^m \tau_j \varphi_j \left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) < 0, \ (x, \varphi) \neq 0, \tag{8}$$

где $\tau_j > 0$ – неопределенные параметры, $j = 1, \ldots, m$.

Преобразуем (7):

$$2Lx + \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j c_j = 2Lx + C\Theta\varphi, \quad Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j = Ax + B\varphi,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix},\ \Theta = \operatorname{diag}\Big\{\theta_1, \dots, \theta_m\Big\}.$$

Следующий шаг:

$$\dot v(x,\varphi) = (2Lx + C\Theta\varphi)^\top (Ax + B\varphi) = 2x^\top LAx + \varphi^\top \Theta C^\top Ax + 2x^\top LB\varphi + \\ + \varphi^\top \Theta C^\top B\varphi = x^\top \Big(A^\top L + LA\Big) x + \frac{1}{2}\Big(x^\top A^\top C\Theta\varphi + \varphi^\top \Theta C^\top Ax\Big) + \\ + x^\top LB\varphi + \varphi^\top B^\top Lx + \frac{1}{2}\varphi^\top \Big(\Theta C^\top B + B^\top C\Theta\Big)\varphi.$$

Как в [8], функцию ограничений $F(x,\varphi,\mathcal{T})$ представим в виде

$$F(x,\varphi,\mathcal{T}) = \sum_{j=1}^m \tau_j\varphi_j\left(\langle c_j, x\rangle - \varphi_j\right) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}C\mathcal{T} \\ \frac{1}{2}\mathcal{T}\,C^\top & -\mathcal{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{T} = \operatorname{diag}\Big\{\tau_1, \dots, \tau_m\Big\}$.

В новых обозначениях неравенство (8) можно записать в виде следующего МН:

$$I_P^m = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2 \\ B^\top L + \Theta C^\top A/2 + \mathcal{T}\,C^\top/2 & \Theta C^\top B/2 + B^\top C\Theta/2 - \mathcal{T} \end{pmatrix} < 0. \tag{9}$$

Это неравенство (9) назовем МН Попова.

Условия разрешимости МН (9) определяются из частотной теоремы (KYP лемма) [6, 7]. Используемая здесь версия частотной теоремы приведена в следствии 1 [7, гл. I, § 1.2, п. 1.2.2]. Из частотной теоремы следует, что при гурвицевой A и $\Gamma > 0$ разрешимость неравенства

$$\begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + R \\ B^\top L + R^\top & -\Gamma \end{pmatrix} < 0 \tag{10}$$

эквивалентна выполнению частотного неравенства

$$\Gamma + 2\operatorname{Re} W(i\omega) > 0,\ \ W(i\omega) = R^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B,\ \ \omega \in [-\infty, +\infty], \tag{11}$$

где $\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ – эрмитово сопряженная к W, E_n – единичная $(n \times n)$-матрица. Здесь и далее используется обозначение $\omega \in \in [-\infty, +\infty]$. При $\omega = \pm\infty$ имеются в виду предельные значения выражений в левых частях соответствующих неравенств (см. [7, с. 36]).

Так как неравенство (9) записано в форме (10), то условие разрешимости (9) выпишем в виде частотного неравенства (11):

$$\mathcal{T} - \Theta C^\top B/2 - B^\top C\Theta/2 + 2\operatorname{Re}\Big(A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2\Big)^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B = \\ = \mathcal{T} + \operatorname{Re}\,(\mathcal{T} + i\omega\Theta)\, W(i\omega) > 0,\ \ \omega \in [-\infty, +\infty], \tag{12}$$

где $W(i\omega) = C^\top (A - i\omega E_n)^{-1} B$. При дополнительном условии на неопределенные параметры $\mathcal{T} - \Theta C^\top B/2 - B^\top C\Theta/2 > 0$, получим, что разрешимость МН (9) эквивалентна выполнению частотного неравенства (12).

Таким образом, частотное условие (12) представляет собой критерий Попова для системы (1).

4. Системы с одной нелинейностью

В случае одной нелинейности ($m = 1$) система (1) и ФЛП (3) имеют вид

$$\dot{x} = Ax + \varphi(\sigma), \quad \sigma = \langle c, x\rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b, c \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

$$v(x) = x^\top L x + \theta \int_0^\sigma \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

Неравенство на производную (7) переходит в неравенство

$$\begin{aligned} \dot{v}(x,\varphi) &= x^\top \left(A^\top L + LA\right) x + x^\top Lb\varphi + \varphi^\top b^\top Lx + \\ &+ \frac{\theta}{2}\left(x^\top A^\top c\varphi + \varphi c^\top Ax\right) + \theta c^\top b\varphi^2 < 0, \ (x,\varphi) \neq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Применим S-процедуру, получим аналог выражения (8)

$$\begin{aligned} &x^\top \left(A^\top L + LA\right) x + x^\top Lb\varphi + \varphi b^\top Lx + \\ &+ \frac{\theta}{2}\left(x^\top A^\top c\varphi + \varphi c^\top Ax\right) + \theta\delta\varphi^2 + \tau\varphi\left(\langle c, x\rangle - \varphi\right), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\delta = c^\top b$. Отрицательная определенность формы (16) эквивалентна МН (аналог (9))

$$I_P^1 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb + \dfrac{\theta}{2}A^\top c + \dfrac{\tau}{2}c \\ b^\top L + \dfrac{\theta}{2}c^\top A + \dfrac{\tau}{2}c^\top & \theta\delta - \tau \end{pmatrix} < 0 \tag{17}$$

– МН Попова для случая $m = 1$. Условие разрешимости (17) следует из частотной теоремы в виде частотного неравенства

$$\begin{aligned} &\tau - \theta\delta + 2\mathrm{Re}\left(\frac{\theta}{2}A^\top c + \frac{\tau}{2}c\right)^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b = \\ &= \tau + \mathrm{Re}\,(\tau + \theta i\omega) W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty], \end{aligned} \tag{18}$$

где $W(i\omega) = c^\top (A - i\omega E_n)^{-1} b$. Если сократить полученное выражение на $\tau > 0$, то получим классическую форму критерия Попова

$$1 + \mathrm{Re}\,(1 + \mu\, i\omega) W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty, +\infty], \quad \mu = \theta/\tau. \tag{19}$$

В [10] показано, как в случае системы (1) с одной нелинейностью критерий Попова получить без использования S-процедуры. Здесь кратко изложим этот результат, используя формулировку теоремы о свертывании из [8].

Теорема 1 (теорема о свертывании). *Для выполнения системы двух МН*

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n), \tag{20}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, *при котором выполнено одно МН*

$$I_1 + Q^+(\widetilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\widetilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon^2} q. \tag{21}$$

Легко видеть, что из (21), выполненном неважно при каком $\varepsilon > 0$, следует выполнение системы (20).

Существование для системы (13) ФЛП (14), для производной которой при ограничениях (6) выполнено неравенство (15), эквивалентно [10] разрешимости системы из двух МН

$$\begin{aligned} &I_1 = A^\top L + LA < 0, \\ &I_2 = A^\top L + LA + Lbc^\top + c\, b^\top L + \frac{\theta}{2}\left(A^\top cc^\top + cc^\top A\right) + \theta\delta cc^\top < 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Покажем, что из выполнения МН (17) при некотором $\tau > 0$ следует разрешимость системы (22). Положим

$$Lb + \frac{\theta}{2}\left(A^\top c + \delta c\right) = p, \quad c = q.$$

Подставив эти p и q в (21), по теореме 1 получим, что разрешимость системы (22) эквивалентна разрешимости одного МН

$$A^\top L + LA + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(p + \frac{1}{\varepsilon^2} q\right)\left(p + \frac{1}{\varepsilon^2} q\right)^\top < 0, \tag{23}$$

где $p + \frac{1}{\varepsilon^2} q = Lb + \frac{\theta}{2} A^\top c + \left(\frac{\theta\delta}{2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) c$. По лемме Шура последнее МН (23) эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb + \dfrac{\theta}{2} A^\top c + \dfrac{\theta\delta}{2} c + \dfrac{1}{\varepsilon^2} c \\ b^\top L + \dfrac{\theta}{2} c^\top A + \dfrac{\theta\delta}{2} c^\top + \dfrac{1}{\varepsilon^2} c^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon^2} \end{pmatrix} < 0. \tag{24}$$

Чтобы (24) совпало с (17), положим $2/\varepsilon^2 = \tau - \theta\delta$. Это можно сделать, так как условие $\tau - \theta\delta > 0$ является необходимым условием для выполнения МН (17). Таким образом, разрешимость МН (24) определяется частотным неравенством (19) и критерий Попова при $m = 1$ получен без использования S-процедуры.

С другой стороны, из неущербности S-процедуры следует, что при $m = 1$ критерий Попова является и необходимым для существования ФЛП для системы (1). Покажем это с помощью теоремы 1. Для этого докажем, что из выполнения системы (22) следует, что существует $\tau > 0$, при котором выполнено МН (17).

Уже показано, что из выполнения системы (22) следует выполнение МН (24). Если $\theta\delta > 0$, то при $\tau = 2/\varepsilon^2 + \theta\delta > 0$ МН (24) совпадает с (17). Если нет, то в (24) сделаем замену $2/\varepsilon^2 = \tau - \theta\delta$, не акцентируя внимания на знаке параметра τ. Тогда (24) совпадает с (17) и выполнение МН (24) эквивалентно выполнению частотного условия (18). Из гурвицевости матрицы A и выполнения системы (22) следует гурвицевость всех матриц $A + hbc^\top$ при $h \in [0, 1]$, а значит $\det(A + hbc^\top) \neq 0$, $h \in [0, 1]$. При $\omega = 0$ неравенство (18) переходит в $\tau + \tau \mathrm{Re}\, W(0) = \tau(1 + c^\top A^{-1} b) > 0$. Опуская банальные выкладки, сошлемся на формулу Шермана–Моррисона [11, с. 410], из которой следует, что $\det(A + hbc^\top) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(1 + hc^\top A^{-1} b) \neq 0$. Следовательно, $(1 + c^\top A^{-1} b) > 0$ и $\tau > 0$. Таким образом, для $m = 1$ без использования свойства неущербности S-процедуры в этом случае показано, что критерий Попова является необходимым условием существования ФЛП для системы (1).

5. Системы с двумя нелинейностями

В случае системы (1) с двумя нелинейностями основой для критерия Попова, дающего достаточные условия существования ФЛП (3) с отрицательной производной (7) при ограничениях (6), является соответствующий случаю $m = 2$ вариант МН (9), где

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \mathrm{diag}\Big\{\theta_1, \theta_2\Big\}, \quad \mathcal{T} = \mathrm{diag}\Big\{\tau_1, \tau_2\Big\}.$$

Выпишем подробно МН Попова для случая $m = 2$:

$$I_P^2 = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2} A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2} c_1 & Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2} A^\top c_2 + \dfrac{\tau_2}{2} c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1 \delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2 \delta_{21} + \theta_1 \delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & \theta_2 \delta_{22} - \tau_2 \end{pmatrix} < 0. \tag{25}$$

Здесь и далее $\delta_{ij} = c_i^\top b_j$ и символы «$\bullet$» заменяют элементы, симметричные относительно главной диагонали.

Существование для системы (1) ФЛП (3), для производной которой в случае $m = 2$ выполнено неравенство (7) при всех (x, φ), удовлетворяющих (6), эквивалентно [10] разрешимости системы из четырех МН

$$I_s = A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, 4, \tag{26}$$

где

$$A_1 = A,\ \ A_2 = A + b_1 c_1^\top,\quad A_3 = A + b_2 c_2^\top,\quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top,$$
$$L_1 = L,\ \ L_2 = L + \frac{\theta_1}{2} c_1 c_1^\top,\ \ L_3 = L + \frac{\theta_2}{2} c_2 c_2^\top,\ \ L_4 = L + \frac{\theta_1}{2} c_1 c_1^\top + \frac{\theta_2}{2} c_2 c_2^\top.$$

Без использования S-процедуры покажем, что выполнение МН (25) достаточно для отрицательной определенности производной (7) при (6).

Теорема 2. Пусть МН (25) *разрешимо относительно* L *и* Θ *при некоторых* $\tau_1 > 0$ *и* $\tau_2 > 0$, *тогда разрешима система МН* (26).

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Таким образом, критерий Попова при $m = 2$ получен без использования S-процедуры.

6. Системы с m нелинейностями

Из раздела 3 следует, что условиями критерия Попова являются частотные условия разрешимости МН Попова (9). В [10] показано, что выполнение неравенства (7) для производной ФЛП (3) в случае произвольного m эквивалентно [10] разрешимости системы из 2^m МН

$$I_s = A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, N, \quad N = 2^m, \tag{27}$$

с матрицами A_s и L_s следующего вида:

$$A_s = A + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} b_j c_j^\top, \quad L_s = L + \sum_{j=1}^{m} h_{sj} \frac{\theta_j}{2} c_j c_j^\top, \quad s = 1, \ldots, N,$$

где $h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m$ и h_{sj} независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Считаем, что $h_1 = (0, \ldots, 0)$, т.е. $A_1 = A$, $L_1 = L$.

Заметим, что случай критерия Попова существенно сложнее случаев кругового критерия и критерия Цыпкина, рассмотренных в [8], так как в (27) от индекса s зависят как матрицы A_s, так и матрицы L_s в отличие от упомянутых случаев, где матрица L одна и та же во всех МН.

Теорема 3. Из разрешимости МН Попова (9) *при некоторых дополнительных параметрах* $\mathcal{T} = \operatorname{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $\tau_j > 0$, *и* $\Theta = \operatorname{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ *следует разрешимость системы* (27).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

7. Заключение

Показано, что без S-процедуры, которая более 60 лет считалась незаменимым инструментом при получении критерия Попова в рамках теории Ляпунова, можно обойтись.

Доказательство теоремы 2. Из результатов раздела 4 следует, что для выполнения системы из двух МН $I_1 < 0$ и $I_2 < 0$ из системы (26) достаточно выполнения МН (17), в котором добавились индексы

$$\text{(П.1)} \qquad I_P = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 \\ b_1^\top L + \dfrac{\theta_1}{2}c_1^\top A + \dfrac{\tau_1}{2}c_1^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 \end{pmatrix} < 0.$$

Поскольку $A_4 = A_3 + b_1c_1^\top$ и $L_4 = L_3 + \frac{\theta_1}{2}c_1c_1^\top$, то система из двух МН $I_3 < 0$ и $I_4 < 0$ из системы (26) совпадает с системой из двух МН $I_1 < 0$ и $I_2 < 0$, если в последней заменить матрицу A на A_3, а матрицу L на $= L_3$. Поэтому для выполнения системы из двух МН $I_3 < 0$ и $I_4 < 0$ достаточно выполнения МН (17), в котором произведена указанная замена

$$\text{(П.2)} \qquad \widehat{I}_P = \begin{pmatrix} A_3^\top L_3 + L_3A_3 & L_3b_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A_3^\top c_1 + \dfrac{\widehat{\tau}_1}{2}c_1 \\ b_1^\top L_3 + \dfrac{\theta_1}{2}c_1^\top A_3 + \dfrac{\widehat{\tau}_1}{2}c_1^\top & \theta_1\delta_{11} - \widehat{\tau}_1 \end{pmatrix} < 0.$$

Рассмотрим разницу $\Delta = \widehat{I}_P - I_P$, считая значения дополнительных параметров $\widehat{\tau}_1 = \tau_1$ одинаковыми в обеих матрицах (последним обусловлена достаточность). Покажем, что матрица Δ допускает представление $\Delta = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top$. Матрицы (П.1) и (П.2) имеют блочную структуру, выражение для Δ весьма громоздко, поэтому распишем его поблочно. Для упрощения записи введем обозначение $A_3^\top L_3 - A^\top L \triangleq Z$, тогда

$$\Delta_{11} = Z + Z^\top,$$

$$Z = \Big(A^\top + c_2b_2^\top\Big)\Big(L + \frac{\theta_2}{2}c_2c_2^\top\Big) - A^\top L = c_2b_2^\top L + \frac{\theta_2}{2}A^\top c_2c_2^\top + \frac{\theta_2}{2}\delta_{22}c_2c_2^\top,$$

$$\Delta_{12} = (L_3 - L)b_1 + \frac{\theta_1}{2}(A_3^\top - A^\top)c_1 = \frac{\theta_2}{2}c_2c_2^\top b_1 + \frac{\theta_1}{2}c_2b_2^\top c_1 = \frac{\theta_2}{2}\delta_{21}c_2 + \frac{\theta_1}{2}\delta_{12}c_2,$$

$$\Delta_{22} = 0_{1\times 1}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \widehat{I}_P - I_P = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{12}^\top & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{p}\,\widehat{q}^\top + \widehat{q}\,\widehat{p}^\top & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12})c_2 \\ (\bullet)^\top & 0 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{p} = Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2}(A^\top c_2 + \delta_{22}c_2)$ и $\widehat{q} = c_2$. Теперь легко видеть, что

$$\Delta = \widehat{I}_P - I_P = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top, \;\; \widetilde{p} = \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \end{pmatrix}, \;\; \widetilde{q} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе из двух МН (П.1) и (П.2) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого $\varepsilon_2 > 0$, что разрешимо одно МН

$$I_P + \frac{\varepsilon_2^2}{2}\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)^\top < 0.$$

По лемме Шура последнее МН эквивалентно следующему:

$$\widetilde{I}_P = \begin{pmatrix} I_P & \widetilde{p} + (1/\varepsilon_2^2)\widetilde{q} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{П.3}$$

Матрицу $\widetilde{I}_P$ выпишем подробно:

$$\widetilde{I}_P = \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 & \widehat{p} + (1/\varepsilon_2^2)c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top L + LA & Lb_1 + \dfrac{\theta_1}{2}A^\top c_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 & Lb_2 + \dfrac{\theta_2}{2}(A^\top c_2 + \delta_{22}c_2) + \dfrac{1}{\varepsilon_2^2}c_2 \\ (\bullet)^\top & \theta_1\delta_{11} - \tau_1 & 1/2(\theta_2\delta_{21} + \theta_1\delta_{12}) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix}.$$

Если выполнено МН (25), то $\theta_2\delta_{22} - \tau_2 < 0$. Тогда МН (П.3) будет выполнено, если в нем положить $-2/\varepsilon_2^2 = \theta_2\delta_{22} - \tau_2$, так как в этом случае эти неравенства совпадают. Следовательно, выполнена система из двух МН (П.1) и (П.2), а значит, и система (26).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Получим утверждение теоремы 3 с помощью теоремы 1 без использования S-процедуры и результатов раздела 3. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ рассмотрены в разделах 4 и 5. Отметим, что шаги приводимого ниже доказательства очень похожи на шаги доказательства теоремы 4 из [8], в которой критерий Цыпкина получен без S-процедуры.

По предположению индукции будем считать, что достаточным условием разрешимости системы (27) при некотором конечном m является разрешимость МН Попова (9).

При увеличении количества нелинейностей в системе на единицу количество неравенств в системе (27) увеличится в два раза, т.е. при $N = 2^{m+1}$ систему (27) можно представить в виде

$$A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \ldots, 2^m, \tag{П.4}$$

$$A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1}. \tag{П.5}$$

МН Попова для системы с $m+1$ нелинейностью имеет вид

$$(\text{П}.6)\quad I_P^{m+1}=\begin{pmatrix} A^\top L+LA & LB_{m+1}+\frac{1}{2}\left(A^\top C_{m+1}\Theta_{m+1}+C_{m+1}\mathcal{T}_{m+1}\right)\\ (\bullet)^\top & \frac{1}{2}\left(\Theta C_{m+1}^\top B_{m+1}+B_{m+1}^\top C_{m+1}\Theta_{m+1}\right)-\mathcal{T}_{m+1}\end{pmatrix}<0,$$

где

$B_{m+1}=\left(b_1\,b_2\,\ldots\,b_m\,b_{m+1}\right)$, $C_{m+1}=\left(c_1\,c_2\,\ldots\,c_m\,c_{m+1}\right)$,

$\Theta_{m+1}=\operatorname{diag}\{\theta_1,\ldots,\theta_m,\theta_{m+1}\}$, $\mathcal{T}_{m+1}=\operatorname{diag}\{\tau_1,\ldots,\tau_m,\tau_{m+1}\}$.

Покажем, что из разрешимости МН (П.6) следует разрешимость объединенной системы (П.4)–(П.5). Будем считать, что система (П.4) в точности совпадает с (27), а матрицы A_s в системе (П.5) пронумерованы таким образом, что $A_{s+2^m}=A_s+b_{m+1}c_{m+1}^\top$, $s=1,\ldots,2^m$. Получим автоматически, что $L_{s+2^m}=L_s+\frac{\theta_{m+1}}{2}c_{m+1}c_{m+1}^\top$, $s=1,\ldots,2^m$. Таким образом, система (П.5) совпадает с (П.4), если в системе (П.4) в выражениях для матриц A_s и L_s матрицу A заменить на $A_{1+2^m}=A+b_{m+1}c_{m+1}^\top$, а матрицу L на $L_{1+2^m}=$ $=L+\frac{\theta_{m+1}}{2}c_{m+1}c_{m+1}^\top$. Обозначим $1+2^m\triangleq\xi$, т.е. $A_\xi=A_{1+2^m}$ и $L_\xi=L_{1+2^m}$. Следовательно, по предположению индукции достаточным условием разрешимости системы (П.5) является разрешимость МН

$$(\text{П}.7)\qquad \widehat{I}_P^m=\begin{pmatrix} A_\xi^\top L_\xi+L_\xi A_\xi & L_\xi B+A_\xi^\top C\Theta/2+C\widehat{\mathcal{T}}/2\\ (\bullet)^\top & \Theta C^\top B/2+B^\top C\Theta/2-\widehat{\mathcal{T}}\end{pmatrix}<0,$$

где B, C и Θ те же, что и в (9). Рассмотрим разницу $\Delta^m=\widehat{I}_P^m-I_P^m$, считая значения дополнительных параметров $\widehat{\mathcal{T}}=\mathcal{T}$ одинаковыми в обеих матрицах. Для краткости введем обозначения $A_\xi^\top L_\xi-A^\top L\triangleq Z_\xi$ и $m+1\triangleq\nu$, тогда

$$Z_\xi=\left(A^\top+c_\nu b_\nu^\top\right)\left(L+\frac{\theta_\nu}{2}c_\nu c_\nu^\top\right)-A^\top L=c_\nu b_\nu^\top L+\frac{\theta_\nu}{2}A^\top c_\nu c_\nu^\top+\frac{\theta_\nu}{2}\delta_{\nu\nu}c_\nu c_\nu^\top.$$

Распишем выражение для Δ^m поблочно:

$$\Delta_{11}^m=Z_\xi+Z_\xi^\top=\widehat{p}_m\widehat{q}_m^\top+\widehat{q}_m\widehat{p}_m^\top,\ \text{где}\ \widehat{p}_m=Lb_\nu+\frac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu+\delta_{\nu\nu}c_\nu\right),\ \widehat{q}_m=c_\nu,$$

$$\Delta_{12}^m=(L_\xi-L)B+(A_\xi^\top-A^\top)C\Theta/2=\frac{\theta_\nu}{2}c_\nu c_\nu^\top B+\frac{1}{2}c_\nu b_\nu^\top C\Theta=$$

$$=\frac{1}{2}c_\nu\left(\theta_\nu c_\nu^\top B+b_\nu^\top C\Theta\right),$$

$$\Delta_{22}^m=0_{m\times m}.$$

Следовательно,

$$\Delta^m=\begin{pmatrix}\Delta_{11}^m & \Delta_{12}^m\\ (\bullet)^\top & \Delta_{22}^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widehat{p}_m\,\widehat{q}_m^\top+\widehat{q}_m\,\widehat{p}_m^\top & \frac{1}{2}c_\nu\left(\theta_\nu c_\nu^\top B+b_\nu^\top C\Theta\right)\\ (\bullet)^\top & 0_{m\times m}\end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Delta^m = \widetilde{p}_m\,\widetilde{q}_m^\top + \widetilde{q}_m\,\widetilde{p}_m^\top,\ \ \widetilde{p}_m = \begin{pmatrix} \widehat{p}_m \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix},\ \ \widetilde{q}_m = \begin{pmatrix} c_\nu \\ 0_{m\times 1} \end{pmatrix},$$

т.е. к системе из двух МН (9) и (П.7) применима теорема 1, на основании которой получим, что разрешимость этой системы эквивалентна существованию такого $\varepsilon_\nu > 0$, что разрешимо одно МН

$$\widehat{I}_P^{m+1} = I_P^m + \frac{\varepsilon_\nu^2}{2}\left(\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m\right)\left(\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m\right)^\top < 0, \tag{П.8}$$

где

$$\widetilde{p}_m + \frac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,\widetilde{q}_m = \begin{pmatrix} \widehat{p}_m + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lb_\nu + \dfrac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu + \delta_{\nu\nu} c_\nu\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \end{pmatrix}.$$

По лемме Шура МН (П.8) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$\widehat{I}_P^{m+1} \cong \widetilde{I}_P^{m+1} = \begin{pmatrix} I_P^m & \widetilde{p}_m + (1/\varepsilon_\nu^2)\,\widetilde{q}_m \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_\nu^2 \end{pmatrix} = \tag{П.9}$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + A^\top C\Theta/2 + C\mathcal{T}/2 & Lb_\nu + \dfrac{\theta_\nu}{2}\left(A^\top c_\nu + \delta_{\nu\nu} c_\nu\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_\nu^2}\,c_\nu \\ (\bullet)^\top & \Theta C^\top B/2 + B^\top C\Theta/2 - \mathcal{T} & \dfrac{1}{2}\left(\theta_\nu B^\top c_\nu + \Theta C^\top b_\nu\right) \\ (\bullet)^\top & (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_\nu^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Из выполнения (П.6) следует $\theta_{m+1}\delta_{m+1m+1} - \tau_{m+1} < 0$, поэтому в (П.9) можно положить $-2/\varepsilon_{m+1}^2 = \theta_{m+1}\delta_{m+1m+1} - \tau_{m+1}$. В результате МН (П.9) будет совпадать с МН (П.6). Утомительное упражнение по перемножению матриц, из которого это следует, здесь опустим. Таким образом, из разрешимости МН (П.6) следует разрешимость МН (П.9), следовательно, следует разрешимость системы из двух МН (9) и (П.7), а значит, и разрешимость объединенной системы (П.4)–(П.5).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Либерзон М.Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // АиТ. 2006. № 10. С. 86–119.

2. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. https://doi.org/10.23919/ECC51009.2020.9143937
3. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. Т. 8. № 3. С. 246–248.
4. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. 1967. № 6. С. 5–30.
5. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 11. С. 77–121.
7. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
8. *Каменецкий В.А.* Круговой критерий и критерий Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями без использования S-процедуры // Матем. сб. 2024. Т. 215. № 2. С. 33–47.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.
10. *Каменецкий В.А.* Метод свертывания матричных неравенств и критерии абсолютной устойчивости стационарных систем управления // АиТ. 1989. № 5. С. 28–39.
11. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 08.12.2025

После доработки 20.08.2026

Принята к публикации 10.09.2026

Стохастические системы

© 2026 г. Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (ruslan.biryukov@itmm.unn.ru), Е.С. БУБНОВА (bubnova@itmm.unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ОБОБЩЕННОЕ $\mathcal{H}_2$-УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ НА КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ[1]

Для линейной дискретной нестационарной системы с марковскими переключениями вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Для случаев детерминированных и стохастических возмущений получены точные формулы вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Для случая стохастических возмущений получены также формулы для вычисления верхней оценки нормы с помощью линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия существования субоптимальных регуляторов двух типов: зависящих и не зависящих от текущего состояния марковской цепи. Для каждого из этих типов приведены формулы синтеза.

Ключевые слова: обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма, линейные матричные неравенства, однородные цепи Маркова.

DOI: 10.7868/S2413977726120021

1. Введение

В последнее время все большее значение приобретают стохастические динамические системы, способные менять свою структуру в случайные дискретные моменты времени. Особый класс таких объектов образуют дискретные системы с марковскими переключениями [1–3], где чередование режимов подчиняется законам однородной цепи Маркова с дискретным временем. Иными словами, функционирование подобной системы может протекать в одном из конечного набора состояний, причем для каждого из них задана собственная система линейных разностных уравнений, описывающая эволюцию переменных от одного дискретного момента времени к следующему. Такие модели естественным образом возникают при цифровой реализации систем управления [4], в задачах обработки дискретных сигналов [5], а также при моделировании сетей связи с пакетной передачей данных [6], где изменения топологии или параметров происходят в синхронизированные тактовые интервалы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2026-0007) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Кроме того, данный класс моделей широко используется для описания синхронизации в сетях переменной топологии и в задачах многоагентного управления [7], например при случайных переключениях связей между агентами или при марковских изменениях структуры взаимодействия.

Впервые задача устойчивости систем со случайной структурой была рассмотрена в [8]. Позднее в [9–11] исследовались различные постановки задач управления подобными системами, в том числе решена задача линейно-квадратичного управления. Для количественной оценки переходных режимов в системах с марковскими переключениями предложены различные подходы. Наиболее распространенными среди них являются методы, основанные на введении $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм [1, 12, 13]. Однако во многих практических задачах требуется не столько усредненная оценка, сколько гарантия того, что максимальный выброс выходной переменной не превысит заданного порога. Иными словами, необходим инструмент для анализа наихудшего возможного отклонения целевого выхода системы.

Один из возможных подходов к решению такой задачи основан на использовании обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, отвечающее максимальному уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии и нулевых начальных условиях, было введено в [14]. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма характеризует коэффициент усиления системы, на вход которой поступает сигнал с ограниченной l_2-нормой, а выходной сигнал измеряется l_∞-нормой, которая есть максимальное по времени значение евклидовой нормы целевого выхода. Для линейной дискретной нестационарной системы в [15] было введено понятие максимального уклонения как естественное расширение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы на системы с ненулевым начальным состоянием и показан алгоритм вычисления.

В [16] для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на бесконечном горизонте вычислена оценка обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и решена задача обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации. Задачи робастной обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации для неопределенных дискретных систем, а также для систем с частично неизвестной матрицей вероятностей переходов исследованы соответственно в [17] и [18]. Задачи обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации и управления для линейных стационарных систем непрерывного времени с марковскими переключениями на бесконечном горизонте рассмотрены в [19, 20]. В [21] вычислена обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма и синтезировано субоптимальное обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление для нестационарных непрерывных марковских систем на конечном горизонте.

Модели с марковскими переключениями можно рассматривать как частный случай систем с мультипликативными шумами, если интерпретировать переключение режимов как специфическое мультипликативное воздействие на матрицы состояния и управления. Задачи управления системами с мультипликативными шумами, в том числе $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-подходы к синтезу управления и фильтрации, рассмотрены в монографии [22]. Кроме того, в [23] разрабо-

тан метод решения смешанной $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$-задачи, что важно для обеспечения компромисса между робастностью и оптимальностью.

В настоящей работе рассматривается понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на конечном горизонте, а системы в каждом режиме функционирования предполагаются в общем случае нестационарными. Исследуются два типа внешних возмущений: детерминированные сигналы конечной энергии и стохастические возмущения. Для каждого случая получены явные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы.

Вторая часть работы посвящена задаче синтеза регуляторов по состоянию, минимизирующих полученную оценку нормы замкнутой системы. Рассматриваются два практически важных случая: когда регулятор имеет доступ к информации о текущем режиме марковской цепи (и может перестраиваться) и когда такая информация отсутствует (используется единая для всех режимов матрица обратной связи). Для каждого случая получены достаточные условия существования субоптимальных регуляторов. Отдельно обсуждается консерватизм предложенных условий и проводится сравнение двух альтернативных подходов к синтезу регулятора, не зависящего от режима марковской цепи.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на конечном горизонте, приводятся алгоритмы ее вычисления. Раздел 3 содержит решение задачи синтеза субоптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления в случаях доступного и недоступного для регулятора состояния марковской цепи. Численные эксперименты, демонстрирующие полученные результаты, описаны в разделе 4.

В статье используются следующие обозначения. $\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных вещественных векторов; квадрат нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ определяется как $|x|_2^2 = x^\top x$. Единичная матрица размера $n \times n$ обозначается как I_n. Символ $*$ используется для указания симметричных блоков в симметричной матрице. Через $\lambda_{\max}(M)$ и $e_{\max}(M)$ обозначены максимальное собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы M. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^N$, символ $\mathbb{E}\{\cdot\}$ обозначает оператор математического ожидания, через $l_2^\Omega([0,N],\mathbb{R}^{n_w})$ обозначено пространство $\mathcal{F}_k$-согласованных процессов $w = \{w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, k = 0,\dots,N\}$ таких, что

$$\mathbb{E}\big\{\|w\|_2^2\big\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{N} |w(k)|_2^2\right\} < \infty,$$

а через $l_\infty^\Omega([0,N],\mathbb{R}^{n_z})$ обозначено пространство $\mathcal{F}_k$-согласованных процессов $z = \{z(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, k = 0,\dots,N\}$ таких, что $\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\Big\{|z(k)|_2^2\Big\} < \infty$.

2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^N$ рассмотрим дискретную линейную систему со случайной структурой, меняющейся в соответствии с эволюцией стационарной марковской цепи:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_{\theta(k)}(k)x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \qquad x(0) = x_0, \\
z(k) &= C_{\theta(k)}(k)x(k), \qquad k = 0, \dots, N,
\end{aligned} \tag{1}
$$

здесь $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $w \in l_2^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_w})$ – внешнее возмущение, $z \in l_\infty^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_z})$ – целевой выход, $\theta(k)$ – скалярная однородная марковская цепь с известной матрицей вероятностей $P = (p_{ij})$ переходов из одного состояния в другое в произвольный момент времени k, элементами которой являются условные вероятности

$$
p_{ij} = \mathsf{P}\{\theta(k+1) = j | \theta(k) = i\}, \qquad \sum_{j=1}^{S} p_{ij} = 1, \qquad i, j \in \{1, \dots, S\}.
$$

Начальное состояние марковского процесса $\theta(0)$ – случайная величина с известным законом распределения $\mathsf{P}\{\theta(0) = j\} = \pi_j$, $j \in \{1, \dots, S\}$.

Система (1) порождает линейный оператор, отображающий начальные условия и внешнее возмущение в целевой выход $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_x} \times l_2^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_w}) \to$ $\to l_\infty^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_z}) : (x_0, w) \mapsto z$. Определим обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы (1) как норму оператора $\mathcal{S}$ следующим образом:

$$
\|\mathcal{S}\|_s = \max_{(x_0,w)\neq 0} \left(\frac{\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\mathbb{E}\|w\|_2^2 + x_0^\top R x_0} \right)^{1/2}, \tag{2}
$$

где $R = R^\top \succ 0$ – заданная весовая матрица, отражающая относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешних возмущений.

В частном случае, когда внешнее возмущение w является детерминированным, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) определяется соотношением

$$
\|\mathcal{S}\|_d = \max_{(x_0,w)\neq 0} \left(\frac{\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\|w\|_2^2 + x_0^\top R x_0} \right)^{1/2}. \tag{3}
$$

В числителе сохранен оператор математического ожидания, несмотря на детерминированность w, так как случайность сохраняется в марковской цепи $\theta(k)$, управляющей переключениями, а значит, целевой выход $z(k)$ остается случайным.

Отметим, что поскольку в (3) максимум берется по меньшему множеству (только детерминированные w), чем в (2), справедлива оценка $\|\mathcal{S}\|_d \leqslant \|\mathcal{S}\|_s$. В отличие от марковских систем непрерывного времени [21] для дискретных систем обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму можно вычислить как в случае случайных, так и в случае детерминированных внешних возмущений.

Сначала рассмотрим случай детерминированного внешнего возмущения. Будем предполагать, что все подсистемы, соответствующие состояниям марковской цепи, являются стационарными – т.е. матрицы A_j, B_j, C_j не зависят от времени k. Для этого случая справедлива следующая

Теорема 1. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *может быть вычислена как*

$$\|\mathcal{S}\|_d = \max_{k=0,\dots,N} \lambda_{\max}^{1/2} \left\{ R_k^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k) \right\}, \tag{4}$$
$$R_k = \operatorname{diag}(R,\, I_{kn_w}),$$

где матрицы $Y_j(k)$, $j = 1, \dots, S$, определяются соотношениями

$$Y_j(k) = \sum_{s=1}^{S} p_{js} L_{j,k}^{\top} Y_s(k-1) L_{j,k}, \qquad Y_j(0) = C_j^{\top} C_j, \qquad k = 1, \dots, N, \tag{5}$$
$$L_{j,1} = \begin{bmatrix} A_j & B_j \end{bmatrix}, \qquad L_{j,k} = \operatorname{diag}(L_{j,1},\, I_{(k-1)n_w}), \qquad k = 2, \dots, N.$$

Пусть максимум достигается в момент времени $k = k^*$, тогда наихудшие внешние возмущения и начальные условия имеют вид:

$$\begin{bmatrix} x^*(0) \\ w^*(0) \\ \vdots \\ w^*(k-1) \end{bmatrix} = e_{\max} \left(R_k^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k^*) \right); \tag{6}$$
$$w(j) = 0, \quad j = k^*, \dots, N-1.$$

Далее рассмотрим случай, когда внешнее возмущение является стохастическим, а подсистемы, соответствующие состояниям марковской цепи, нестационарными.

Теорема 2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *может быть вычислена как*

$$\|\mathcal{S}\|_s = \max_{n=0,\dots,N} \gamma_n, \tag{7}$$

где для каждого $n = 0, \dots, N$ *значение* γ_n *находится из системы условий*

$$
\begin{aligned}
X_i(n) &= C_i^\top(n) C_i(n), \\
X_i(k) &= A_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) A_i(k) + A_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k) \times \\
&\quad \times \left(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k)\right)^{-1} B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) A_i(k), \\
\mathcal{E}_i(k+1) &= \sum_{s=1}^{S} p_{is} X_s(k+1), \\
\gamma_n^2 I &\succ B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, S, \\
\gamma_n^2 R &\succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0), \\
\gamma_n^2 &= \lambda_{\max} \left(R^{-1} \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0) \right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

На практике вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы согласно приведенной теореме требует выполнения следующей итерационной процедуры. Для каждого фиксированного $n = 0, \dots, N$ необходимо решить систему рекуррентных матричных соотношений обратным ходом по времени $k = n-1, \dots, 0$. Значение γ_n входит как параметр в эти соотношения, но одновременно должно удовлетворять заключительному равенству, что делает задачу нелинейной. Следовательно, для каждого n требуется найти корень нелинейного уравнения относительно γ_n, что обычно делается с помощью методов одномерного поиска с проверкой на каждом шаге всех условий. После того как найдены γ_n для всех n, итоговая норма определяется как $\max\limits_{n=0,\dots,N} \gamma_n$.

Следствие 1. Пусть максимум $\gamma = \max\limits_{n=0,\dots,N} \gamma_n$ *достигается в момент времени* $n = k^*$. *Тогда наихудшие внешние возмущения и начальные условия определяются формулами:*

$$
\begin{aligned}
x^*(0) &= e_{\max} \left(R^{-1} \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0) \right), \\
w^*(k) &= \\
&= \left(\gamma^2 I - B_{\theta(k)}^\top(k) \mathcal{E}_{\theta(k)}(k+1) B_{\theta(k)}(k)\right)^{-1} B_{\theta(k)}^\top(k) \mathcal{E}_{\theta(k)}(k+1) A_{\theta(k)}(k) x(k), \\
&\qquad k = 0, \dots, k^* - 1, \\
w^*(k) &= 0, \quad k = k^*, \dots, N-1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где матрицы $X_j(k)$, $\mathcal{E}_j(k)$, $j = 1, \dots, S$, *вычислены для* $n = k^*$ *по рекуррентным уравнениям из теоремы 2.*

Прямое вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы сопряжено с решением матричных уравнений Риккати. Основная вычислительная сложность связана с необходимостью многократного решения рекуррентных матричных соотношений в процессе одномерного поиска для каждого n. С помощью замен переменных и леммы о дополнении Шура эти условия можно преобразовать в линейные матричные неравенства. Тем самым задача сводится к задаче полуопределенного программирования, допускающей эффективное решение численными методами [24].

Вместе с тем для систем большой размерности, а также при длинном интервале времени точное вычисление нормы остается вычислительно затратным. В связи с этим дальнейшие преобразования направлены на получение верхней оценки γ обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Задача поиска такой оценки также формулируется в терминах LMI, но требует меньших вычислительных ресурсов.

Теорема 3. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathcal{S}\|_s \leqslant \gamma, \tag{10}$$

где γ есть решение следующей задачи полуопределенного программирования относительно неизвестных матриц $Y_1(k), \dots, Y_S(k)$, $\mathcal{M}_1(k), \dots, \mathcal{M}_S(k)$:

$$\inf \gamma :$$

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^S\big) = \begin{bmatrix} \gamma^2 R & \pi_1 I & \dots & \pi_S I \\ \pi_1 I & \pi_1 Y_1(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_S I & 0 & \dots & \pi_S Y_S(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\big) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k) & p_{i1}\mathcal{M}_i(k) & \dots & p_{iS}\mathcal{M}_i(k) \\ p_{i1}\mathcal{M}_i(k) & p_{i1}Y_1(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{iS}\mathcal{M}_i(k) & 0 & \dots & p_{iS}Y_S(k) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{11}$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^\top(k) \\ C_i(k)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, n; \qquad i = 1, \dots, S.$$

Отметим также, что формулировка через матрицы Y_i и $\mathcal{M}_i$ в форме достаточных условий (теорема 3) в дальнейшем будет удобна для синтеза ре-

гуляторов в виде линейной обратной связи по состоянию системы с учетом информации о состоянии марковского процесса.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Покажем, что можно работать непосредственно с переменными $\mathcal{E}_i(k)$, которые имеют смысл стохастических функций Ляпунова. Исключая вспомогательные переменные $X_i(k)$ из первых двух условий (8), приходим к стохастическому матричному уравнению Риккати (12) для $\mathcal{E}_j(k)$, $j = 1, \ldots, S$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_j(n) = \sum_{i=1}^{S} p_{ji} C_i^\top(n) C_i(n),\\
&\mathcal{E}_j(k) = \sum_{i=1}^{S} p_{ji} \Big(A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k) + A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k) \times\\
&\qquad \times \big(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\big)^{-1} B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k)\Big),\\
&\mathcal{E}_j(0) = \sum_{i=1}^{S} \pi_i \Big(A_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)A_i(0) + A_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)B_i(0) \times\\
&\qquad \times \big(\gamma_n^2 I - B_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)B_i(0)\big)^{-1} B_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)A_i(0)\Big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы соотношения (12) необходимо дополнить оставшимися соотношениями (8), при этом пятое соотношение, записанное через переменные $\mathcal{E}_j(0)$, принимает вид $\gamma_n^2 R \succcurlyeq \mathcal{E}_j(0)$. Поскольку явное решение получившейся задачи затруднительно, целесообразно перейти к формулировке в терминах линейных матричных неравенств. Используя монотонность решений стохастических уравнений Риккати [1], сформулируем эквивалентную задачу: найти $\inf \gamma$ при условии, что второе уравнение (12) выполняется в смысле матричного неравенства. После применения леммы о дополнении Шура это неравенство записывается как:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(k+1), \mathcal{E}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) =\\
&= \begin{bmatrix}
\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & \widehat{\mathcal{E}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{A}}(k) & \widehat{\mathcal{E}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{B}}(k)\\
\widehat{\mathcal{A}}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & \mathcal{E}_j(k) & 0\\
\widehat{\mathcal{B}}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & 0 & \gamma^2\widehat{\mathcal{P}}_j
\end{bmatrix} \succcurlyeq 0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}(k) &= \operatorname{diag}\left(\mathcal{E}_1(k),\, \mathcal{E}_2(k), \ldots, \mathcal{E}_S(k)\right),\\
\widehat{\mathcal{B}}(k) &= \operatorname{diag}\left(B_1(k),\, B_2(k), \ldots, B_S(k)\right),\\
\widehat{\mathcal{A}}^\top(k) &= \begin{bmatrix} A_1^\top(k) & A_2^\top(k) & \ldots & A_S^\top(k)\end{bmatrix},\\
\widehat{\mathcal{P}}_j &= \operatorname{diag}\left(p_{j1}I,\, p_{j2}I, \ldots, p_{jS}I\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Аналогичными преобразованиями третье уравнение (12) приводится к виду $\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(1), \mathcal{E}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0$, где $\widehat{\Pi} = \operatorname{diag}(\pi_1 I, \pi_2 I, \ldots, \pi_S I)$. Тогда условия (8) эквивалентны задаче оптимизации $\gamma_n = \inf \gamma$ при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_j(n) = \sum_{i=0}^{S} p_{ji} C_i^\top(n) C_i(n), \quad \mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(k+1), \mathcal{E}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\
&\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(1), \mathcal{E}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad \gamma^2 R \succcurlyeq \mathcal{E}_j(0), \qquad j = 1, \ldots, S.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Для построения регуляторов в виде линейной обратной связи по состоянию системы удобнее использовать линейные матричные неравенства относительно матриц $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{E}_i^{-1}(k)$ и $\widehat{\mathcal{M}}(k) = \widehat{\mathcal{E}}^{-1}(k)$, тогда задача оптимизации, эквивалентная условиям (8), примет следующий вид (второе и третье неравенства (15) домножили слева и справа на $\operatorname{diag}(\widehat{\mathcal{M}}(k), \mathcal{M}_i(k), I)$, а для первого и последнего применили лемму Шура):

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{P}}_j \mathcal{M}_j(n) & \mathcal{M}_j(n) \widehat{\mathcal{C}}^\top(n) \widehat{\mathcal{P}}_j \\ \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{C}}(n) \mathcal{M}_j(n) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \begin{bmatrix} \gamma_n^2 R & I \\ I & \mathcal{M}(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\
&\qquad \mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) \succcurlyeq 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \\
&\qquad \mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(1), \mathcal{M}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad j = 1, \ldots, S.
\end{aligned} \tag{16}
$$

здесь $\widehat{\mathcal{C}}^\top = \begin{bmatrix} C_1^\top & C_2^\top & \ldots & C_S^\top \end{bmatrix}$,

$$
\mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1) \widehat{\mathcal{P}}_j & \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{A}}(k) \mathcal{M}_j(k) & \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{B}}(k) \\ \mathcal{M}_j(k) \widehat{\mathcal{A}}^\top(k) \widehat{\mathcal{P}}_j & \mathcal{M}_j(k) & 0 \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) \widehat{\mathcal{P}}_j & 0 & \gamma^2 \widehat{\mathcal{P}}_j \end{bmatrix}.
$$

3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления

Рассмотрим дискретную линейную управляемую систему со случайной структурой, меняющейся в соответствии с эволюцией стационарной марковской цепи:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_{\theta(k)}(k) x(k) + B_{\theta(k)}(k) w(k) + H_{\theta(k)}(k) u(k), \qquad x(0) = x_0, \\
z(k) &= C_{\theta(k)}(k) x(k) + D_{\theta(k)}(k) u(k), \qquad k = 0, \ldots, N,
\end{aligned} \tag{17}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – внешнее возмущение, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управляющее воздействие, $\theta(k)$ – дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, \ldots, S\}$

и вероятностями перехода p_{ij}; $A_i(k)$, $B_i(k)$, $H_i(k)$, $C_i(k)$, $D_i(k)$ – матрицы соответствующей размерности, зависящие от состояния марковского процесса $\theta(k) = i$ и от времени k.

Будем синтезировать управление в виде линейной обратной связи по состоянию системы с учетом состояния марковской цепи:

$$u(k) = \Theta_{\theta(k)}(k)\, x(k), \tag{18}$$

где $\Theta_i(k)$ – матрица коэффициентов обратной связи, зависящая от текущего режима $\theta(k) = i$ и от времени k. Подставив это управление в уравнения системы, получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \big[A_{\theta(k)}(k) + H_{\theta(k)}(k)\,\Theta_{\theta(k)}(k)\big]x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \\ z(k) &= \big[C_{\theta(k)}(k) + D_{\theta(k)}(k)\,\Theta_{\theta(k)}(k)\big]x(k). \end{aligned} \tag{19}$$

Поставим задачу синтеза субоптимального управления, минимизирующего верхнюю границу обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (19).

Теорема 4. Матрицы $\Theta_i(k)$ законов управления (18)*, минимизирующие верхнюю оценку γ_n обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы* (19) *на горизонте $k = 0, \dots, n$, имеют вид $\Theta_i(k) = Z_i(k)Y_i(k)^{-1}$, где $Y_i(k) = Y_i^{\top}(k) \succ 0$ и $Z_i(k)$ находятся при решении следующей задачи полуопределенного программирования:*

$$\inf \gamma :$$

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^{S}\big) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^{S}, \mathcal{M}_i(k)\big) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) + H_i(k)Z_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^{\top}(k) + Z_i^{\top}(k)H_i^{\top}(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^{\top}(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$k = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^{\top}(k) + Z_i^{\top}(k)D_i^{\top}(k) \\ C_i(k)Y_i(k) + D_i(k)Z_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \begin{matrix} k = 0, \dots, n; \\ i = 1, \dots, S. \end{matrix}$$

Далее рассмотрим задачу синтеза регулятора, параметры которого не зависят от состояния марковского процесса, т.е. управление имеет вид

$$u(k) = \Theta(k)x(k). \tag{20}$$

В этом случае система, замкнутая регулятором, имеет вид

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \big(A_{\theta(k)}(k) + H_{\theta(k)}(k)\Theta(k)\big)x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \quad x(0) = x_0, \\ z(k) &= \big(C_{\theta(k)}(k) + D_{\theta(k)}(k)\Theta(k)\big)x(k). \end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 5. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы с регулятором, не зависящим от состояния марковской цепи, удовлетворяет неравенству $\|S\|_s \leqslant \gamma$ для некоторого положительного γ, если существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие линейные матричные неравенства для матриц $P(k)$, $Z(k)$, $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{M}_i^\top(k) \succ 0$ и $Y_i(k) = Y_i^\top(k) \succ 0$:

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^S\big) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\big) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) + H_i(k)Z(k) & H_i(k)Z(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) + Z^\top(k)H_i^\top(k) & Y_i(k) & \rho\big(Y_i(k) + P^\top(k)\big) & 0 \\ Z^\top(k)H_i^\top(k) & \rho\big(Y_i(k) + P(k)\big) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{22}$$

$$k = 0, \dots, n-1;$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^\top(k) + Z^\top(k)D_i^\top(k) & \rho\big(Y_i(k) + P^\top(k)\big) \\ C_i(k)Y_i(k) + D_i(k)Z(k) & I & D_i(k)Z(k) \\ \rho\big(Y_i(k) + P(k)\big) & Z^\top(k)D_i^\top(k) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$k = 0, \dots, n; \qquad i = 1, \dots, S.$$

При этом матрицы регулятора определяются как $\Theta(k) = -Z(k)P^{-1}(k)$.

Отметим, что включение параметра ρ в число оптимизируемых переменных превращает задачу в невыпуклую задачу полуопределенного программирования, что существенно усложняет ее решение. В связи с этим предлагается следующий подход: для каждого фиксированного значения ρ решается задача минимизации γ при выполнении условий теоремы. Поскольку достижимое значение нормы зависит от выбора ρ, для отыскания наилучшего γ целесообразно выполнить поиск по сетке значений ρ и выбрать то из них, которое обеспечивает минимальное γ.

Рассмотрим синтез управления на основе неравенств (16). Введем блочные матрицы

$$\widehat{\mathcal{D}}^\top(k) = \begin{bmatrix} D_1^\top(k) & D_2^\top(k) & \dots & D_S^\top(k) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{H}}^\top(k) = \begin{bmatrix} H_1^\top(k) & H_2^\top(k) & \dots & H_S^\top(k) \end{bmatrix}.$$

Теорема 6. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы с регулятором, не зависящим от состояния марковской цепи, удовлетворяет неравенству $\|S\|_s \leqslant \gamma$ для некоторого положительного γ, если существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие линейные матричные неравенства для матриц $P(k)$, $Z(k)$ и $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{M}_i^\top(k) \succ 0$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_n^2 R & I \\ I & \mathcal{M}(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(1), \mathcal{M}_i(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \tag{23}$$

$$\mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) \succcurlyeq 0, \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i), \qquad k = 1, \dots, n, \qquad i = 1, \dots, S,$$

здесь

$$\mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_i & * & * & * \\ (\mathcal{M}_i(k)\widehat{\mathcal{A}}^\top(k) + Z^\top(k)\widehat{H}^\top(k))\widehat{\mathcal{P}}_i & \mathcal{M}_i(k) & * & * \\ Z^\top(k)\widehat{H}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_i & \rho\big(\mathcal{M}_i(k) + P(k)\big) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) & * \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) & 0 & 0 & \gamma^2\widehat{\mathcal{P}}_i \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{P}}_i\mathcal{M}_i(k) & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}_i(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)\mathcal{M}_i(k) + \widehat{D}_i(k)Z(k)) & I & * \\ \rho\big(\mathcal{M}_i(k) + P(k)\big) & Z^\top(k)\widehat{D}_i^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_i & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы регулятора определяются как $\Theta(k) = -Z(k)P^{-1}(k)$.

Заметим, что приведенные в теоремах 5 и 6 условия являются достаточными, но не эквивалентными друг другу. Они получены на основе разных исходных форм задачи вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы через матрицы $Y_i(k)$ и через $\mathcal{M}_i(k)$ соответственно. Как следствие, минимальные значения γ, доставляемые этими двумя задачами полуопределенного программирования, могут различаться. Какая из оценок окажется менее консервативной, т.е. ближе к истинной обобщенной $\mathcal{H}_2$-норме замкнутой системы, зависит от структуры конкретной системы и выбранного параметра ρ. Также отметим, что предложенные формулировки допускают естественное расширение на случай нестационарных вероятностей перехода.

4. Численное моделирование

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример, представляющий линейную дискретную систему с марковскими переключениями между двумя состояниями

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}w(k) + H_{\theta(k)}u(k), \qquad x(0) = x_0, \\ z(k) &= C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k), \end{aligned} \tag{24}$$

матрицы которой имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 0{,}0 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}0 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система рассматривается на временном промежутке $[0, 15]$, параметры марковской цепи и весовая матрица имеют вид

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

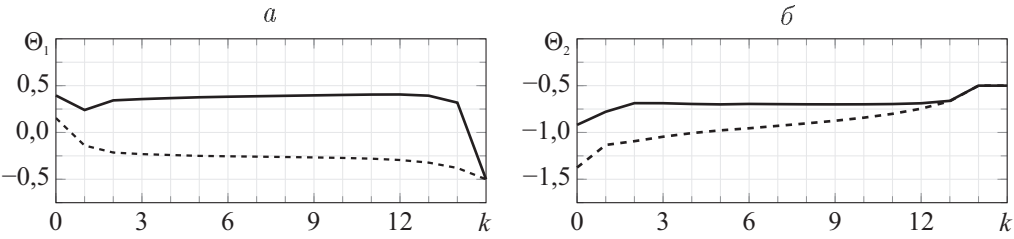


Рис. 1. Коэффициенты матрицы обратной связи $\Theta(k)$.

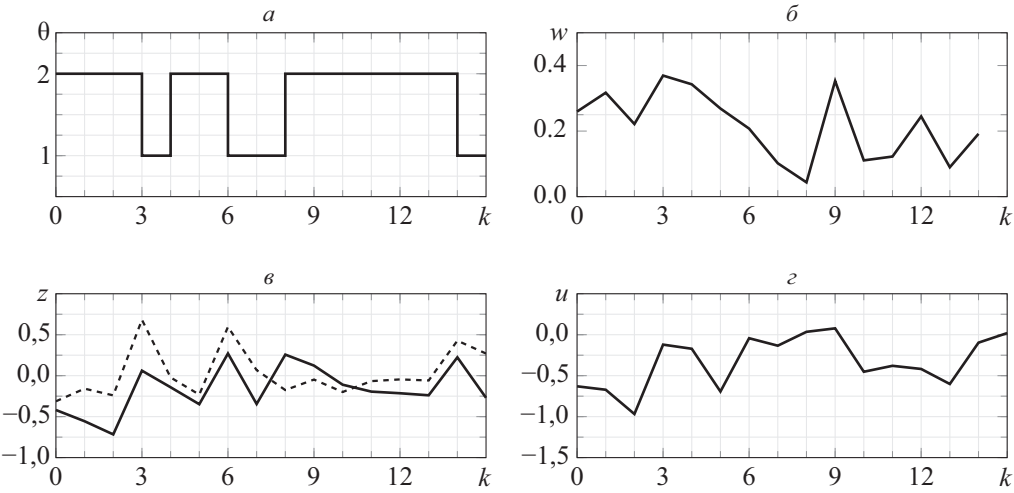


Рис. 2. Пример реализации марковского процесса.

Вычислим обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы (24), когда управление отсутствует. Воспользуемся теоремами 1 и 2. В случае детерминированных внешних возмущений значение нормы составило $\|\mathcal{S}\|_d = 9{,}35$. В случае стохастических внешних возмущений при использовании неравенств (П.20) получено значение нормы $\|\mathcal{S}\|_s = 12{,}51$.

С использованием теоремы 4 синтезированы регуляторы $\Theta_1(k) = [\Theta_{1,1}(k),\, \Theta_{1,2}(k)]$ и $\Theta_2(k) = [\Theta_{2,1}(k),\, \Theta_{2,2}(k)]$, при этом значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы равно $\gamma = 1{,}49$. На рис. 1 представлены графики коэффициентов обратной связи $\Theta_1(k)$ (рис. 1,*а*) и $\Theta_2(k)$ (рис. 1,*б*). Сплошная кривая соответствует компонентам $\Theta_{1,1}(k)$ и $\Theta_{2,1}(k)$, а штриховая – компонентам $\Theta_{1,2}(k)$ и $\Theta_{2,2}(k)$ матриц обратной связи. На рис. 2 представлен пример реализации марковского процесса: графики изменения состояния марковской цепи (рис. 2,*а*), внешних возмущений (рис. 2,*б*), компонент вектора целевого выхода системы z_1 (сплошная кривая) и z_2 (пунктирная кривая) (рис. 2,*в*), управления (рис. 2,*г*).

Далее рассмотрим задачу синтеза регулятора, параметры которого не зависят от состояния марковского процесса (20). Для решения неравенств тео-

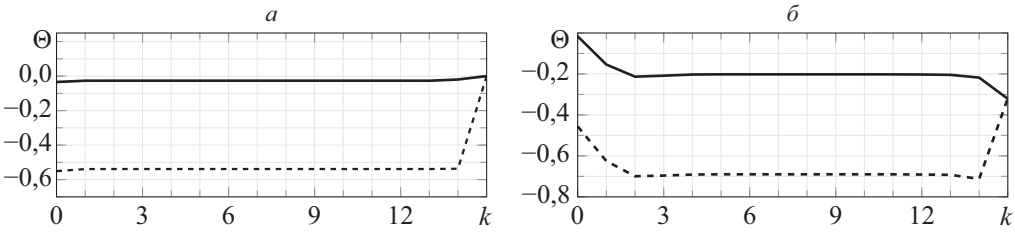


Рис. 3. Коэффициенты матрицы обратной связи $\Theta(k)$.

ремы 5 выберем параметр $\rho = 40$, при котором получается наименьшее значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы $\gamma = 4{,}95$, остальные параметры моделирования оставим прежними. На рис. 3,*а* приведены графики коэффициентов обратной связи $\Theta(k)$ в зависимости от времени (сплошная кривая соответствует первой компоненте, а штриховая – второй компоненте матрицы $\Theta(k)$).

Для построения регулятора с использованием теоремы 6 выберем параметр $\rho = 25$, при котором получается наименьшее значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы $\gamma = 3{,}84$, остальные параметры моделирования оставим прежними. На рис. 3,*б* приведены графики коэффициентов обратной связи $\Theta(k)$ в зависимости от времени (сплошная кривая соответствует первой компоненте, а штриховая – второй компоненте матрицы $\Theta(k)$).

Заметим, что вычисление оптимального значения ρ в ходе экспериментов выполнялось в два этапа. На первом этапе для определения области локализации минимума использовался фиксированный крупный шаг (равный 100). Затем на найденном интервале поиск продолжался уже с меньшим шагом (равным 10). На втором этапе, поскольку зависимость γ от ρ на этом отрезке являлась выпуклой, применялся метод минимизации унимодальной функции. Полученные в результате значения $\rho = 25$ и $\rho = 40$ округлены до целых чисел, так как дальнейшее увеличение точности не оказывало существенного влияния на финальные результаты.

Все расчеты выполнялись в среде MATLAB с использованием пакета YALMIP для задания линейных матричных неравенств. Численное решение задач полуопределенного программирования осуществлялось с помощью решателей SeDuMi и SDPT3.

5. Заключение

Для линейных систем дискретного времени со случайной структурой на конечном горизонте введено понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, приведены алгоритмы ее вычисления, основанные как на решении системы матричных разностных уравнений Риккати, так и на решении систем линейных матричных неравенств. Построено управление в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию системы, минимизирующее оценку обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы

замкнутой системы. Исследуются два типа законов управления: регуляторы, в которых матрица обратной связи может перестраиваться в зависимости от текущего состояния марковской цепи, и регуляторы, использующие единую матрицу коэффициентов обратной связи. Эффективность предложенных подходов продемонстрирована результатами численных экспериментов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Найдем решение системы (1). Для удобства введем обозначения

$$\xi(0) = R^{1/2}x(0), \qquad \xi(k) = \operatorname{column}\left(R^{1/2}x(0), w(0), \dots, w(k-1)\right),$$
$$\Gamma(k) = \left[C_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}\dots A_{\theta(0)}R^{-1/2},\ \ C_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}\dots A_{\theta(1)}B_{\theta(0)},\ \ \dots,\ \ C_{\theta(k)}B_{\theta(k-1)}\right],$$

тогда целевой выход может быть записан в виде $z(k) = \Gamma(k)\xi(k)$. Вычислим квадрат обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы системы:

$$\text{(П.1)}\quad \|\mathcal{S}\|_s^2 = \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\max\limits_{k=0,\dots,N}\mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\|w\|_{l_2}^2 + x_0^\top R x_0} =$$
$$= \max_{k=0,\dots,N}\max_{\xi(k)\neq 0}\frac{\xi^\top(k)\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}\xi(k)}{\xi^\top(k)\xi(k)} = \max_{k=0,\dots,N}\lambda_{\max}\left(\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}\right).$$

Далее рассмотрим вычисление $\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}$. При $k=0$ находим математическое ожидание по величине $\theta(0)$, получим

$$\text{(П.2)}\qquad \mathbb{E}\{\Gamma^\top(0)\Gamma(0)\} = R^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j C_j^\top C_j R^{-1/2} = R^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(0)R^{-1/2}.$$

Для вычисления в момент времени $k=1$ будем усреднять по $\theta(0)$ и $\theta(1)$, заметим что

$$\text{(П.3)}\qquad Y_j(1) = \sum_{s=1}^{S} p_{js}\begin{bmatrix}A_j^\top\\ B_j^\top\end{bmatrix} C_s^\top C_s \begin{bmatrix}A_j & B_j\end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{S} p_{js}L_{j,1}^\top Y_s(0)L_{j,1},$$

тогда

$$\text{(П.4)}\qquad \mathbb{E}\{\Gamma^\top(1)\Gamma(1)\} = R_1^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(1)R_1^{-1/2}.$$

Далее при $k=2$ имеем

$$\text{(П.5)}\qquad \begin{aligned} Y_j(2) &= \sum_{s=1}^{S} p_{js}L_{j,2}^\top Y_s(1)L_{j,2},\\ \mathbb{E}\{\Gamma^\top(2)\Gamma(2)\} &= R_2^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(2)R_2^{-1/2}, \end{aligned}$$

и, наконец, в произвольный момент времени

$$
\begin{aligned}
Y_j(k) &= \sum_{s=1}^{S} p_{js} L_{j,k}^{\top} Y_s(k-1) L_{j,k}, \\
\mathbb{E}\{\Gamma^{\top}(k)\Gamma(k)\} &= R_k^{-1/2} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k) R_k^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{П.6}
$$

Пусть максимум достигается при $k = k^*$, тогда наихудшие начальное состояние и внешние возмущения могут быть найдены как

$$
\xi(k^*) = e_{\max}\Big(\mathbb{E}\{\Gamma^{\top}(k^*)\Gamma(k^*)\}\Big); \qquad w(j) = 0, \qquad j = k^*, \ldots, N-1, \tag{П.7}
$$

или

$$
\begin{bmatrix} x^*(0) \\ w^*(0) \\ \vdots \\ w^*(k-1) \end{bmatrix} = e_{\max}\left(R_{k^*}^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k^*) \right); \tag{П.8}
$$

$$
w(j) = 0, \qquad j = k^*, \ldots, N-1.
$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем выражение квадрата обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{S}\|_s^2 &= \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\max\limits_{n=0,\ldots,N} \mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0} = \\
&= \max_{n=0,\ldots,N} \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0}.
\end{aligned} \tag{П.9}
$$

Зафиксируем произвольный момент времени $n \in \{0, \ldots, N\}$ и рассмотрим задачу вычисления величины

$$
\gamma_n^2 = \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0}. \tag{П.10}
$$

Условие (П.10) эквивалентно тому, что максимум следующего функционала равен нулю:

$$
\max_{(x_0,w)\neq 0} \mathbb{E}\left\{ z^{\top}(n) z(n) - \gamma_n^2 \left(x_0^{\top} R x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w^{\top}(k) w(k) \right) \right\} = 0. \tag{П.11}
$$

Для решения задачи (П.11) методом динамического программирования введем функции Беллмана:

$$V_j(n-k, x(k)) = \\ = \max_{w(k),\dots,w(n-1)} \mathbb{E}_{\theta(k+1),\dots,\theta(n)|\theta(k)=j} \left\{ z^\top(n) z(n) - \gamma_n^2 \sum_{i=k}^{n-1} w^\top(i) w(i) \right\}, \tag{П.12}$$

здесь индекс j обозначает состояние марковской цепи в текущий момент времени k, аргумент $n-k$ – количество шагов, оставшихся до конечного момента n, а $x(k)$ – вектор состояния системы в момент времени k. Математическое ожидание берется по величинам $\theta(k+1), \dots, \theta(n)$ при условии, что в момент k цепь находится в состоянии j. Эти функции удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V_j(n-k, x(k)) = \\ = \max_{w(k)} \Big\{ -\gamma_n^2 w^\top(k) w(k) + \mathbb{E}_{\theta(k+1)|\theta(k)=j} \big\{ V_{\theta(k+1)}(n-k-1, x(k+1)) \big\} \Big\}, \\ V_j(0, x(n)) = x^\top(n) C_j^\top(n) C_j(n) x(n).$$

Заметим, что терминальная функция $V_j(0, x(n))$ является квадратичной по $x(n)$. Используя математическую индукцию, можно показать, что в силу квадратичности функционала и линейности системы на каждом шаге функция $V_j(n-k, x(k))$ также будет квадратичной формой по $x(k)$. Таким образом, по индукции все функции Беллмана для любого k имеют квадратичный вид, поэтому будем искать решение в виде квадратичной формы:

$$V_j(n-k, x(k)) = x^\top(k) X_j(k) x(k), \tag{П.13}$$

где $X_j(k)$ – неизвестная симметричная матрица.

Введем обозначение для условного математического ожидания матриц $X_s(k)$:

$$\mathcal{E}_j(k) = \sum_{s=1}^{S} p_{js} X_s(k). \tag{П.14}$$

Тогда математическое ожидание следующей функции Беллмана выражается как:

$$\mathbb{E}_{\theta(k+1)|j} \big\{ V_{\theta(k+1)}(n-k-1, x(k+1)) \big\} = \\ = \big(A_j(k) x(k) + B_j(k) w(k) \big)^\top \mathcal{E}_j(k+1) \big(A_j(k) x(k) + B_j(k) w(k) \big). \tag{П.15}$$

Вычислим $V_j(n-k, x(k))$. Для этого найдем оптимальное возмущение $w(k)$, приравняв градиент выражения (П.15) к нулю, тогда

$$w^*(k) = \big(\gamma_n^2 I - B_j^\top(k) \mathcal{E}_j(k+1) B_j(k) \big)^{-1} B_j^\top(k) \mathcal{E}_j(k+1) A_j(k) x(k) \tag{П.16}$$

при условии положительной определенности гессиана $\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k) \succ 0$.

Подстановка (П.16) дает выражение для функции Беллмана:

$$(\text{П.17}) \quad V_j(n-k, x(k)) = x^\top(k)\Big(A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k) + A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k) \times$$
$$\times (\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k))^{-1}B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k)\Big)x(k).$$

С учетом (П.13) получаем рекуррентное уравнение для матриц $X_j(k)$:

$$(\text{П.18}) \quad X_j(k) = A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k) +$$
$$+ A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k)\big(\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k)\big)^{-1}B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k)$$

с начальным условием $X_j(n) = C_j^\top(n)C_j(n)$.

Для вычисления функционала (П.11) найдем значение функции Беллмана на всем интервале:

$$V_j(n, x(0)) = \max_{w(0),\ldots,w(n-1)} \mathbb{E}_{\theta(1),\ldots,\theta(n)|\theta(0)=j}\left\{z^\top(n)z(n) - \gamma_n^2\sum_{i=0}^{n-1} w^\top(i)w(i)\right\}$$
$$= x_0^\top X_j(0)x_0.$$

Тогда условие (П.11) принимает вид:

$$\max_{x_0}\Big\{-\gamma_n^2 x_0^\top R x_0 + \mathbb{E}_{\theta(0)}\big\{x_0^\top X_{\theta(0)}(0)x_0\big\}\Big\} =$$
$$= \max_{x_0}\left\{x_0^\top\left(-\gamma_n^2 R + \sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right)x_0\right\} = 0,$$

откуда получаем условия для γ_n^2:

$$\gamma_n^2 = \lambda_{\max}\left(R^{-1}\sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right), \quad x^*(0) = e_{\max}\left(R^{-1}\sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right),$$
$$\gamma_n^2 R - \sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0) \succcurlyeq 0.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу монотонности решений стохастических матричных уравнений Риккати [1] условия (8) эквивалентны сле-

дующей задаче оптимизации:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad X_i(n) \succcurlyeq C_i^\top(n) C_i(n), \\
&\qquad X_i(k) \succcurlyeq A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k) + A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\times \\
&\qquad\qquad \times \left(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\right)^{-1}\times \\
&\qquad\qquad \times B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k), \\
&\qquad \mathcal{E}_i(k+1) \succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} p_{is} X_s(k+1), \\
&\qquad \gamma^2 I \succ B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k),\ k = 0, \ldots, n-1,\ i = 1, \ldots, S, \\
&\qquad \gamma^2 R \succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0).
\end{aligned}
\tag{П.19}
$$

Для преобразования нелинейных матричных неравенств Риккати в линейные матричные неравенства сделаем замены $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{E}_i^{-1}(k)$, $Y_i(k) = X_i^{-1}(k)$ и, используя лемму о дополнении Шура, перепишем неравенства в виде

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad \mathcal{L}_0\left(\{Y_i(0)\}_{i=1}^S\right) \succcurlyeq 0, \quad \mathcal{L}_1\left(\{Y_i(k)\}_{i=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\right) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\
&\qquad \begin{bmatrix} Y_i(n) & Y_i(n)C_i^\top(n) \\ C_i(n)Y_i(n) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\
&\qquad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.
\end{aligned}
\tag{П.20}
$$

Пусть обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) равна $\|\mathcal{S}\|_s$ и достигается в момент времени k^*, т.е.

$$
\|\mathcal{S}\|_s = \max_{n=0,\ldots,N} \gamma_n, \qquad k^* = \arg \max_{n=0,\ldots,N} \gamma_n,
$$

где γ_n есть решение задачи (П.20). Таким образом, при $n = k^*$ в задаче (П.20) получаем $\inf \gamma^2 = \gamma^2(k^*) = \|\mathcal{S}\|_s^2$. Пусть в результате решения задачи (11) получены значение $\widehat{\gamma}$ и матрицы $\widehat{Y}_i(k)$, $\widehat{\mathcal{M}}_i(k)$, $k = 0, \ldots, N$. Предположим, что $\widehat{\gamma} < \|\mathcal{S}\|_s$, тогда задача (П.20) при $T = t^*$, $Y_i(k) = \widehat{Y}_i(k)$, $\mathcal{M}_i(k) = \widehat{\mathcal{M}}_i(k)$, $k = 0, \ldots, k^*$, имеет решение $\widehat{\gamma}^2 < \|\mathcal{S}\|_s^2$, что противоречит условию $\inf \gamma^2 = \|\mathcal{S}\|_s^2$, а значит, предположение $\widehat{\gamma} < \|\mathcal{S}\|_s$ неверно, и $\|\mathcal{S}\|_s \leqslant \widehat{\gamma}$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Подставим матрицы замкнутой системы в условия (11), тогда два последних неравенства примут вид

$$\text{(П.21)}\quad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & \big(A_i(k)+H_i(k)\Theta_i(k)\big)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)\big(A_i(k)+H_i(k)\Theta_i(k)\big)^\top & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)\big(C_i(k)+D_i(k)\Theta_i(k)\big)^\top \\ \big(C_i(k)+D_i(k)\Theta_i(k)\big)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Полученные неравенства нелинейны из-за произведения $\Theta_i(k)Y_i(k)$. После стандартной [15, 21, 24] замены переменных $Z_i(k) = \Theta_i(k)Y_i(k)$ исходная система нелинейных матричных неравенств преобразуется в систему линейных матричных неравенств, приведенных в теореме 4, относительно переменных γ^2, $Y_i(k)$, $\mathcal{M}_i(k)$ и $Z_i(k)$. Полученная задача является задачей полуопределенного программирования. После ее решения матрицы коэффициентов обратной связи восстанавливаются по формуле $\Theta_i(k) = Z_i(k)Y_i(k)^{-1}$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Воспользуемся подходом, изложенным в [25]. Умножим третье неравенство (22) слева на T_1 и справа на $T_1^\top$, а четвертое неравенства (22) слева на T_2 и справа на $T_2^\top$, где

$$\text{(П.22)}\quad T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & -\rho^{-1}H_i(k)Z(k)P^{-1}(k) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\rho^{-1}D_i(k)Z(k)P^{-1}(k) \end{bmatrix}.$$

В результате получим неравенства

$$\text{(П.23)}\quad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & \big(A_i(k)+H_i(k)\Theta(k)\big)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)\big(A_i(k)+H_i(k)\Theta(k)\big)^\top & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)\big(C_i(k)+D_i(k)\Theta(k)\big)^\top \\ \big(C_i(k)+D_i(k)\Theta(k)\big)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

которые вместе с первыми двумя неравенствами (22) являются условиями вычисления оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (21) с использованием теоремы 3. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство данной теоремы, как и предыдущей, основано на подходе, изложенном в [25]. Умножим первое неравенство (23) слева на T_1 и справа на $T_1^\top$, а второе неравенства (22) слева на T_2 и справа на $T_2^\top$, где

$$\widehat{T}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & -\rho^{-1}\widehat{\mathcal{P}}_i\widehat{H}(k)Z(k)P^{-1}(k) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

(П.24)

$$\widehat{T}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\rho^{-1}\widehat{\mathcal{P}}_i\widehat{D}(k)Z(k)P^{-1}(k) \end{bmatrix}.$$

В результате получим неравенства

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1) & \big(\widehat{\mathcal{A}}_i(k)+\widehat{\mathcal{H}}_i(k)\Theta(k)\big)\mathcal{M}_j(k) & \widehat{\mathcal{B}}(k) \\ \mathcal{M}_j(k)\big(\widehat{\mathcal{A}}_i(k)+\widehat{\mathcal{H}}_i(k)\Theta(k)\big)^\top & \mathcal{M}_i(k) & 0 \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

(П.25)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k) & \mathcal{M}_i(k)\big(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)+\widehat{\mathcal{D}}_i(k)\Theta(k)\big)^\top \\ \big(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)+\widehat{\mathcal{D}}_i(k)\Theta(k)\big)\mathcal{M}_j(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

которые вместе с третьим неравенством (23) являются условиями вычисления оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (21) с использованием неравенств (16). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P.* Discrete-time Markov jump linear systems. London. Springer, 2005.
2. *Kao Y., Zhang P., Wang C., Xia H.* Analysis and design of Markov jump discrete systems. Singapore. Springer, 2023.
3. *Shi P., Li F.* A survey on Markovian jump systems: Modeling and design // International Journal of Control, Automation and Systems. 2015. V. 13. No. 4. P. 801–812.
4. *Tejada A., González O.R., Gray W.S.* Stability of digital control systems implemented in error-recoverable computers // International Journal of Control. 2008. V. 81. No. 11. P. 1665–1681.
5. *Shen A., Li L., Li C.* H_∞ filtering for discrete-time singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2021. V. 40. No. 6. P. 2683–2705.
6. *Lun Y., Smarra F., D'Innocenzo A.* Optimal control over Markovian wireless communication channels under generalized packet dropout compensation // Automatica. 2025. V. 176. P. 112240.

7. *Abdollahi F., Khorasani K.* A Decentralized Markovian Jump H_∞ Control Routing Strategy for Mobile Multi-Agent Networked Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2011. V. 19. No. 2. P. 269–283.

8. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 27. № 5. С. 809–823.

9. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.

10. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во Уральской гос. академии путей сообщения, 1998.

11. *Mariton M.* Jump linear systems in automatic control. New York. Taylor & Francis, 1990.

12. *Goncalves A.P.C., Fioravanti A.R., Geromel J.C.* Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V. 54. No. 6. P. 1347–1351.

13. *De Oliveira A.M., Costa O.L.V.* Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering for Markov jump linear systems // International Journal of Systems Science. 2018. V. 49. No. 15. P. 3023–3036.

14. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem // International Journal Control. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.

15. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–23.

16. *Liu H., Sun F., Sun Z.* Reduced-order filtering with energy-to-peak performance for discrete-time Markovian jumping systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2004. V. 21. No. 2. P. 143–158.

17. *Feng J., Han K.* Robust full- and reduced-order energy-to-peak filtering for discrete-time uncertain linear systems // Signal Processing. 2015. V. 108. P. 183–194.

18. *Zhang Z., Zhang Z., Yang S.* Robust reduced-order l_2-l_∞ filtering for network-based discrete-time linear systems // Signal Processing. 2015. V. 109. P. 110–118.

19. *De Oliveira A.M., Costa O.L.V., Gabriel G.W., Barros Dos Santos S.R.* Energy-to-Peak Reduced Order Filtering for Continuous-Time Markov Jump Linear Systems With Partial Information on the Jump Parameter // IEEE Access. 2022. V. 10. P. 79124–79133.

20. *Costa O.L.V., De Oliveira A.M., Gabriel G.W., Barros Dos Santos S.R.* Energy-to-Peak Static Output Control for Continuous-Time Hidden Markov Jump Linear Systems // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56. No. 2. P. 8141–8146.

21. *Бирюков Р.С., Бубнова Е.С.* Обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление линейной непрерывной системой с марковскими переключениями на конечном горизонте // АиТ. 2025. № 12. С. 85–103.

22. *Gersho E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems. London. Springer, 2005.

23. *Шайкин М.Е.* Задачи H_2/H_∞-теории регуляторов для линейных стохастических объектов мультипликативного типа // АиТ. 2025. № 2. С. 47–70.

24. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, 1994.
25. *Zhou J., Park J.H., Ma Q.* Non-fragile observer-based H_∞ control for stochastic time-delay systems // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 291. P. 69–83.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 12.05.2026

После доработки 21.07.2026

Принята к публикации 27.07.2026

Стохастические системы

© 2026 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ I: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ[1]

Статья посвящена определению условного распределения специального марковского скачкообразного процесса по наблюдениям в реальном масштабе времени. Оцениваемый процесс может быть трактован как марковская цепь в непрерывном времени со значениями в пространстве случайных величин. Доступные наблюдения представляют собой диффузионные процессы, снос и диффузия в которых являются функциями оцениваемого состояния. Исследован случай линейной зависимости диффузии от состояния. Предложена эквивалентная трансформация, преобразующая исходный наблюдаемый процесс в совокупность диффузионного процесса с единичной диффузией и функции состояния, наблюдаемой без шума. Доказано, что условное распределение состояния сосредоточено на некоторых линейных многообразиях исходного пространства. Представлен набор мер, относительно которых условное распределение абсолютно непрерывно. Соответствующая плотность определена решением рекуррентно связанных интегро-дифференциальных уравнений типа Кушнера–Стратоновича и интегральных преобразований, выполняемых в моменты скачков бесшумовой компоненты преобразованных наблюдений. Исследована задача точного восстановления компонент оцениваемого процесса по имеющимся зашумленным наблюдениям и приведено ее частное решение.

Ключевые слова: наблюдения с мультипликативными шумами, специальный марковский скачкообразный процесс, задача оптимальной фильтрации, уравнение Кушнера–Стратоновича.

DOI: 10.7868/S2413977726120039

1. Введение

Решение задач оптимальной фильтрации состояний стохастических динамических систем с непрерывным временем по разнородной статистической информации весьма востребовано в различных прикладных областях [1–3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00504). Численные эксперименты проводились с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

В большинстве случаев задача фильтрации связана с определением условного математического ожидания (УМО) полезного сигнала по имеющимся наблюдениям, однако «универсальным решением» является определение условного распределения состояния системы. Имея его, возможно найти оценку фильтрации любого полезного сигнала – функции от состояния системы, а также строить не только оценки фильтрации с минимальной среднеквадратичной ошибкой, но и оптимальные относительно произвольного критерия – ожидаемого значения функции ошибки оценки.

В настоящее время получен ряд важных результатов для систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Ито–Вольтерра [4–6], стохастическими уравнениями в частных производных [7–9], дифференциальными уравнениями с грубыми процессами в правой части [10], фрактальными стохастическими процессами [11] и пр.

В наибольшей степени теория оптимальной фильтрации развита для класса стохастических систем, описываемых семимартингалами. В [12] получена формула, описывающая эволюцию УМО семимартингала относительно наблюдаемого семимартингала. Формула имеет абстрактный вид, а для ее применения на практике она нуждается в спецификации для конкретного класса систем наблюдения.

Для численной реализации самыми простыми являются оптимальные фильтры, представимые в виде решения конечномерной замкнутой системы уравнений. К этому классу можно отнести линейные гауссовские системы [13], марковские скачкообразные процессы (МСП) с наблюдениями различного типа [14, 15], некоторые специальные нелинейные стохастические дифференциальные системы (СДС) [16]. К сожалению, класс подобных систем достаточно узок [17].

Решение задачи оптимальной фильтрации в форме описания условного распределения состояния более сложно как в теоретическом плане, так и в последующей численной реализации. Однако такой подход позволяет найти решение задачи для более широкого класса СДС. Для описания распределения обычно используются нормированная условная плотность [18], ее ненормированный вариант [19], а также условная характеристическая функция [20].

Уравнения Кушнера–Стратоновича и Закаи, описывающие эволюцию условной плотности, существенным образом опираются на гирсановскую замену вероятностной меры. Данный инструмент, в свою очередь, ограничивает класс систем наблюдения, для которых эти уравнения имеют место: интенсивность шумов в наблюдениях не может зависеть от оцениваемого состояния. Таким образом, обширный класс интересных для практики систем исключается из рассмотрения из-за технических ограничений. Задачи оптимальной фильтрации в системах с мультипликативными шумами (иначе, с шумами, зависящими от состояния) предпринимались различными авторами [21–24]. В случае, когда оцениваемый процесс представляет собой МСП с конечным множеством состояний, а непрерывные наблюдения содержат мультиплика-

тивные шумы, задача фильтрации была решена в [25, 26], а алгоритимы ее численного решения исследованы в [27].

Целью данной статьи является решение задачи оптимальной фильтрации состояний более широкого класса специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП) [28, 29] по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен класс СМСП и его мартингальное разложение, необходимое для вывода уравнений оптимальной фильтрации. Раздел 3 содержит описание исследуемой стохастической системы наблюдения и постановку задачи оптимальной фильтрации. Сформулированы дополнительные ограничения, обеспечивающие корректность уравнений, характеризующих эволюцию условного распределения состояния. Одним из них является линейная зависимость диффузии от состояния.

В разделе 4 представлены ряд вспомогательных утверждений и решение частных задач, служащих выводу уравнений оптимальной фильтрации. Предложено эквивалентное преобразование, трансформирующее исходные наблюдения в совокупность диффузионного процесса с единичной диффузией и функции от оцениваемого состояния, наблюдаемой без шума. Получен вид условного распределения случайного вектора относительно его аффинной функции. Помимо этого, выведен вид условного распределения дискретной компоненты непрерывно-дискретного случайного вектора относительно его билинейной функции.

Раздел 5 является основным: в нем представлены утверждения, характеризующие эволюцию условного распределения СМСП относительно имеющихся наблюдений. Показано, что на промежутках постоянства интенсивности шумов наблюдений оно сосредоточено на некотором линейном многообразии, определяемом этой интенсивностью. Предложена конструкция мер, относительно которых условное распределение будет абсолютно непрерывным. Эволюция соответствующей условной плотности описывается рекуррентно связанной системой стохастических интегро-дифференциальных уравнений на промежутках постоянства бесшумовых наблюдений и интегральных преобразований – в моменты скачков этих наблюдений.

Наличие бесшумовых наблюдений дает возможность точного восстановления (идентификации) комбинации компонент или всего вектора состояния СМСП. Раздел 6 представляет термин идентифицируемости, саму ее возможность, а также два ее важных частных случая. В разделе 7 приведены заключительные замечания и выводы, а также анонсирована цель второй части работы – численное решение представленной задачи фильтрации.

2. Представление класса специальных марковских скачкообразных процессов

Класс СМСП, используемых в работе в качестве состояний стохастических систем наблюдения, был предложен в [29] и является обобщением про-

цессов из [28]. Рассмотрим процесс $Z_t = \operatorname{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{N+M}$, содержащий две блочные компоненты. Первая компонента θ_t представляет собой МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \ldots, e_N\}$, матрицей интенсивностей переходов (МИП) $\Lambda(t) = \|\Lambda_{ij}(t)\|_{i,j=\overline{1,N}}$ и начальным распределением $p_0 = \operatorname{col}(p_0^1, \ldots, p_0^N)$.

Вторая компонента $Y_t \in \mathbb{R}^M$ также является процессом с кусочно-постоянными траекториями, терпящим скачки синхронно с θ_t. Если $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность моментов скачков θ_t, то при известной траектории θ_t последовательность $\{Y_{\tau_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ составлена из независимых случайных векторов, условное распределение которых определяется вектором $\Pi(\cdot) = \operatorname{col}(\Pi^1(\cdot), \ldots, \Pi^N(\cdot))$ известных вероятностных распределений на $\mathbb{R}^M$: $\mathsf{P}\{Y_{\tau_i} \in B \mid \theta_{\tau_i} = e_n\} = \Pi^n(B)$ для $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $n = \overline{1,N}$. Распределение начального условия Y_0 определяется с помощью $\Pi_0(\cdot) = \operatorname{col}(\Pi_0^1(\cdot), \ldots, \Pi_0^N(\cdot))$: $\mathsf{P}\{Y_0 \in B \mid \theta_0 = e_n\} = \Pi_0^n(B)$. Далее рассматривается последовательность скачков $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, где $\tau_0 \triangleq 0$.

В работе также используются следующие обозначения:

- $\operatorname{vec}(A) \triangleq \mathbb{R}^{N\times M} \to \mathbb{R}^{NM}$ – операция векторизации матрицы, ставящая в соответствие матрице A вектор-столбец – запись A по столбцам;
- $\operatorname{vec}^{-1}(a) \triangleq \mathbb{R}^{NM} \to \mathbb{R}^{N\times M}$ – операция, обратная векторизации, ставящая в соответствие NM-мерному вектору a матрицу A размерности $N \times M$;
- $A^{1/2}$ – квадратный корень симметрической матрицы A;
- I – единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{I}(t)$ – единичная ступенчатая функция;
- $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{C}$;
- $\boldsymbol{\lambda}(t) \triangleq \operatorname{row}(\Lambda_{11}(t), \ldots, \Lambda_{NN}(t))$ – строка, составленная из диагональных элементов матрицы $\Lambda(t)$, а также $\overline{\Lambda}(t) \triangleq \Lambda(t) - \operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda}(t)$;
- любая функция $f(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(e,y) = \overline{f}(y)e$, где $\overline{f}(y) \triangleq \operatorname{row}(f(e_1,y), \ldots, f(e_N,y))$;
- $\mathsf{E}_f^n \triangleq \int\limits_{\mathbb{R}^M} f(e_n,y)\Pi^n(dy)$, $\quad \mathsf{E}_f = \operatorname{col}(\mathsf{E}_f^1, \ldots, \mathsf{E}_f^N) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \operatorname{diag}\overline{f}(y)\Pi(dy)$;
- $\lambda(dy)$, $\lambda^M(dy)$ – мера Лебега на $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ (верхний индекс используется, если необходимо подчеркнуть размерность пространства, на котором определена мера).

Процесс Z_t является марковским [29].

Если $f = f(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, у которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^M} |\overline{f}^{\top}(y)|(\Pi(dy) + \Pi_0(dy)) < \infty, \tag{1}$$

то функция от СМСП $f(Z_t) = f(\theta_t, Y_t)$ допускает единственное разложение

$$f(\theta_t, Y_t) = f(\theta_0, Y_0) + \int_0^t [\overline{f}(Y_u)\mathrm{diag}\,\boldsymbol{\lambda}(u) + E_f^\top \overline{\Lambda}^\top(u)]\theta_u du + M_t^f, \tag{2}$$

где M_t^f – некоторый мартингал.

3. Постановка задачи фильтрации

На каноническом базисе с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ Винера–Пуассона [30] рассматривается система наблюдения, содержащая

- СМСП $Z_t = \mathrm{col}\,(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ – скрытое состояние системы,
- наблюдаемый процесс $\xi_t \in \mathbb{R}^K$ с почти наверное (п.н.) непрерывными траекториями.

В качестве оцениваемого полезного сигнала выступает индикаторная функция $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t)$ множества $\mathcal{C} \in 2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$. Заметим, что $\mathcal{C}$ представимо в виде

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{C}^n, \tag{3}$$

где $\mathcal{C}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ имеет смысл «сечения» множества $\mathcal{C}$ «плоскостью» $e = e_n$.

Исследуемая стохастическая система наблюдения имеет вид

$$\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t) = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_0) + \int_0^t [\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}^\top(Y_u)\mathrm{diag}\,\boldsymbol{\lambda}(u) + \Pi^\top(\mathcal{C})\overline{\Lambda}^\top(u)]\theta_u du + M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}, \tag{4}$$

$$\xi_t = \int_0^t g(Z_s)ds + \int_0^t h^{1/2}(Z_s)dw_s. \tag{5}$$

Уравнение (4) является частным случаем разложения (2): в нем $\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}(y) \triangleq \triangleq \mathrm{row}(\mathbf{I}_{\mathcal{C}^1}(y), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{C}^N}(y))$, $\Pi(\mathcal{C}) \triangleq \mathrm{col}\,(\Pi^1(\mathcal{C}^1), \ldots, \Pi^N(\mathcal{C}^N))$, а $M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}$ – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал.

В наблюдениях (5) $g(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ – вектор-функция, определяющая снос, $h(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{K\times K}$ – матричнозначная функция со значениями во множестве симметрических неотрицательно определенных матриц задает интенсивность шумов в наблюдениях, а $w_t \in \mathbb{R}^K$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс.

Пусть $\mathsf{O}_t \triangleq \{\xi_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ – естественный поток σ-алгебр, порожденный доступными наблюдениями, а $\mathcal{O}_t \triangleq \mathsf{O}_{t+} \triangleq \bigcap_{s:\, t<s} \mathsf{O}_s$ – его замыкание справа.

Задача оптимальной фильтрации состояния СМСП Z_t заключается в нахождении его условного распределения относительно потока $\mathcal{O}_t$.

Исходный поток $\{\mathsf{O}_t\}$ не обладает свойством непрерывности справа [26, 31], поэтому оценивание предлагается проводить относительно замыкания справа $\mathcal{O}_t$ этого потока [12]. С теоретической точки зрения подобное замыкание

носит чисто технический характер, обеспечивая легитимность использования математического аппарата стохастического анализа. На практике в зависимости от схемы поступления наблюдений и процедуры их использования это замыкание означает трансформацию исходной задачи фильтрации либо в сглаживание с фиксированным малым запаздыванием, либо в прогнозирование на малый фиксированный шаг. В то же время при наличии наблюдений (5), дискретизованных по времени с шагом Δ_t, их оптимальная обработка позволяет в пределе при $\Delta_t \to 0$ получить условное распределение Z_t относительно исходного потока $\{\mathsf{O}_t\}$ [32].

Второе слагаемое в (5) в разных источниках именуется мультипликативным шумом (*multiplicative noise*) [25, 33, 34], шумом, зависящим от состояния (*state-dependent noise*) [22] или шумом, зависящим от сигнала (*signal-dependent noise*) [24]. Первый термин выглядит предпочтительнее по следующей причине. С инженерной точки зрения в (5) присутствуют *два* полезных сигнала, содержащих информацию об оцениваемом состоянии – это функции $g(Z_t)$ и $h^{1/2}(Z_t)$. Первый сигнал интегрируется без искажений, а второй в процессе интегрирования искажается путем *умножения* на белый шум. Наличие мультипликативных шумов в непрерывных наблюдениях, с одной стороны, значительно усложняет процедуру оптимального оценивания, с другой – позволяет коренным образом повысить ее точность.

Компонента θ_t и весь СМСП Z_t могут быть в эквивалентной форме описаны в виде мультивариантного точечного процесса (МТП) $\Theta = \{(\tau_i, \boldsymbol{\theta}_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, где $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ – последовательность моментов скачков θ_t, а $\boldsymbol{\theta}_i \triangleq \theta_{\tau_i}$ – значение процесса θ_t в момент i-го скачка. Пусть $\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \sigma\{(\boldsymbol{\theta}_j, \tau_j),\ 0 \leqslant j \leqslant i\}$ – естественное семейство σ-алгебр, порожденное МТП Θ. Известно [35] соотношение между потоком $\{\mathcal{F}_t^{\theta}\}_{t\geqslant 0}$ и семейством $\{\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$: $\mathcal{F}_{\tau_i}^{\theta} \equiv \mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}}$. Пусть $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ – последовательность $M \times N$-мерных независимых случайных матриц, компоненты которых также независимы и имеют распределения Π_0 при $i = 0$ и Π при $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{P}\{\mathbf{Y}_0 e_n \in \mathcal{C}\} = \Pi_0^n(\mathcal{C}), \quad \mathsf{P}\{\mathbf{Y}_i e_n \in \mathcal{C}\} = \Pi^n(\mathcal{C}) \quad \forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M).$$

Для последующего корректного вывода уравнений, характеризующих эволюцию условного распределения СМСП, необходимо уточнить свойства системы (4) и (5).

А. В рассматриваемом пространстве Винера–Пуассона компонента Y_t процесса Z_t связана с последовательностью $\mathbf{Y}$ соотношением $Y_{\tau_i} = \mathbf{Y}_i\boldsymbol{\theta}_i$.

Б. Компоненты МИП $\Lambda(t)$ представляют собой кусочно-непрерывные функции.

В. Меры $\Pi_0^n(\cdot)$ и $\Pi^n(\cdot)$ абсолютно непрерывны по мере Лебега с плотностями $\pi_0^n(\cdot)$ и $\pi^n(\cdot)$; ниже используются обозначения $\pi_0(y) = \mathrm{col}\,(\pi_0^1(y), \ldots, \pi_0^N(y))$ и $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$. При этом носитель $\mathcal{D}$ распределения Y_t – ограниченное множество.

Г. Функция $g(e,y)$ непрерывна по второму аргументу, а также

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} g^\top(e_n,y) g(e_n,y) \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) \lambda(dy) < \infty.$$

Д. Интенсивность шумов в наблюдениях линейна по компоненте y, т.е. функция $h(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{K\times K}$ такова, что

$$\operatorname{vec}\left(h(e,y)\right) \triangleq H(e,y) = \sum_{n=1}^{N} e^\top e_n \left(\Gamma_n y + \gamma_n\right), \tag{6}$$

где $\{\Gamma_n\}_{n=\overline{1,N}}$ – известные неслучайные матрицы размерности $K^2 \times M$, а $\{\gamma_n\}_{n=\overline{1,N}}$ – K^2-мерные вектор-столбцы.

Е. Интенсивность шумов в наблюдениях равномерно невырождена: существует такая $\alpha > 0$, что для $\forall\, y \in \mathcal{D}$ и $n = \overline{1,N}$

$$h(e_n,y) \geqslant \alpha I.$$

Условие А гарантирует зависимость распределения Y_{τ_i} только от значения θ_{τ_i} и условную независимость различных сечений последовательности $\{Y_{\tau_i}\}$ при фиксированной траектории $\{\theta_{\tau_i}\}$. Подобное требование вполне естественно для скрытых марковских моделей [15]. Условие Б обеспечивает представление матрицы переходных вероятностей компоненты θ_t с помощью решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, а также справедливость мартингального разложения (4). Условие В гарантирует существование плотности распределения компоненты Y_t. Ограниченность носителя распределения $\mathcal{D}$ связана с обеспечением отделимости от нуля интенсивности шумов в непрерывных наблюдениях. Если $\mathcal{D}$ ограничен, то это позволяет проще построить функцию $h(e,y)$, обладающую свойством неотрицательной неопределенности. Условие Г обеспечивает конечность второго момента наблюдений. Это в свою очередь гарантирует корректность СДУ, описывающего эволюцию условного математического ожидания (УМО) произвольного оцениваемого процесса. Условие Д упрощает структуру носителя условного распределения состояния Z_t. Условие Е – равномерная невырожденность шумов – также стандартно в задачах фильтрации [32].

В целом условия А–Е не представляются чрезмерно обременительными и не сокращают значительно круг практических задач оценивания, которые могут быть решены с помощью представляемых результатов.

4. Вспомогательные задачи и утверждения

Предварим основные результаты работы утверждениями, позволяющими получить уравнения условного распределения состояния СМСП относительно имеющихся наблюдений.

Рассмотрим преобразование наблюдений $\xi \to (\varkappa, \varpi)$:

$$\varkappa_t \triangleq \operatorname{vec}\left(\frac{d\langle \xi, \xi\rangle_u}{du}\Big|_{u=t+}\right) = \operatorname{vec}(h(Z_t)) = \sum_{n=1}^{N} e_n^{\top}\theta_t\left(\Gamma_n Y_t + \gamma_n\right), \tag{7}$$

$$\varpi_t \triangleq \int_0^t \left(\operatorname{vec}^{-1}(\varkappa_s)\right)^{-1/2} d\xi_s = \int_0^t \underbrace{h^{-1/2}(Z_s)g(Z_s)}_{\triangleq G(Z_s)}\, ds + W_t, \tag{8}$$

где W_t – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс [32].

Лемма 1. Для любого $t \geqslant 0$ имеет место равенство σ-алгебр, порожденных исходными и преобразованными наблюдениями: $\sigma\{\varkappa_s, \varpi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} = \mathcal{O}_t$.

Истинность леммы следует из того, что можно представить трансформации исходных наблюдений в преобразованные (см. (7) и (8)), а также обратное преобразование $\xi_t = \int_0^t \left(\operatorname{vec}^{-1}(\varkappa_s)\right)^{1/2} d\varpi_s$.

Замечание 1. Условное распределение относительно естественной фильтрации $\{\mathsf{O}_t\}$, порожденной процессом наблюдений, может быть построено как предел некоторых аппроксимаций. Они будут представлены во второй части работы. Явный вид такого условного распределения, равно как и уравнения типа Закаи или Кушнера–Стратоновича, описывающих его эволюцию, в настоящее время не получены. Фильтрация $\{\mathsf{O}_t\}$ незамкнута справа, что не дает возможности использования для вывода уравнений оптимальной нелинейной фильтрации эффективного математического аппарата теории мартингалов. Требование замкнутости справа фильтрации, порожденной наблюдениями, стандартно для задач оптимальной фильтрации [12, с. 243].

Замечание 2. Разница между σ-алгебрами O_t и $\mathcal{O}_t$ хорошо видна при $t = 0$. Действительно, $\mathsf{O}_t = \sigma\{\xi_0\} = \{\Omega, \varnothing\}$ – тривиальная σ-алгебра, в то время как $\mathcal{O}_0 = \sigma\{\varpi_0, \varkappa_0\} = \sigma\{\varkappa_0\} \neq \{\Omega, \varnothing\}$. Из этого следует, что результаты условного осреднения относительно O_0 и $\mathcal{O}_0$ не совпадают.

Преобразование, переводящее исходные наблюдения с мультипликативными шумами в совокупность бесшумовых наблюдений и наблюдений со стандартными винеровским процессом в качестве аддитивного шума, впервые было предложено в [22]. Предлагаемый в данной работе вариант трансформации (7) и (8) имеет существенное отличие: компонента новых наблюдений $\varkappa_t$, не содержащая шума, вычисляется путем взятия *производной справа* от квадратической характеристики исходных наблюдений. Этим обеспечивается возможность получить значение функции от текущего состояния $\varkappa(Z_t)$, а не его предел слева $\varkappa(Z_{t-})$.

Решим далее две вспомогательные задачи, необходимые для оптимальной обработки бесшумовых наблюдений $\varkappa$ при вычислении оценки оптимальной фильтрации.

Задача 1. Пусть $Y(\omega) \in \mathbb{R}^M$ – случайный вектор с плотностью распределения $\pi(y)$. Необходимо найти условное распределение Y относительно наблюдаемой аффинной функции Y, т.е. относительно $\varkappa(\omega) = \Gamma Y(\omega) + \gamma$, где Γ и γ – известные матрица размерности $K^2 \times M$ и K^2-мерный столбец.

При решении данной задачи используются следующие обозначения:

– $M' \triangleq \mathrm{rk}(\Gamma)$,

– $P = [P'\ P'']$ – ортогональная матрица размерности $M \times M$, в которой подматрица P' размерности $M \times M'$ составлена из единичных базисных векторов подпространства $\mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$, а подматрица P'' размерности $M \times M''$ – из аналогичных векторов подпространства $\mathrm{Ker}\,(\Gamma)$,

– $v \triangleq \left[\begin{smallmatrix} v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^M$ – вектор, содержащий M'-мерную блочную компоненту v' и M''-мерную блочную компоненту v'',

– $\mathcal{K} \triangleq \{\kappa \in \mathbb{R}^{K^2} : \exists\, y \in \mathbb{R}^M,\ \Gamma y + \gamma = \kappa\}$ – образ $\mathbb{R}^M$ при преобразовании $y \to \Gamma y + \gamma$,

– $\mathcal{Y}_\kappa \triangleq \{y \in \mathbb{R}^M : \Gamma y + \gamma = \kappa\}$ – полный прообраз κ,

– $\rho(v') \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } M' = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv''), & \text{если } 0 < M' < M, \\ \pi(v'), & \text{если } M' = M, \end{cases}$

– на $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ определяется семейство мер, параметризованное $\kappa \in \in \mathbb{R}^{K^2}$ – возможной реализацией наблюдения $\varkappa$:

$$\mu_{Y|\varkappa}(dy|\kappa) = \begin{cases} \lambda(dy)\text{– мера Лебега на } \mathbb{R}^M, & \text{если } M' = 0, \\ \Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa)\text{– мера Лебега } \lambda^{M''}(\cdot), \text{ сосредоточенная на } \mathcal{Y}_\kappa, & \\ & \text{если } 0 < M' < M, \\ \delta_{\Gamma^+(\kappa-\gamma)}(dy)\text{– мера Дирака, сосредоточенная} & \\ \text{в точке } \Gamma^+(\kappa - \gamma), & \text{если } M' = M. \end{cases}$$

Лемма 2. Условное распределение $\mathsf{P}_{Y|\varkappa}$ вектора Y относительно $\varkappa$ абсолютно непрерывно по мере $\mu_{Y|\varkappa}$ и определяется производной Радона–Никодима

$$\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa) = \tag{9}$$

$$= \begin{cases} \pi(y), & \textit{если } M' = 0, \\ \pi(y)\rho^+((P')^\top(\Gamma^+(\varkappa - \gamma))\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y), & \textit{если } 0 < M' < M, \quad \mathsf{P}\textit{-п.н.} \\ 1, & \textit{если } M' = M, \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Задача 2. Имеется блочный случайный вектор $Z(\omega) = \mathrm{col}\,(\theta(\omega), Y(\omega))$: $\theta(\omega) \in \mathbb{S}^N$, $Y(\omega) \in \mathbb{R}^M$. Распределение Z определяется соотношением

$$\mathsf{P}\{\theta = e_n, Y \in \mathcal{C}\} = p^n \int_{\mathcal{C}} \pi^n(y)\lambda(dy) \quad \text{для } \forall\ n = \overline{1, N},\ \mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M),$$

где $p \triangleq \mathrm{col}\,(p^1, \ldots, p^N)$ – вектор дискретного распределения, $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$ – вектор, составленный из плотностей вероятности.

Имеется наблюдение $\varkappa(\omega) = \sum_{n=1}^N e_n^\top \theta(\omega)(\Gamma_n Y(\omega) + \gamma_n)$. Необходимо найти условное распределение θ относительно $\varkappa$.

Как и в предыдущей задаче, для всех $n = \overline{1,N}$ определим

- M_n', M_n'', P_n, v_n, $\mathcal{K}^n$, $\mathcal{Y}_\varkappa^n$, $\mu_{Y|\varkappa}^n(\cdot)$, $\rho_n(\cdot)$ – объекты, аналогичные используемым в задаче 1 и соответствующие разным парам (Γ_n, γ_n), $n = \overline{1,N}$,
- $\mathcal{N}' \triangleq \{n = \overline{1,N} :\ M_n' = 0\}$, $\mathcal{N}'' \triangleq \{1, \ldots, N\} \backslash \mathcal{N}'$,
- набор мер $\mu_\varkappa^n(\cdot)$, $n = \overline{1,N}$ на $(\mathbb{R}^{K^2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2}))$:

$$\mu_\varkappa^n(d\kappa) \triangleq$$
$$\triangleq \begin{cases} \delta_{\gamma_n}(d\kappa) \text{ – мера Дирака, сосредоточенная в точке } \gamma_n, & \text{если } n \in \mathcal{N}', \\ \Lambda_\varkappa^n(d\kappa) \text{ – мера Лебега } \lambda^{M''}(\cdot), \text{сосредоточенная на } \mathcal{K}^n, & \text{если } n \in \mathcal{N}'', \end{cases}$$

а также суммарную меру $\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) \triangleq \sum_{n=1}^n \mu_\varkappa^n(d\kappa)$.

Заметим, что $\mu_\varkappa^n \ll \mu_\varkappa^\Sigma$ для всех $n = \overline{1,N}$.

Лемма 3. Условное распределение θ относительно $\varkappa$ определяется формулой

$$\mathsf{P}\{\theta = e_n \mid \varkappa\} = \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\varkappa - \gamma_n)) \dfrac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\varkappa)}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_\varkappa^\ell}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\varkappa)}, \qquad \mathsf{P}\text{-}n.н. \tag{10}$$

Доказательство леммы 3 дано в Приложении.

5. Уравнения оптимальной фильтрации

Для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ обозначим $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}} \triangleq \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}}^n$ – множества полных прообразов бесшумовых наблюдений $\varkappa_t$ в моменты их скачков σ_i, а также семейство мер $\mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_{\sigma_i}) \triangleq \sum_{n=1}^N \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_{\sigma_i})$.

Следующее утверждение определяет условное распределение Z_0 относительно $\mathcal{O}_0$ – оценку фильтрации в начальный момент времени.

Теорема 1. Условное распределение состояния $Z_0 = \mathrm{col}\,(\theta_0, Y_0)$ относительно $\mathcal{O}_0$ сосредоточено на множестве $\mathfrak{Y}_{\varkappa_0}$ и абсолютно непрерывно относительно меры $\mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(\cdot|\varkappa_0)$. Распределение описывается функцией $\widehat{\psi}(0,y) = \mathrm{col}\,(\widehat{\psi}^1(0,y), \ldots, \widehat{\psi}^N(0,y))$:

$$\mathsf{P}\{\theta_0 = e_n,\ Y_0 \in \mathcal{C}\} = \int_{\mathcal{C}} \widehat{\psi}^n(0,y) \mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_0), \quad \mathsf{P}\text{-}n.н., \tag{11}$$

где

$$\widehat{\psi}^n(0,y)=\mathbf{I}_{\mathcal{Y}^n_{\varkappa_0}}(y)\frac{p^n\pi^n_0(y)\rho_n((P'_n)^\top\Gamma^+_n(\varkappa_0-\gamma_n))\dfrac{d\mu^n_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(\varkappa_0)\dfrac{d\mu^n_{Y|\varkappa}}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}p^\ell\pi^\ell_0(y)\rho_\ell((P'_\ell)^\top\Gamma^+_\ell(\varkappa_0-\gamma_\ell))\dfrac{d\mu^\ell_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(y|\varkappa_0)},\quad n=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Пересчет условного распределения состояния СМСП в момент σ_i, $i\in\mathbb{N}$ выполняется по аналогичной формуле.

Теорема 2. Для любого $i\in\mathbb{N}$ условное распределение состояния $Z_{\sigma_i}=\operatorname{col}(\theta_{\sigma_i},Y_{\sigma_i})$ относительно $\mathcal{O}_{\sigma_i}$ сосредоточено на множестве $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}}$ и абсолютно непрерывно относительно меры $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot|\varkappa_{\sigma_i})$. Распределение описывается функцией $\widehat{\psi}(\sigma_i,y)=\operatorname{col}(\widehat{\psi}^1(\sigma_i,y),\dots,\widehat{\psi}^N(\sigma_i,y))$:

$$\mathsf{P}\{\theta_{\sigma_i}=e_n,\ Y_{\sigma_i}\in\mathcal{C}\}=\int\limits_{\mathcal{C}}\widehat{\psi}^n(\sigma_i,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_i}),\quad \mathsf{P}\text{-}п.н., \tag{13}$$

где

$$\widehat{\psi}^n(\sigma_i,y)=\mathbf{I}_{\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_i}}}(y)\frac{\widehat{\theta}^n_{\sigma_i-}\pi^n(y)\dfrac{d\mu^n_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(\varkappa_{\sigma_i})\dfrac{d\mu^n_{Y|\varkappa}}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_i})}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\widehat{\theta}^\ell_{\sigma_i-}\pi^\ell(y)\rho_\ell((P'_\ell)^\top\Gamma^+_\ell(\varkappa_{\sigma_i}-\gamma_\ell))\dfrac{d\mu^\ell_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(y|\varkappa_{\sigma_i})},\quad n=\overline{1,N}, \tag{14}$$

и $\widehat{\theta}^n_{\sigma_i-}\triangleq\mathsf{E}\left\{e_n^\top\theta_{\sigma_i}|\mathcal{O}_{\sigma_i-}\right\}=\mathsf{E}\left\{e_n^\top\theta_{\sigma_i}|\mathsf{O}_{\sigma_i}\right\}$.

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Замечание 3. Формулы (12) в теореме 1 и (14) в теореме 2 выглядят сходными. Это сходство может быть неформально объяснено марковским свойством составного процесса $\operatorname{col}(Z_t,\xi_t)$. Тем не менее смысл их и способ доказательства совершенно различен. Формула (12) представляет вид условного распределения начального условия Z_0 относительно конечномерного случайного вектора $\varkappa_0$, в то время как (14) задает условное распределение состояния Z_{σ_i} в момент i-го скачка процесса $\varkappa$ относительно наблюдений траекторий $\operatorname{col}(\varpi_t,\varkappa_t)$ до момента σ_i. Несмотря на сходство формул, техника их доказательства различна.

Следующее утверждение представляет решение поставленной задачи оптимальной фильтрации.

Теорема 3. На интервалах постоянства $[\sigma_{i-1},\sigma_i)$ $(i\in\mathbb{N})$ *бесшумовых наблюдений* $\varkappa_t$ *условное распределение СМСП* Z_t *сосредоточено на множествах* $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$ *(см. теоремы 1 и 2), абсолютно непрерывно относительно меры* $\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})$ *и определяется плотностью* $\widehat{\psi}(t,y)=$ $=\operatorname{col}(\widehat{\psi}^1(t,y),\dots,\widehat{\psi}^N(t,y))$*: для* $\forall\ n=\overline{1,N}$, $\mathcal{C}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\mathsf{P}\left\{\theta_t=e_n,Y_t\in\mathcal{C}|\mathcal{O}_t\right\}=\int\limits_{\mathcal{C}}\widehat{\psi}^n(t,y)\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}),\quad \mathsf{P}\text{-}n.н.$$

Здесь

$$\widehat{\psi}^n(t,y)=\frac{\widetilde{\psi}^n(t,y)}{\sum\limits_{\ell=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\widetilde{\psi}^{\ell}(t,v)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}})},\quad n=\overline{1,N},\tag{15}$$

а функция ненормированной плотности $\widetilde{\psi}(t,y)\triangleq\operatorname{col}(\widetilde{\psi}^1(t,y),\dots,\widetilde{\psi}^N(t,y))$, $t\in[\sigma_{i-1},\sigma_i)$ *представляет собой решение системы уравнений*

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(t,y)=\widetilde{\psi}(\sigma_{i-1},y)+\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\Bigg[&\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s))\widetilde{\psi}(s,y)+\\&+\frac{d\lambda^M}{d\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))\operatorname{diag}(\pi(y))\overline{\Lambda}^{\top}(s)\widetilde{V}_s\Bigg]ds+\\&+\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\operatorname{diag}(\widetilde{\psi}(s,y))\left[\overline{G}(y)-\widetilde{G}_s\mathbf{1}\right]^{\top}(d\varpi_s-\widetilde{G}_sds),\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\overline{G}(y)\triangleq\begin{bmatrix}G^1(e_1,y)&\dots&G^1(e_N,y)\\\dots&\dots&\dots\\G^K(e_1,y)&\dots&G^K(e_N,y)\end{bmatrix},\qquad\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\triangleq\begin{bmatrix}\Pi^1(\mathcal{Y}^1_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\\\dots\\\Pi^N(\mathcal{Y}^N_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_t&\triangleq\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\begin{bmatrix}G^1(e_n,v)\\\dots\\G^K(e_n,v)\end{bmatrix}\widetilde{\psi}^n(t,v))\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}}),\\\widetilde{V}_t&\triangleq\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}e_n\widetilde{\psi}^n(t,y))\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}}).\end{aligned}\tag{17}$$

Начальная плотность $\widehat{\psi}(0,y)$ *определяется формулой* (12)*, а пересчет плотности* $\widehat{\psi}(\sigma_i,y)$ *в момент* σ_i *скачка бесшумового наблюдения производится по формуле* (14)*.*

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

Замечание 4. Теорема 3 совместно с теоремами 1 и 2 описывает эволюцию плотности условного распределения $\widehat{\psi}(t,y)$ СМСП Z_t. Начальное распределение вычисляется с помощью интегральной формулы (12) (см. теорему 1). При этом носитель распределения – линейное многообразие $\mathfrak{Y}_{\varkappa_0}$ также полностью определяется бесшумовым наблюдением $\varkappa_0$ в начальный момент времени. Этот носитель распределения сохраняется до момента σ_1 следующего скачка $\varkappa$. На интервале времени $[0;\sigma_1)$ плотность $\widehat{\psi}(t,y)$ определяется решением системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений (16), (17) и условием нормировки (15). В правой части (16) присутствует обновляющий процесс со стохастическим дифференциалом $d\varpi_t - \widetilde{G}_t dt$. В момент σ_1 согласно теореме 2 по наблюдению $\varkappa_{\sigma_1}$ происходит определение линейного многообразия $\mathfrak{Y}_{\varkappa_1}$ – носителя условного распределения на полуинтервале $[\sigma_1;\sigma_2)$. Условная плотность распределения $\widehat{\psi}(\sigma_1,y)$ в этот момент вычисляется по интегральной формуле (14). Далее описанная последовательность решения интегро-дифференциальных уравнений и вычисления интегральных соотношений производится в цикле, соответствующем интервалам $[\sigma_{i-1};\sigma_i)$.

6. Об идентифицируемости состояний

Возможность трансформации исходных наблюдений (7), в результате которой возникают бесшумовые компоненты $\varkappa_t$, позволяет решить задачу точного восстановления всего состояния СМСП Z_t или некоторых комбинаций его компонент.

Определение 1. Случайный процесс

$$\beta_t = \beta(Z_t) = \alpha\theta_t + AY_t \tag{18}$$

– линейная функция от СМСП Z_t – называется точно идентифицируемым по наблюдениям ξ_t, если $\mathsf{E}\{\beta_t|\mathcal{O}_t\} = \beta_t$, P*-п.н.*

Именно наличие мультипликативных шумов в наблюдениях позволяет точно восстанавливать состояния и компоненты, изначально имея лишь зашумленные наблюдения. Условия, обеспечивающие идентифицируемость β_t, определяются совокупностью следующих вероятностных и алгебраических характеристик:

- взаимного расположения носителей частных распределений $\pi_0^n(\cdot)$ и $\pi^n(\cdot)$ для различных $n = \overline{1,N}$,
- локальных матриц наблюдений Γ_n и γ_n в бесшумовых наблюдениях (7),
- матриц выхода α и A в идентифицируемом процессе β_t (18).

Представляется затруднительным сформулировать универсальные условия идентифицируемости, но ее возможность может быть исследована индивидуально в каждом конкретном случае. Для иллюстрации этого факта рассмотрим два частных случая.

Задача 3. По наблюдениям (7) необходимо идентифицировать компоненту θ_t вектора Z_t. В данном случае это означает, что в процессе β_t параметры равны: $\alpha = I$ и $A = 0$. Напомним, что $\mathcal{K}^n = \{\kappa \in \mathbb{R}^{K^2} : \exists y \in \mathbb{R}^M, \Gamma^n y + \gamma^n = \kappa\}$. Если для (7) выполнено условие

$$\sum_{i,j:i\neq j} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{K}^i}(\Gamma^i y + \gamma^i)\mathbf{I}_{\mathcal{K}^j}(\Gamma^j y + \gamma^j)(\pi_0^i(y) + \pi^i(y))dy = 0, \tag{19}$$

то компонента θ_t идентифицируема.

В качестве функции-идентификатора может выступить

$$\widehat{\theta}_t \triangleq \operatorname{col}\left(\mathbf{I}_{\mathcal{K}^1}(\varkappa_t), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{K}^N}(\varkappa_t)\right).$$

Действительно, множество допустимых значений $\varkappa_t$ представляет собой объединение линейных многообразий $\mathcal{K}^n$. Если $\Pi^n(\mathcal{K}^n \cap \mathcal{K}^i) = \Pi_0^n(\mathcal{K}^n \cap \mathcal{K}^i) \equiv 0$, то пребывание $\varkappa_t$ в данный момент времени в конкретном многообразии $\mathcal{K}^n$ с вероятностью 1 гарантирует, что $\theta_t = e_n$.

Задача 4. По наблюдениям (7) необходимо одновременно идентифицировать компоненту θ_t и линейную комбинацию AY_t компоненты Y_t (здесь A – известная матрица размерности $S \times M$). В этом случае процесс β_t имеет вид

$$\beta_t = \begin{bmatrix} I_{N\times N} \\ 0_{S\times N} \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} 0_{S\times N} \\ A \end{bmatrix} Y_t. \tag{20}$$

Если для (7) выполнено условие (19) совместно с условием

$$A(\Gamma^n)^+\Gamma^n = A \quad \forall\, n = \overline{1, N}, \tag{21}$$

то процесс β_t (20) идентифицируем. В качестве функции-идентификатора может выступить

$$\widehat{\beta}_t = \operatorname{col}\left(\mathbf{I}_{\mathcal{K}^1}(\varkappa_t), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{K}^N}(\varkappa_t), \sum_{n=1}^{N} \mathbf{I}_{\mathcal{K}^n}(\varkappa_t) A(\Gamma^n)^+(\varkappa_t - \gamma^n)\right).$$

Действительно, условие (19) позволяет идентифицировать компоненту θ_t. В этом случае сумма в (7) превращается лишь в одно слагаемое. Условие (19) гарантирует [37] разрешимость системы $\varkappa_t = \Gamma^n Y_t + \gamma^n$ относительно AY_t.

Замечание 5. Достаточные условия идентифицируемости, представленные в задачах 3 и 4, следуют из леммы 1.

Замечание 6. Между условиями идентифицируемости и теоремой 3 имеется следующая связь. Пусть $\widehat{\psi}(t, y)$ – условное распределение процесса Z_t, определяемое решением рекуррентной системы (12), (14)–(17). Если выполнено условие (19) или комбинация (19) и (21), то P-п.н. верно равенство

$$\widehat{\beta}_t = \mathsf{E}\left\{\beta(Z_t)|\mathcal{O}_t\right\} = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} (\alpha e_n + Ay)\widehat{\psi}^n(t, y)\mu_{\varkappa}^{\Sigma}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) =$$

$$= \alpha\theta_t + AY_t = \beta(Z_t) = \beta_t.$$

Таким образом, $\widehat{\psi}(t,y)$ позволяет точно восстановить полезный сигнал β_t – линейную комбинацию состояния Z_t. С вычислительной точки зрения это означает, что можно построить такую поледовательность аппроксимаций условного распределения, что соответствующие им оценки сигнала β_t будут сколь условно близки к его истинному значению в метрике $\mathcal{L}_1$ или $\mathcal{L}_2$. Пример такого поведения оценок при выполнении условий идентифицируемости будет приведен во второй части статьи.

7. Заключение

Решена задача оптимальной фильтрации состояний класса СМСП по наблюдениям с мультипликативными шумами. Решение получено в форме условного распределения состояний относительно имеющихся наблюдений. Доказано, что данное распределение сосредоточено на меняющихся со временем линейных многообразиях. Предложен алгоритм построения специальных мер, относительно которых искомое условное распределение абсолютно непрерывно. Соответствующие плотности описываются совокупностью рекуррентно связанных стохастических интегро-дифференциальных уравнений и интегральных преобразований.

Полученные теоретические результаты в области оптимальной фильтрации могут быть применены для решения класса задач оптимального стохастического управления МСП по неполной информации. В [38, 39] представлено решение задачи управления, где в качестве доступных наблюдений выступает значение МСП, получаемое без дополнительного шума, но с известной временно́й задержкой. Рассмотрим другую задачу управления, где в качестве наблюдений выступают диффузионные процессы с мультипликативными шумами, подобные рассмотренным в данной статье, также доступные с временно́й задержкой. При выполнении условий идентифицируемости по этим наблюдениям состояние может быть восстановлено точно. Наличие задержки легитимизирует процедуру замыкания справа естественной фильтрации, порожденной наблюдениями. Возможность точного восстановления значения управляемого состояния МСП означает, что в предлагаемой задаче управления по неполной информации возможно доказать теорему разделения.

Несмотря на то, что теоретическое решение задачи фильтрации получено и для (16) существуют эффективные «послойные» алгоритмы, их итоговая численная реализация является нетривиальной задачей. Основная проблема заключается в преобразовании исходных наблюдений (7), (8). Оно предполагает последовательное выполнение двух предельных переходов. Первый заключается в вычислении квадратической характеристики семимартингала, второй – в нахождении ее производной. Аппроксимация производной от квадратической вариации, вычисленная по дискретизованным наблюдениям, обладает низкой точностью [22]. Помимо этого, для решения уравнений (16) необходимо знание носителя распределения, что невозможно из-за фактического отсутствия бесшумовых наблюдений. Тем не менее решение системы

(12), (14)–(17) может служить теоретической основой для разработки эффективных алгоритмов ее численного решения.

Во второй части работы для численного решения поставленной задачи фильтрации предлагается использовать иной подход. Его можно проиллюстрировать на примере классической задачи оптимальной фильтрации состояний линейных гауссовских дифференциальных систем. Известно, что ее решение доставляет фильтр Калмана–Бьюси [13], представляющий собой линейную СДС и систему уравнений Риккати. Обе системы в общем случае не имеют аналитического решения. Реализация фильтра Калмана–Бьюси предполагает временну́ю дискретизацию обеих систем и их последующее пошаговое численное решение. С теоретической точки зрения матричнозначная функция – решение системы Риккати всегда обладает свойствами симметричности и неотрицательной определенности. Однако в случае, когда система Риккати относится к классу жестких, ошибки численных методов ее решения нарушает эти свойства, это приводит к тому, что итоговая численная реализация фильтра Калмана–Бьюси демонстрирует недопустимо большие ошибки или вовсе разваливается. Поэтому численное решение ищется не с помощью непосредственной аппроксимации фильтра, а путем замены исходной задачи в непрерывном времени последовательностью аппроксимационных задач в дискретном времени. Для исходной системы наблюдения методом Эйлера–Маруямы строится дискретная система, для которой решение задачи оптимальной фильтрации определяется фильтром Калмана [40], имеющим гораздо больше средств контроля и управления симметричностью и неотрицательной определенностью решения системы Риккати в дискретном времени.

В [26] для численного решения задачи оптимальной фильтрации МСП с конечным множеством состояний по наблюдениям с мультипликативными шумами был предложен аналогичный подход. Он основан на построении оптимальной оценки по уже дискретизованным наблюдениям. Представлены различные численные схемы и получены характеристики точности предложенных аппроксимаций в зависимости от шага дескретизации. Эту идею предлагается использовать во второй части статьи: предложенные в ней оценки фильтрации по дискретизованным наблюдениям помимо собственной прикладной ценности являются аппроксимациями решения системы (12), (14)–(17).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Первый и третий варианты в (9) очевидны. В случае $M' = 0$ наблюдение $\varkappa(\omega) \equiv \gamma$ превращается в детерминированный вектор, и относительно такого вырожденного наблюдения условное распределение $Y(\omega)$ совпадает с безусловным. В случае $M' = M$ случайный вектор $Y(\omega)$ может быть выражен через $\varkappa(\omega)$: $Y(\omega) = \Gamma^{+}(\varkappa(\omega) - \gamma)$, поэтому условное распределение Y относительно $\varkappa$ является одноточечным и описывается соответствующей дельта-функцией Дирака. Обра-

тимся к случаю $0 < M' < M$. Из-за того что $|\det P| = 1$, следует, что $\overline{\pi}(v', v'') \triangleq \pi(P'v' + P''v'')$ представляет собой плотность распределения случайного вектора $V(\omega) = P^\top Y(\omega)$. По теореме Фубини

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma y + \gamma)\pi(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma(P'v' + P''v'') + \gamma)\pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv'')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \underbrace{\left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \overline{\pi}(v', v'')\lambda^{M''}(dv'')\right]}_{=\rho(v')} \lambda^{M'}(dv')$$

и $\rho(v')$ – частная плотность распределения подвектора $V'(\omega)$.

Из определения $\varkappa(\omega)$ следует, что его распределение сосредоточено на $\mathcal{K}$. Свойства Γ и P гарантируют, что множества $\mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$ и $\mathcal{K}$ связаны между собой взаимно однозначным соответствием: $\forall\ y \in \mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)\ \kappa = \Gamma y + \gamma \in \mathcal{K}$, и $\forall\ \kappa \in \mathcal{K}\ y = \Gamma^+(\kappa - \gamma) \in \mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$.

От интегрирования в $(\mathbb{R}^{M'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M'}))$ по мере Лебега можно перейти к интегрированию в $(\mathbb{R}^{K^2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2}))$ по мере $\Lambda_\varkappa(\cdot)$:

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv'')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\mathbf{I}_{\mathcal{K}}(\kappa)\rho((P')^\top\Gamma^+(\kappa - \gamma))\Lambda_\varkappa(d\kappa).$$

Распределение вектора $\varkappa$ абсолютно непрерывно относительно $\Lambda_\varkappa(\cdot)$ и имеет плотность $\frac{d\mathsf{P}_\varkappa}{d\Lambda_\varkappa}(\kappa) = \mathbf{I}_{\mathcal{K}}(\kappa)\rho((P')^\top\Gamma^+(\kappa - \gamma))$. Построим условное распределение Y относительно $\varkappa$. В силу определения $\rho(v')$ выполняется тождество $\overline{\pi}(v', v'') \equiv \overline{\pi}(v', v'')\rho^+(v')\rho(v')$. Для произвольного $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{C}\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\lambda(dy)\delta_{\Gamma y+\gamma}(d\kappa) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma y + \gamma)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(P'v' + P''v'')\overline{\pi}(v', v'')\lambda^{M''}(dv'')\right] \lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(P'v' + P''v'')\overline{\pi}(v', v'')\rho^+(v')\lambda^{M''}(dv'')\right] \rho(v')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\pi(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\lambda^{M''}(dv'') \right] \times$$

$$\times \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\Lambda_{\varkappa}}(\kappa)\Lambda_{\varkappa}(d\kappa).$$

Внутренний интеграл в последнем выражении – интеграл по мере Лебега в $(\mathbb{R}^{M''}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M''}))$. В то же время подынтегральное выражение является функцией от аргумента $\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v''$, сосредоточенного на M''-мерном линейном многообразии $\mathcal{Y}_\kappa$ пространства $\mathbb{R}^M$ – полном прообразе значения κ. На $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ представим меру $\Lambda_{Y|\varkappa}(\cdot)$, сосредоточенную на $\mathcal{Y}_\kappa$ и совпадающую с лебеговой мерой $\lambda^{M''}(\cdot)$, определенной на $\mathbb{R}^{M''}$: $\Lambda_{Y|\varkappa}(\mathcal{C}|\kappa) = \lambda^{M''}(\mathcal{C}\cap\mathcal{Y}_\kappa)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\pi(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\lambda^{M''}(dv'') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa).$$

Таким образом,

$$\text{(П.1)} \quad \mathsf{P}\{\varkappa\in\mathcal{A},\ Y\in\mathcal{C}\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\kappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa) \right] \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\Lambda_{\varkappa}}(\kappa)\Lambda_{\varkappa}(d\kappa).$$

Из (П.1) и определения УМО следует, что

$$\mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y) \mid \varkappa\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\varkappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa).$$

Условное распределение абсолютно непрерывно относительно $\Lambda_{Y|\varkappa}$ с плотностью

$$\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\Lambda_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa) = \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\varkappa-\gamma)) =$$

$$= \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(\Gamma^+(\varkappa-\gamma)+P''v'')dv'' \right)^+.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Из доказательства леммы 2 и определения функций $\rho_n(\cdot)$ следует, что

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \sum_{n=1}^{N} \mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A} \mid \theta = e_n\}\,\mathsf{P}\{\theta = e_n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n y + \gamma_n)\pi^n(y)\lambda(dy) = \sum_{n\in\mathcal{N}'} p^n \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\gamma_n) +$$

$$+ \sum_{n\in\mathcal{N}''} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n P_n' v_n' + \gamma_n) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi^n(P_n' v_n' + P_n'' v_n'')\lambda^{M''}(dv_n'') \right] \lambda^{M'}(dv_n') =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n))\mu_\varkappa^n(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \sum_{n=1}^{N} p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa).$$

Таким образом, распределение $\varkappa$ абсолютно непрерывно относительно меры $\mu_\varkappa^\Sigma$ и имеет плотность

$$\frac{d\mathsf{P}_\varkappa}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa) = \sum_{n=1}^{N} p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa).$$

Проверим, что условное распределение θ относительно $\varkappa$ действительно определяется формулой (10). Для $\forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ выполняется следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta\, \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa)\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} p^n \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n y + \gamma_n)\pi^n(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \dfrac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\kappa - \gamma_\ell)) \dfrac{d\mu_\varkappa^\ell}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} p^j \rho_j((P_j')^\top \Gamma_j^+(\kappa - \gamma_j)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa)}{\sum\limits_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\kappa - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa)} \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa) \mu_{\varkappa}^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta \mid \varkappa\right\} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa)\right\}.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что $\mathcal{O}_0 = \mathcal{F}^{\varkappa_0}$. В силу лемм 2, 3, определения функций $\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(\cdot)$ и $\rho_n(\cdot)$ для произвольных $n = \overline{1,N}$ и $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \mathcal{O}_0\right\} = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \mathcal{F}^{\theta_0} \vee \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \theta_0\right\} | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \sum_{\ell=1}^N e_\ell^\top \theta_0 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^\ell}(y|\varkappa_0) \mu_{Y|\varkappa}^\ell(dy|\varkappa_0) \Big| \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(y|\varkappa_0) \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(y|\varkappa_0) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\varkappa_0 - \gamma_n)) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{p^n \pi_0^n(y) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^n p^\ell \pi_0^\ell(y) \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{p^n \pi_0^n(y) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0) \frac{d\mu_{Y|\varkappa}^n}{d\mu_{Y\varkappa}^\Sigma}(y|\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^n p^\ell \pi_0^\ell(y) \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_0),$$

из чего следует истинность формулы (11). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что $\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathsf{O}_{\sigma_i} \vee \vee \mathcal{F}^{\varkappa_{\sigma_i}}$ и $\mathsf{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{\sigma_i -}$. Имеет место вложение последовательностей $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} \subseteq \subseteq \{\tau_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$, поэтому рассмотрим случайное отображение $j(\omega) \to i(\omega)$: $j = j(i,\omega) = j \in \mathbb{Z}_+ : \tau_j = \sigma_i$, указывающее, какой номер скачка СМСП Z_t соответствует i-му скачку процесса наблюдений $\varkappa_t$. Имеет место следующее

включение σ-алгебр $\mathsf{O}_{\sigma_i} \subseteq \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}$. В силу свойств УМО и условия А верна цепочка равенств

$$\mathsf{P}\{\theta_{\sigma_i} = e_n,\ Y_{\sigma_i} \in \mathcal{C},\ \varkappa_{\sigma_i} \in \mathcal{A} \mid \mathcal{O}_{\sigma_i -}\} = \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_{\sigma_i}) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_i}) \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_{\sigma_i}) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_i}) \mid \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}\right\} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n) \mid \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}\right\} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n)\right\} =$$

$$= \widehat{\theta}^n_{\sigma_i -} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n)\right\}.$$

Последнее распределение соответствует уже изученной схеме наблюдения $\varkappa = \sum_{n=1}^N e_n^\top \theta(\Gamma_n Y + \gamma_n)$, где безусловное распределение p вектора θ заменено условным распределением $\widehat{\theta}_{\sigma_i -}$. Дальнейшее доказательство истинности формул (13) и (14) аналогично доказательству формул (11) и (12) в теореме 1.

Доказательство теоремы 3. Значение бесшумовых наблюдений $\varkappa_{\sigma_{i-1}}$ в момент их $(i-1)$-го скачка ограничивает носитель распределения всего состояния Z_t не только в этот момент, но и на всем полуинтервале $[\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ до наступления следующего скачка $\varkappa$. Этим носителем является множество $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$. Само состояние Z_t на указанном промежутке может изменяться, но при этом не покидает $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$, сохраняя неизменным значение бесшумового наблюдения $\varkappa$. Для вывода уравнений эволюции условного распределения Z_t на $[\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ рассмотрим на полуоси $[\sigma_{i-1}, +\infty)$ процессы

$$V_t \triangleq \theta_t \mathbf{I}_{\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}}(Z_t) \mathbf{I}_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i)}(t), \qquad Q^{\mathcal{B}}_t \triangleq \theta_t \mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Z_t) \mathbf{I}_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i)}(t) \tag{П.2}$$

для произвольного множества $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{B}_n \subseteq \mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$. Сам процесс Z_t и пара (Z_t, ξ_t) обладают марковским свойством и имеют càdlàg-траектории, поэтому с помощью обобщенного правила Ито [12] можно построить разложения

$$V_t = V_{\sigma_{i-1}} + \int_{\sigma_{i-1}}^t \left[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) + \operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))\overline{\Lambda}^\top(s)\right] V_s ds + M^V_t, \tag{П.3}$$

$$Q^{\mathcal{B}}_t = Q^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} + \int_{\sigma_{i-1}}^t \left[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) Q^{\mathcal{B}}_s + \operatorname{diag}(\Pi(\mathcal{B}))\overline{\Lambda}^\top(s)\right] V_s ds + M^{Q^{\mathcal{B}}}_t, \tag{П.4}$$

в которых M^V_t и $M^{Q^{\mathcal{B}}}_t$, $t \geqslant \sigma_{i-1}$, представляют собой некоторые $\mathcal{F}_t$-согласованные мартингалы.

Обозначим:

$$\widetilde{V}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{V_t | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1}, t)}\right\} = \mathsf{E}\left\{V_t | \mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_t\right\},$$

$$\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_t | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1}, t)}\right\} = \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_t | \mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}.$$

Эти процессы описываются уравнениями Фуджисаки–Каллианпура–Куниты [41]

$$\text{(П.5)}\qquad \widetilde{V}_t = \widehat{\theta}_{\sigma_{i-1}} + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) + \operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\overline{\Lambda}^{\top}(s))\Big]\widetilde{V}_s ds + \\ + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\widetilde{V_s G_s^{\top}} - \widetilde{V}_s \widetilde{G}_s^{\top}\Big](d\varpi_s - \widetilde{G}_s ds),$$

$$\text{(П.6)}\quad \widetilde{Q}_t^{\mathcal{B}} = \widehat{Q}_{\sigma_{i-1}}^{\mathcal{B}} + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})\widetilde{Q}_s^{\mathcal{B}} + \operatorname{diag}(\Pi(\mathcal{B}))\overline{\Lambda}^{\top})\widetilde{V}_s\Big] ds + \\ + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\widetilde{Q_s^{\mathcal{B}} G_s^{\top}} - \widetilde{Q}_s^{\mathcal{B}} \widetilde{G}_s^{\top}\Big](d\varpi_s - \widetilde{G}_s ds),$$

в которых начальные условия $\widehat{V}_{\sigma_{i-1}}$ и $\widehat{Q}^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}}$ вычислены по формулам (12) или (14),

$$\widehat{\theta}_{\sigma_{i-1}} = \mathsf{E}\left\{\theta_{\sigma_{i-1}} | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}}\right\} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \widehat{\psi}^1(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}), \\ \cdots \\ \int\limits_{\mathbb{R}^M} \widehat{\psi}^N(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{Q}^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} = \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}}\right\} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}_1} \widehat{\psi}^1(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}), \\ \cdots \\ \int\limits_{\mathcal{B}_N} \widehat{\psi}^N(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix},$$

а для других интегрируемых функций $f(Z_t)$, встречающихся в (П.5) и (П.6), $\widetilde{f}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{f(Z_t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1},t)}\right\}$.

Все сечения $\mathcal{Y}^n_{\sigma_{i-1}}$ множества $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$ – либо одноточечные, либо изоморфны евклидовым пространствам размерности M'', не большей M. Первый вариант соответствует случаю точной оценки вектора $e_n^{\top}\theta_{\sigma_{i-1}}Y_{\sigma_{i-1}}$ по бесшумовым наблюдениям $\varkappa_{\sigma_{i-1}}$, второй – решению задачи оптимальной фильтрации компоненты СМСП размерности M'' по непрерывным наблюдениям со стандартным винеровским процессом в роли шума. Во втором случае плотность условного распределения относительно меры Лебега существует и обладает определенными свойствами регулярности [42, 43]. Условия A–E из раздела 3 гарантируют выполнение условий [42, 43], поэтому для каждого процесса $e_n^{\top}\theta_t Y_t$

условное распределение – либо одноточечное, либо сосредоточено на линейном многообразии и абсолютно непрерывно относительно соответствующей меры Лебега. Чтобы объединить эти случаи используются меры $\mu^n_{Y|\varkappa}(\cdot)$ и суммарная мера $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$. Из этого следует, что условное распределение Z_t на промежутке $[\varkappa_{\sigma_{i-1}}, \varkappa_{\sigma_i})$ абсолютно непрерывно относительно меры $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$.

Выведем уравнение условной плотности относительно $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$, но предварительно рассмотрим вектор $\Pi(\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) = \mathrm{col}\,(\Pi^1(\mathcal{Y}^1_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}), \dots, \Pi^N(\mathcal{Y}^N_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))$. Из-за линейности наблюдений $\varkappa$ по Y и непрерывности распределений Π^n следует, что все компоненты $\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\sigma_{i-1}})$ принимают значение 0 или 1:

$$\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{rk}(\Gamma_n) > 0, \\ 1, & \text{если } \mathrm{rk}(\Gamma_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) \equiv 0$, то все носители мер $\mu^n_{Y|\varkappa}$ имеют размерность, сторого меньшую M, и поэтому $\frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}$ существует и равна 0. В противном случае хотя бы для одного номера n выполняется равенство $\mu^n_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) = \lambda^M(dy)$. Из этого можно сделать вывод, что в любом случае выполняется $\lambda^M \ll \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}$ и определена производная Радона-Никодима $\frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(\cdot)$.

Запишем уравнение (П.6), воспользовавшись теоремой Фубини и интегральным представлением УМО функций от Z_t:

$$\begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \widetilde{\psi}^1(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \widetilde{\psi}^N(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \widehat{\psi}^1(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \widehat{\psi}^N(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \left(\Lambda_{11}\widetilde{\psi}^1(t,y) + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}} \pi^1(u)du \sum\limits_{j:j\neq 1} \Lambda_{j1}\widetilde{V}^j_s \pi^1(y) \frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \right) ds\, \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \left(\Lambda_{NN}\widetilde{\psi}^N(t,y) + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}} \pi^N(u)du \sum\limits_{j:j\neq N} \Lambda_{jN}\widetilde{V}^j_s \pi^N(y) \frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \right) ds\, \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} +$$

$$+\left[\begin{array}{c}\int\limits_{\mathcal{B}^1}\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\widetilde{\psi}^1(s,y)\sum\limits_{k=1}^{K}(G^k(e_1,y)-\widetilde{G}^k_s)(d\varpi^k_s-\widetilde{G}^k_s ds)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\\ \cdots\\ \int\limits_{\mathcal{B}^N}\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\widetilde{\psi}^N(s,y)\sum\limits_{k=1}^{K}(G^k(e_N,y)-\widetilde{G}^k_s)(d\varpi^k_s-\widetilde{G}^k_s ds)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\end{array}\right].$$

Из произвольности множества $\mathcal{B}$ следует, что последнее равенство будет выполняться P-п.н. для почти всех $t\in[\sigma_{i-1},\sigma_i)$, если выполнено равенство (16).

Согласно лемме 1 выполняется равенство $\mathcal{O}_t=\mathcal{F}^{\varkappa}_t\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t$. Скачкообразному процессу соответствует стохастическая целочисленная мера ϕ, определенная на $\Big([0,+\infty)\times\mathbb{R}^{K^2},\mathcal{B}([0,+\infty))\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})\Big)$: $\phi(dt,d\omega)=$ $=\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\delta_{(\sigma_i(\omega),\varkappa_{\sigma_i(\omega)}(\omega))}(dt,d\kappa)$. В [35] доказано, что $\sigma\{\phi([a,b)\times\mathcal{A}):\ [a,b)\subset$ $\subset[0,+\infty),\ \mathcal{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})\}\equiv\mathcal{F}^{\varkappa}_t$ для всех $t\geqslant 0$.

Заметим, что $\mathbf{1}^{\top}\widetilde{Q}^{\mathbb{R}^M}_t=\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t=\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}$.

Так как базу σ-алгебры $\mathcal{B}([0,+\infty))\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ составляют множества вида $[a,b)\times\mathcal{A}$, то для доказательства того, что функция $\widehat{\psi}(t,y)$ действительно определяет условное распределение относительно $\mathcal{O}_t$, используя теорему о монотонных классах, достаточно проверить выполнение равенства $\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\phi([a,b)\times\mathcal{A})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=0$ для всех $t\geqslant 0$, $\mathcal{B}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $[a,b)\subset[0,+\infty)$, $\mathcal{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ и $\mathcal{U}\in\mathcal{F}^{\varpi}_t$. Действительно,

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\phi([a,b)\times\mathcal{A})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=$$

$$=\mathsf{E}\left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\left((\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{j-1},\sigma_j)}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=$$

$$=\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\Big\{\mathsf{E}\Big\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\left((\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\times$$

$$\times\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\Big\}\Big\}=$$

$$=\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\left\{\underbrace{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}}_{=\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t}(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}-$$

$$-\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\left\{\underbrace{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}}_{=\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t}\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=0.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crisan D., Rozovskii B.* (eds). The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. Oxford University Press, 2011.
2. *Setoodeh P., Habibi S., Haykin S.* Nonlinear Filters: Theory and Applications. N.Y.: John Wiley & Sons, 2022.
3. *Yau S., Chen X., Jiau X., et al.* Principles of Nonlinear Filtering Theory. Cham: Springer, 2024.
4. *Колмановский В.В., Шайхет Л.Е.* Об оценивании решений линейных стохастических интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 775–778.
5. *Shaikhet L.* On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process // Problems of Control and Information Theory. 1987. V. 16. No. 4. P. 251–262.
6. *Basin M.* On filtering over Îto-Volterra observations // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2000. V. 13. No. 4. P. 347–364.
7. *Curtain R., Pritchard A.* Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Berlin: Springer, 1978.
8. *Øksendal B.* Optimal Control of Stochastic Partial Differential Equations // Stochastic Analysis and Applications. 2005. V. 23. No. 1. P. 165–179.
9. *Rozovsky B., Lototsky S.* Stochastic Evolution Systems. Cham: Springer, 2018.
10. *Bugini F., Friz P., Lê K., Zhang H.* Rough stochastic filtering. https://arxiv.org/html/2509.11825v1#S3. 2025.
11. *Ahmed N., Charalambous C.* Filtering for linear systems driven by fractional Brownian motion // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 41. No. 1. P. 313–330.
12. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. V. 83. No. 1. P. 95–108.
14. *Wonham W.* Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // SIAM J. Contr. 1964. V. 2. No. 3. P. 347–369.
15. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
16. *Björk T.* Finite dimensional optimal filters for a class of Itô-processes with jumping parameters // Stochastics. 1980. V. 4. No. 2. P. 167–183.
17. *Tam L.-F., Wong W., Yau S.* On a necessary and sufficient condition for finite dimensionality of estimation algebras // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. No. 1. P. 173–185.

18. *Кушнер Г.Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.
19. *Zakai M.* On the optimal filtering of diffusion processes // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1969. V. 11. P. 230–243.
20. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Высшая школа, 1990.
21. *McLane P.* Optimal Linear Filtering for Linear Systems with State-Dependent Noise// Int. J. Control. 1969. V. 10. No. 1. P. 41–51.
22. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. V. 21. P. 303 – 313.
23. *Joannides M., LeGland F.* Nonlinear Filtering with Continuous Time Perfect Observations and Noninformative Quadratic Variation // Proc. 36th IEEE CDC. 1997. P. 1645–1650.
24. *Crisan D., Kouritzin M., Xiong, J.* Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // Electron. J. Probab. 2009. V. 14. P. 1863–1883.
25. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // АиТ. 2018. № 1. С. 52–65.
26. *Borisov A., Sokolov, I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics. 2020. V. 8. No. 4. Art. 506.
27. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // АиТ. 2020. № 12. С. 24–49.
28. *Борисов А.В.* Анализ и оценивание состояний специальных марковских скачкообразных процессов I // АиТ. 2004. № 1. С. 50–65.
29. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н., Смелянский Р.Л.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информ. и её примен. 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37.
30. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stochastic Processes and Their Applications, 2006. V. 116. No. 12. P. 1743–1769.
31. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2012.
32. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
33. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* $\mathcal{H}_\infty$ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise // Automatica. 2001. V. 37. No. 3. P. 409–417.
34. *Won M., Ranade G.* Control of systems with multiplicative observation noise // Proc. 62nd IEEE CDC. 2023. P. 3950–3955.
35. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. V. 31. P. 235–253.
36. *Wong E., Hajek B.* Stochastic Processes in Engineering Systems. N.Y.: Springer, 1985.
37. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
38. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Оптимальное управление марковскими скачкообразными процессами по бесшумовым наблюдениям с задержками II // Информ. и её примен. 2026. Т. 20. Вып. 4. в печати.

39. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Компенсирующее управление марковским скачкообразным процессом по запаздывающим наблюдениям состояния // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 5. в печати.

40. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems. // Journal of Basic Engineering. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.

41. *Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H.* Stochastic differential equations for the non linear filtering problem // Osaka J. Math. 1972. V. 9. No. 1. P. 19–40.

42. *Davie A., Germ F., Gyöngy I.* On partially observed jump diffusions II: the filtering density // Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. 2024. V. 12. P. 1628–1698.

43. *Davie A., Germ F., Gyöngy I.* On partially observed jump diffusions III: regularity of the filtering density // Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. 2025. V. 13. P. 531–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 17.02.2026

После доработки 19.07.2026

Принята к публикации 03.08.2026

Стохастические системы

© 2026 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ II: ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ[1]

Вторая часть цикла посвящена численному аспекту решения задачи фильтрации состояний специальных марковских скачкообразных процессов по наблюдениям с мультипликативными шумами. Алгоритм вычисления оценки основан на решении задачи оптимальной фильтрации по наблюдениям, дискретизованным по времени. Полученная рекуррентная формула представляет собой некоторый вариант формулы Байеса. В ее числителе и знаменателе присутствуют суммы бесконечных рядов, которые не могут быть вычислены аналитически. В алгоритме предлагается заменить их конечными отрезками и представлено утверждение, характеризующее потерю точности оценивания, возникающую из-за такой замены. Доказана сходимость предложенных аппроксимаций к исходной оптимальной оценке фильтрации по непрерывным наблюдениям при шаге дискретизации, стремящемся к нулю. Качество оценок проиллюстрировано рядом численных примеров.

Ключевые слова: наблюдения с мультипликативными шумами, дискретизованные по времени наблюдения, задача оптимальной фильтрации, аналитическая аппроксимация оценки фильтрации.

DOI: 10.7868/S2413977726120047

1. Введение

В первой части работы [1] исследована задача оптимальной фильтрации состояний класса специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП) по диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами. Решение задачи описывается условной плотностью распределения состояния относительно имеющихся наблюдений. Ее эволюция определяется системой рекуррентно связанных интегро-дифференциальных уравнений и некоторых

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00504).
Численные эксперименты проводились с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

интегральных преобразований. Имеющиеся исходные наблюдения преобразуются в совокупность кусочно-постоянной интенсивности шумов в наблюдениях, наблюдаемой без шума, и диффузионной компоненты с шумами единичной интенсивности. На интервалах постоянства интенсивности шумов условная плотность сосредоточена на некоторых линейных многообразиях и описывается указанными интегро-дифференциальными уравнениями. В случайные моменты скачков интенсивностей эти многообразия, а также условные плотности также изменяются в соответствии с интегральными преобразованиями.

Объект исследований второй части работы включает в себя методы численной реализации решения задачи оптимальной фильтрации состояний исследуемых систем наблюдения и тесно связан с различными вариантами приближенного решения уравнений Кушнера–Стратоновича [2] и Закаи [3].

Схематически, без претензии на исчерпывающий обзор на заявленную тему, следует упомянуть следующие подходы. Прежде всего, они включают в себя различные варианты сеточных методов решения стохастических интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [2, 4–6]. Такой подход имеет важное положительное качество – возможность контроля ошибки численного решения путем надлежащего выбора шагов сетки. Однако отрицательные свойства применения сеточных методов также весьма существенны. Прежде всего, это экспоненциальный рост объема вычислений с ростом размерности. Далее, эволюция условной плотности требует использования адаптивной процедуры выбора локализации и шага сетки по пространственным переменным для обеспечения нужной точности аппроксимации. Наконец, указанные методы не всегда являются устойчивыми [2]: в некоторых случаях значение приближенного решения на некоторых узлах сетки становится отрицательным, что приводит к дальнейшему «взрыву» аппроксимации.

Проблема устойчивости данных уравнений решалась путем использования для них робастного преобразования Кларка, а также метода расщепления [7–10]. Преобразование Кларка позволяет перенормировать условную плотность так, чтобы описывающее ее уравнение было бы дифференциальным в частных производных со случайными коэффициентами и не содержало стохастические дифференциалы. Оператор, который позволяет вычислить «слой» – аппроксимацию условной плотности в следующий момент времени, раскладывается в композицию двух операторов. Первый строит прогноз в соответствии с решением уравнения Фоккера–Планка, второй – корректирует плотность в соответствии с поступившими наблюдениями.

Практически одновременно с разработкой сеточных методов был предложен метод, привлекающий аппарат марковских цепей [2, 6, 11]. Он основан на слабой аппроксимации исходной диффузионной системы наблюдения последовательностью марковских цепей с конечным множеством состояний. Как и метод расщепления, он обеспечивает устойчивость вычисления аппроксима-

ции условных распределений, но так же как и представленные выше методы чувствителен к высокой размерности систем наблюдения.

Частично эту проблему удается решить, вычисляя аппроксимации распределения как элемента параметрически заданного семейства (например экспоненциального) или проектируя распределение на некоторое функциональное подпространство. Проекционные и спектральные алгоритмы решения уравнений оптимальной нелинейной фильтрации [12–17] относятся к этому классу. Аппроксимации плотностей определяются решением стохастических дифференциальных систем (СДС), описывающих эволюцию параметров распределения. Действительно, они дают возможность несколько повысить размерность обрабатываемых систем наблюдения и при этом обладают свойством устойчивости. В то же время у подобных методов сложно контролировать обеспечиваемую ими точность.

Численное решение уравнений Кушнера–Стратоновича и Закаи в той или иной степени связано с операцией численного интегрирования, трудоемкость выполнения которой критически зависит от размерности области интегрирования. Существует метод, свободный от этой зависимости – метод Монте-Карло. Он служит основой алгоритма частиц для численного решения задач оптимальной фильтрации [10, 18–20]. Исходная непрерывная система наблюдения дискретизуется по времени, и для преобразованной системы выписываются рекуррентные интегральные соотношения, описывающие эволюцию условного распределения [21]. Оно определяется своей плотностью относительно специально сконструированного распределения значимости, порождаемого генерируемым пучком случайных частиц. Эти частицы одновременно выполняют роль случайной сетки, расположение которой “привязано” к искомому условному распределению, а также участвуют в вычислении интегралов в формулах пересчета распределений методом Монте–Карло. Проблема применения фильтров частиц кроется в сложности процедуры обновления пучка частиц при вырождении их весов, а также в проблеме определения точности аппроксимации соответствующих оценок фильтрации.

Методы машинного обучения последнее время широко используются для решения прикладных задач оптимальной нелинейной фильтрации [10, 20, 22]. Их привлечение также связано с проблемой проклятия размерности. Исходная СДС наблюдения обычно дискретизуется по времени, и для преобразованной системы строятся рекуррентные нейронные сети различных типов, направленные на оценивание полезных сигналов – функционалов от искомого распределения: среднего значения, дисперсий, квантилей и пр. В качестве обучающих выборок выступают сгенерированные траектории системы наблюдения. Действительно, собственно процесс обработки каждой траектории наблюдений уже обученной сетью, занимает незначительное время. Тем не менее у данного подхода существует ряд существенных недостатков. Во-первых, время обучения сети весьма значительно, требует большого числа ресурсов и зависит от вида системы наблюдения. Во-вторых, предложенный подход чувствителен к априорной неопределенности параметров системы

наблюдения. Сеть, обученная на траекториях номинальной системы, может доставлять оценки низкого качества в случае, если истинные значения параметров системы отличаются от номинальных. В-третьих, поиск условного распределения при данном подходе заменяется на оценивание некоторого конечномерного полезного сигнала. В-четвертых, точность оценок фильтрации, доставляемых нейросетевыми алгоритмами, не подтверждена доказанными формальными утверждениями.

Представленные выше методы численного решения уравнений оптимальной нелинейной фильтрации неприменимы для варианта рекуррентно связанных уравнений Кушнера–Стратоновича (15)–(17) из [1]. Проблема в том, что в этих уравнениях используются преобразования исходных наблюдений. В случае аппроксимации этого преобразования конечно-разностными методами ошибка становится чрезмерной и делает бесполезным дальнейшее использование этой аппроксимации [23]. Дело в том, что условное распределение в данной задаче сосредоточено на линейном многообразии, определенном значением интенсивности шумов. Помимо этого, скачки интенсивности связаны со скачками оцениваемого состояния и не могут быть точно определены допредельными аппроксимациями интенсивности.

Целью второй части работы является представление решения задачи оптимальной фильтрации состояния СМСП по наблюдениям, дискретизованным по времени. Она интересна как самостоятельная прикладная проблема, а также в качестве аппроксимации решения исходной задачи фильтрации по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Подобный подход был использован в [24, 25] для систем наблюдения с МСП с конечным множеством состояний.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена постановка задачи фильтрации по дискретизованным по времени наблюдениям. В разделе 3 дано решение данной задачи – интегральные рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию условной плотности. Эти формулы представляют частный случай решения задачи фильтрации состояний марковских систем наблюдения [21], а по сути – один из вариантов формулы Байеса. Весовые функции, используемые в них, являются сдиг-масштабными смесями гауссиан и имеют сложный вид, недоступный для их прямой численной реализации. Их возможно упростить, сделав предположение, что на отрезке дискретизации по времени оцениваемый СМСП терпит не более чем некоторое фиксированное число скачков. Таким образом, от точного решения задачи фильтрации возможно перейти к *аналитической аппроксимации*. Раздел 3 содержит утверждение, характеризующее потерю точности фильтрации при переходе от точного решения к его аналитической аппроксимации.

В разделе 4 представлено утверждение, описывающее связь оценки фильтрации по дисктеризованным наблюдениям и ее аналитической аппроксимации с оценкой фильтрации из [1]: при уменьшении шага временно́й дискретизации они сходятся к оценке фильтрации состояний СМСП по непрерывным

наблюдениям. По сути, предлагаемые оценки можно трактовать как аппроксимации решения рекуррентно связанных уравнений и интегральных соотношений (15)–(17) из [1].

Раздел 5 посвящен численным экспериментам. В подразделе 5.1 продемонстрировано качество оценок при решении прикладной задачи оценивания качественного состояния и характеристик сетевого канала. Влияние порядка аналитической аппроксимации на точность фильтрации в случае низкочастотных дискретизованных наблюдений продемонстрировано в подразделе 5.2. Подраздел 5.3 посвящен построению высокоточных оценок состояния в случае выполнений условий идентифицируемости [1] при последовательном уменьшении временно́го шага дискретизации наблюдений.

Раздел 6 содержит выводы по работе и заключительные замечания.

В работе используются следующие обозначения:

- $A^{1/2}$ – квадратный корень симметрической матрицы A;
- $\mathbf{1}$ – вектор-строка подходящей размерности, составленная из единиц;
- I – единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{I}(t)$ – единичная ступенчатая функция;
- $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{C}$;
- Λ – матрица интенсивности переходов (МИП) МСП со множеством состояний $\mathbb{S}^N = \{e_1, \ldots, e_N\}$ – набором ортов пространства $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\lambda} \triangleq \triangleq \operatorname{row}(\Lambda_{11}, \ldots, \Lambda_{NN})$ – строка, составленная из диагональных элементов матрицы Λ, а также $\overline{\Lambda} \triangleq \Lambda - \operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda}$; $\boldsymbol{\Lambda} \triangleq \max_{n=\overline{1,N}} |\Lambda_{nn}|$;
- любая функция $f(e, y)$: $\mathbb{S}^N \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(e, y) = \overline{f}(y)e$, где $\overline{f}(y) \triangleq \operatorname{row}(f(e_1, y), \ldots, f(e_N, y))$;
- $\mathsf{E}_f^n \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} f(e_n, y)\Pi^n(dy)$, $\qquad \mathsf{E}_f = \operatorname{col}(\mathsf{E}_f^1, \ldots, \mathsf{E}_f^N) = \int\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{diag}\overline{f}(y)\Pi(dy)$;
- $\mathcal{N}(y, m, K)$ – плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K, взятая в точке y.

2. Постановка задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям

На каноническом базисе с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ Винера–Пуассона [26] рассматривается система наблюдения

$$\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t) = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_0) + \int\limits_0^t [\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}^{\top}(Y_s)\operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda} + \Pi^{\top}(\mathcal{C})\overline{\Lambda}^{\top}]\theta_s du + M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(Z_s)ds + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h^{1/2}(Z_s)dw_s. \tag{2}$$

Здесь

– $Z_t = \mathrm{col}\,(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ – оцениваемое состояние системы – СМСП [1] с МИП Λ, начальным распределением p_0 компоненты θ_0, начальным распределением Π_0, характеризующим начальное состояние Y_0 и распределением Π, характеризующим значения Y_t после первого скачка; (1) представляет собой мартингальное разложение индикаторной функции $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t)$ от СМСП, в котором $M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}$ – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал,
– $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^K$ – дискретизованные по времени с шагом Δ_t диффузионные наблюдения, доступные в моменты времени $t_i = i\Delta_t$, $(i \in \mathbb{N})$, где $\Delta_t > 0$ – шаг по времени; в наблюдениях коэффициенты сноса $g(\cdot)$ и диффузии $h(\cdot)$ являются функциями состояния, а $w_t \in \mathbb{R}^K$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс.

Обозначим через $\mathfrak{O}_i \triangleq \sigma\{\boldsymbol{\xi}_j : \ 0 \leqslant j \leqslant i\}$ естественное семейство σ-алгебр, порожденных дискретизованными диффузионными наблюдениями $\boldsymbol{\xi}_j$.

Задача оптимальной фильтрации заключается в определении условного распределения состояния СМСП Z в моменты времени t_i по совокупности доступных наблюдений $\mathfrak{O}_i$.

Для вывода рекуррентных соотношений, описывающих изменение условного распределения СМСП, необходимо уточнить свойства системы (1), (2).

A. Компоненты распределений $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ абсолютно непрерывны по мере Лебега с плотностями $\pi_0(y) = \mathrm{col}\,(\pi_0^1(y), \ldots, \pi_0^N(y))$ и $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$. При этом носитель $\mathcal{D}$ распределений $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ ограничен и имеет диаметр $\overline{d} \triangleq \sup_{y',y'' \in \mathcal{D}} \|y' - y''\|_1$.

Б. Функция $g(e, y)$ непрерывна по второму аргументу, а также

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} g^{\top}(e_n, y) g(e_n, y) \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) dy < \infty.$$

B. Интенсивность шумов в наблюдениях равномерно не вырождена: существует такая $\alpha > 0$, что для $\forall\, y \in \mathcal{D}$ и $n = \overline{1, N}$

$$h(e_n, y) \geqslant \alpha I.$$

Помимо этого, верно неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \sum_{n=1}^{N} \|h(e_n, y)\|_2 \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) dy < \infty.$$

Ограничения *A*–*B* более мягкие, чем те, которые были предложены для системы наблюдения в непрерывном времени [1]. Они гарантируют существование плотности у искомого условного распределения.

3. Аналитическая аппроксимация оценки фильтрации

Выведем рекуррентные соотношения, описывающие изменение во времени условного распределения состояния системы. Заметим, что последовательность $\{(Z_{t_i}, \boldsymbol{\xi}_i)\}$ обладает марковским свойством относительно последовательности σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_i$. Если $\widehat{\psi}_{i-1}(y) \triangleq \operatorname{col}(\widehat{\psi}^1_{i-1}(y), \ldots, \widehat{\psi}^N_{i-1}(y))$ – плотность условного распределения $Z_{t_{i-1}}$ относительно $\mathfrak{O}_{i-1}$, т.е. для $\forall\, n = \overline{1,N}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}\left\{\theta_{t_{i-1}} = e_n, Y_{t_{i-1}} \in \mathcal{A} | \mathfrak{O}_{i-1}\right\} = \int\limits_{\mathcal{A}} \widehat{\psi}^n_{i-1}(y)dy,$$

то условное распределение состояния Z_t, $t \geqslant t_{i-1}$ относительно $\mathfrak{O}_{i-1}$ также имеет плотность $\overline{\psi}(t,y) \triangleq \operatorname{col}(\overline{\psi}^1(t,y), \ldots, \overline{\psi}^N(t,y))$, определяемую решением системы уравнений [27]:

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} \overline{\psi}'_t(t,y) = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})\overline{\psi}(t,y) + \operatorname{diag}(\pi(y))\overline{\Lambda}\int\limits_{\mathcal{D}} \overline{\psi}(t,u)du, & t > t_{i-1}, \\ \overline{\psi}(t_{i-1},y) = \widehat{\psi}_{i-1}(y). \end{cases}$$

Это значит, что для $\forall\, n = \overline{1,N}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $t \geqslant t_{i-1}$

$$\mathsf{P}\left\{\theta_t = e_n, Y_t \in \mathcal{A} | \mathfrak{O}_{i-1}\right\} = \int\limits_{\mathcal{A}} \overline{\psi}^n(t,y)dy.$$

Одновременно с этим наблюдение $\boldsymbol{\xi}_i$ имеет гауссовское распределение при фиксированной траектории СМСП $Z_{[t_{i-1},t_i)}$:

$$\text{(4)} \quad \mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \mathcal{F}^Z_{t_i}\right\} = \mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \mathcal{F}^Z_{[t_{i-1},t_i)}\right\} = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathcal{N}\left(u, \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(Z_c)dc, \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h(Z_c)dc\right) du.$$

Отсюда можно заключить, что условное распределение $\boldsymbol{\xi}_i$ относительно Z_{t_i} представляет собой некоторую сдвиг-масштабную смесь гауссиан, а значит, имеет плотность распределения $\eta^n_i(x|u)$:

$$\mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \theta_{t_{i-1}} = e_n,\, Y_{t_i} = u\right\} = \int\limits_{\mathcal{C}} \eta^n_i(x|u)dx.$$

Тогда согласно общей формуле фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21] условное распределение Z_{t_i} относительно $\mathfrak{O}_i$ имеет плотность, определяемую формулами

$$\text{(5)} \qquad \widehat{\psi}^n_i(y) = \frac{\eta^n_i(\boldsymbol{\xi}_i|y)\overline{\psi}^n(t_i,y)}{\sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{D}} \eta^j_i(\boldsymbol{\xi}_i|u)\overline{\psi}^j(t_i,u)du}, \qquad n = \overline{1,N}.$$

Тем не менее рекурсия (3)–(5) неприменима для решения прикладных задач, так как явный вид функций $\eta(\cdot)$ неизвестен.

Обозначим через $R_i = R_i(\omega)$ число скачков Z_t на интервале (t_{i-1}, t_i). В силу марковского свойства пары (Z_t, ξ_t) (ξ_t – исходные наблюдения в непрерывном времени) верно равенство

$$(6)\quad \mathsf{P}\{\theta_{t_i} = e_m, Y_{t_i} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C}, R_i = r|\mathfrak{O}_{i-1}\} = \\ = \int\limits_{\mathcal{A}} \int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(x) \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} \varrho^{nm}(y, x, r|u)\widehat{\psi}_{i-1}^{n}(u)dudxdy,$$

где $\varrho^{nm}(y, x, r|u)$ – плотность переходной вероятности, описывающая условное распределение тройки $(Z_{t_i}, \boldsymbol{\xi}_i, R_i)$ при условии $\theta_{t_{i-1}} = e_n$, $Y_{t_{i-1}} = u$.

Зная распределение переходов МСП θ_t и используя формулу полной вероятности, можно получить явный вид данных плотностей:

1) при $r = 0$

$$(7)\qquad \varrho^{nm}(y, x, 0|u) = \delta_{nm}\delta(u - y)e^{\Lambda_{nn}\Delta_t}\mathcal{N}(x, \Delta_t g(e_n, u), \Delta_t h(e_n, u)),$$

2) при $r = 1$

$$(8)\quad \varrho^{nm}(y, x, 1|u) = (1 - \delta_{nm})\pi^m(y) \int\limits_0^{\Delta_t} \Lambda_{nm}e^{\Lambda_{nn}c_1}e^{\Lambda_{mm}(\Delta_t - c_1)} \times \\ \times \mathcal{N}(x, c_1 g(e_n, u) + (\Delta_t - c_1)g(e_m, y), c_1 h(e_n, u) + (\Delta_t - c_1)h(e_m, y))dc_1,$$

3) при $r = 2$

$$(9)\quad \varrho^{nm}(y, x, 2|u) = \\ = \pi^m(y) \sum_{k:n\neq k\neq m} \int\limits_0^{\Delta_t} dc_1 \int\limits_0^{\Delta_t - c_1} dc_2 \Lambda_{nk}e^{\Lambda_{nn}c_1}\Lambda_{km}e^{\Lambda_{kk}c_2}e^{\Lambda_{mm}(\Delta_t - c_1 - c_2)} \times \\ \times \int\limits_{\mathcal{D}} \pi^k(v_1)\mathcal{N}\Big(x, c_1 g(e_n, u) + c_2 g(e_k, v_1) + \\ + (\Delta_t - c_1 - c_2)g(e_m, y), c_1 h(e_n, u) + c_2 h(e_k, v_1) + (\Delta_t - c_1 - c_2)h(e_m, y)\Big)dv_1,$$

4) случай произвольного $r \geqslant 2$. Обозначим через

– $\mathcal{I}_r^{nm}$ – множество таких мультииндексов $\overline{i}_r \triangleq (i_0, i_1, \ldots, i_r)$ длины $r+1$, что $i_0 = n$, $i_r = m$ и для всех $j = \overline{1, r}$ выполнено неравенство $i_{j-1} \neq i_j$,
– $\mathbf{\Pi}_r \triangleq \{\overline{c}_r = \mathrm{col}\,(c_0, \ldots, c_r) : c_j \geqslant 0, j = \overline{0, r}, \sum_{j=0}^{r} c_j = \Delta_t\}$, $\overline{v}_r = \mathrm{col}\,(v_0, \ldots, v_r)$,
– $G(\overline{i}_r, \overline{c}_r, \overline{v}_r) \triangleq \sum_{j=0}^{r} g(e_{i_j}, v_j)c_j$, $\qquad H(\overline{i}_r, \overline{c}_r, \overline{v}_r) \triangleq \sum_{j=0}^{r} g(e_{i_j}, v_j)c_j$.

В этом случае

$$(10)\quad \varrho^{nm}(v_r,x,r|v_0)=\sum_{\overline{i}_r\in\mathcal{I}_r^{nm}}\int\limits_{\mathbf{\Pi}_r} d\overline{c}_r\prod_{j=1}^{r}\Lambda_{i_{j-1},i_j}e^{\sum_{j=0}^{r}\Lambda_{i_{j-1},i_{j-1}}c_{j-1}}\int\limits_{\mathcal{D}^{r-1}}\prod_{j=1}^{r}\pi^j(v_j)\times$$
$$\times\,\mathcal{N}\Big(x,G(\overline{i}_r,\overline{c}_r,\overline{v}_r),H(\overline{i}_r,\overline{c}_r,\overline{v}_r)\Big)dv_1\ldots dv_{r-1}.$$

Из (6) и общей формулы фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21] следует

Теорема 1. Условная плотность распределения Z_{t_i} относительно $\mathfrak{O}_i$ определяется рекуррентным соотношением

$$(11)\qquad \widehat{\psi}_i^m(y)=\frac{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{nm}(y,\boldsymbol{\xi}_i,r|u)\widehat{\psi}_{i-1}^n(u)du}{\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k,j=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{kj}(q,\boldsymbol{\xi}_i,\ell|p)\widehat{\psi}_{i-1}^k(p)dpdq},\qquad m=\overline{1,N},$$

с начальным условием

$$(12)\qquad \widehat{\psi}_0^m(y)=p_0^m\pi_0^m(y),\qquad m=\overline{1,N}.$$

Очевидно, что рекурсия (11) не может быть непосредственно реализована в виде вычислительной процедуры из-за наличия бесконечных сумм в числителе и знаменателе. Оценка, вычисленная по формуле

$$(13)\quad \overline{\psi}_i^m(y,s)=\frac{\sum_{r=0}^{s}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{nm}(y,\boldsymbol{\xi}_i,r|u)\overline{\psi}_{i-1}^n(u,s)du}{\sum_{\ell=0}^{s}\sum_{k,j=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{kj}(q,\boldsymbol{\xi}_i,\ell|p)\overline{\psi}_{i-1}^k(p,s)dpdq},\qquad m=\overline{1,N},$$

называется *аналитической аппроксимацией условной плотности порядка s.*

В качестве показателя локальной точности аппроксимации – точности аппроксимации оценки фильтрации на одном шаге – используется величина

$$(14)\qquad \sigma(s)\triangleq\sup_{p_0,\pi_0}\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_1-\overline{Z}_1(s)\|_1\right\},$$

где супремум берется по всем возможным дискретным вероятностным распределениям $p_0=(p_0^1,\ldots,p_0^N)$ на $\mathbb{S}^N$ и всем непрерывным распределениям $\pi_0(y)=\operatorname{col}(\pi_0^1(y),\ldots,\pi_0^N(y))$ с носителем $\mathcal{D}$. Данная величина представляет верхнюю границу $\mathcal{L}_1$-отклонения аппроксимации от оптимальной оценки, которое образуется на одном шаге рекурсии при старте из одного и того же начального условия.

В качестве показателя глобальной точности – точности аппроксимации на q шагах – используется величина

$$(15)\qquad \Sigma_q(s)\triangleq\sup_{p_0,\pi_0}\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_q-\overline{Z}_q(s)\|_1\right\}.$$

Она представляет верхнюю границу $\mathcal{L}_1$-отклонения аппроксимации от оптимальной оценки, которое образуется за q шагов рекурсии при старте из одного и того же начального условия.

Теорема 2. Для показателей точности верны следующие оценки:

$$\sigma(s) \leqslant (2+\overline{d})C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}, \tag{16}$$

$$\Sigma_q(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^q\right), \tag{17}$$

где $0 < C_1 = C_1(\mathbf{\Lambda}\Delta_t, s) \in (0,1)$ *– некоторый параметр.*

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 1. Исследуем предельное поведение правой части неравенства (17). Прежде всего зафиксируем момент времени T и рассмотрим поведение верхней границы точности при $\Delta_t \downarrow 0$. В этом случае $q = \frac{T}{\Delta_t}$. Используя неравенство Бернулли, можно получить консервативную оценку сверху для $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$, более простую для анализа:

$$\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^{\frac{T}{\Delta_t}}\right) \leqslant \underbrace{\frac{(2+\overline{d})C_1\mathbf{\Lambda}^{s+1}}{(s+1)!}T}_{\triangleq C_2(T,s)} \times \Delta_t^s. \tag{18}$$

Неравенство (18) по смыслу сродни оценкам точности методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), например метода Эйлера–Маруямы [28]: глобальная ошибка метода численного интегрирования СДУ также характеризуется степенью шага временно́й дискретизации Δ_t.

Далее, зафиксируем шаг Δ_t и рассмотрим поведение верхней границы для $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$ при $T \to \infty$:

$$\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^{\frac{T}{\Delta_t}}\right) \to (2+\overline{d}), \tag{19}$$

причем эта сходимость показательная. Снизить скорость роста верхней границы возможно, увеличивая степень s аналитической аппроксимации. При этом снижение будет происходить не только за счет повышения степени сомножителя $(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}$, но и за счет факториала $(s+1)!$ в знаменателе, а также за счет того, что функция $C_1 = C_1(\mathbf{\Lambda}\Delta_t, s)$ убывает по s (см. явный вид $C_1(\cdot)$ в доказательстве теоремы 1).

Замечание 2. В качестве полезного сигнала, характеризующего точность аналитической аппроксимации, используется состояние Z_t. При этом константа $2+\overline{d}$ в неравенствах (16) и (17) представляет собой диаметр множества $\mathbb{S}^n \times \mathcal{D}$ возможных значений Z_t. На практике интерес может представлять оценивание произвольной функции $f(Z_t)$ состояния. В этом случае неравенства (16) и (17) будут иметь аналогичный вид, но вместо $2+\overline{d}$ должен

использоваться $\overline{d}^f$ – диаметр множества возможных значений функции $f(\cdot)$:

$$\overline{d}^f \triangleq \sup_{\substack{e',e''\in\mathbb{S}^n,\\ y',y''\in\mathcal{D}}} \|f(e',y') - f(e'',y'')\|_1.$$

Замечание 3. Ошибка аналитической аппроксимации, возникающая из-за ограниченности сумм в (13), не единственная. Собственно, термин *«аналитическая»* подчеркивает то, что одна формула заменена другой. Получение интегралов в числителе и знаменателе (13) с помощью тех или иных схем численного интегрирования порождает дополнительные ошибки. Нахождение оценки связано с вычислением не только интегралов в числителе и знаменателе (13), что является традиционным для фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21], но и интегралов, определяющих переходные ядра $\varrho(y,x,r|u)$. Влияние использования различных схем интегрирования при вычислении $\varrho(y,x,r|u)$ на общую ошибку в случае фильтрации состояний МСП с конечным множеством состояний исследовано в [25]; соответствующие результаты могут быть распространены и на случай СМСП. Для приближенных оценок, вычисляемых с помощью той или иной схемы численного интегрирования, в [25] предложен термин «численная аппроксимация».

Характеризация ошибок, возникающих при вычислительной реализации формулы (13), является нетривиальной задачей. Дело в том, что сама по себе рекурсия подразумевает единообразное вычислительное представление условной плотности $\widehat{\psi}_i(y)$ для разных моментов времени t_i. С одной стороны, оно должно быть достаточно простым, чтобы позволять эффективно выполнять операции в (13), с другой – описывать широкий класс быстроменяющихся функций. Одним из вариантов является представление $\widehat{\psi}_i(y)$ как элемента экспоненциального семейства плотностей с последующим использованием аппарата проекционных фильтров [15, 29]. Недостатком данного подхода является его алгоритмическая сложность: помимо операций в (13) на каждой итерации необходимо «проецировать» полученную оценку на экспоненциальное семейство. Другой вариант заключается в сеточном представлении $\widehat{\psi}_i(y)$. Он легко реализуется, однако требует большого количества памяти для хранения значения плотности. Помимо этого, при практической реализации алгоритма с фиксированной сеткой возникают эффекты вырождения аппроксимации плотности: она сосредотачивается в областях, сравнимых с шагом дискретизации по пространству. Такая ситуация является типичной в случае, если система наблюдения допускает высокую точность построения оценок состояния. Выходом из такой ситуации является либо разработка устойчивых методов вычисления плотностей, либо адаптация шага сетки. Точность интегрирования функций, определенных на сетке, зависит от их гладкости, т.е. поведения старших производных. Плотность распределения может обладать осциллирующим характером, т.е. иметь производные с большими абсолютными значениями. Требование высокой точности ведет к

значительному усложнению схем численного интегрирования [30, 31]. Характеризация влияния конкретных схем интегрирования на итоговую точность оценок фильтрации, определенных формулой (13), является целью перспективных исследований и в данной работе не рассматривается.

Замечание 4. Аналитические аппроксимации (13) являются *устойчивыми*: с вероятностью 1 они неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки.

4. Связь с решением задачи фильтрации СМСП по непрерывным наблюдениям

Оценка фильтрации $\widehat{\psi}_i^m(\cdot)$ (11) и ее аналитические аппроксимации $\overline{\psi}_i^m(\cdot)$ (13) имеют тесную связь с представленным в [1] решением задачи оптимальной фильтрации состояний СМСП по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами.

Рассмотрим СМСП Z_t (1) и непрерывные наблюдения

$$\xi_t = \int\limits_0^t g(Z_s)ds + \int\limits_0^t h^{1/2}(Z_s)dw_s, \tag{20}$$

которые являются основой для дискретизованных наблюдений $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$. Зафиксируем момент времени $T > 0$ и построим последовательность вложенных двоичных разбиений отрезка $[0;T]$: $\{t_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$: $t_i^j \triangleq i\frac{T}{2^j}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ шаг разбиения равен $\Delta_t^j = \frac{T}{2^j}$. Построим по (20) последовательности дискретизованных наблюдений $\{\boldsymbol{\xi}_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$, используя (2). Обозначим:

- $\mathsf{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – естественная фильтрация, порожденная непрерывными наблюдениями (20);
- $\mathcal{O}_t \triangleq \mathsf{O}_{t+}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – замыкание справа фильтрации O_t;
- $\{\mathfrak{O}_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$: $\mathfrak{O}_i^j \triangleq \sigma\{\boldsymbol{\xi}_k^j,\ 0 \leqslant k \leqslant i\}$ – семейство σ-алгебр, порожденных дискретизованными наблюдениями с шагом Δ_t^j, полученными до момента времени t_i^j;
- $\widehat{Z}_T \triangleq \mathsf{E}\{Z_T|\mathcal{O}_T\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T по непрерывным наблюдениям (20), вычисляемая с помощью решения определенной в [1] системы (15)–(17) и начальным условием (12);
- $\widetilde{Z}_T \triangleq \mathsf{E}\{Z_T|\mathsf{O}_T\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T относительно исходной фильтрации O_T, не замкнутой справа;
- $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j \triangleq \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathfrak{O}_{2^j}^j\right\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T, построенная по наблюдениям, дискретизованным с шагом Δ_t^j и вычисленная покомпонент-

но по формулам

$$\widehat{\theta}_T^n = \int\limits_{\mathcal{D}} \widehat{\psi}_{2^j}^n(y)dy, \quad n = \overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\widehat{Y}_T^m = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} y^m \widehat{\psi}_{2^j}^n(y)dy, \quad m = \overline{1,M}, \tag{22}$$

а функции $\widehat{\psi}_i^n(y)$ определяется формулой (11);

– $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j(s)$ – аналитическая аппроксимация порядка s состояния Z_T, вычисленная покомпонентно по формулам

$$\overline{\theta}_T^n(s) = \int\limits_{\mathcal{D}} \overline{\psi}_{2^j}^n(y,s)dy, \quad n = \overline{1,N}, \tag{23}$$

$$\overline{Y}_T^m(s) = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} y^m \overline{\psi}_{2^j}^n(y,s)dy, \quad m = \overline{1,M}, \tag{24}$$

а функции $\overline{\psi}_i^n(y,s)$ определяются формулой (13).

Теорема 3. При $j \to \infty$ верны следующие пределы для $s \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_T - \widehat{\mathsf{Z}}_T^j\|\right\} = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_T - \overline{\mathsf{Z}}_T^j(s)\|\right\} = 0. \tag{26}$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Замечание 5. Равенство (26) говорит о том, что предложенные аналитические аппроксимации любого порядка s определяют численные алгоритмы решения задачи фильтрации, поставленной и теоретически решенной в [1], и соответствующие приближенные оценки будут сходиться к теоретическому решению. Выполнение условия A гарантирует не только $\mathcal{L}_1$-, но и $\mathcal{L}_2$-сходимость в пределах (25) и (26): данная норма более привычна в задачах оптимальной фильтрации.

Замечание 6. В доказательстве теоремы 3 показано, что выполняются сходимости $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j \to \widetilde{Z}_T$ и $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j(s) \to \widetilde{Z}_T$, т.е. оценка по дискретизованным наблюдениям и ее аналитические аппроксимации любого порядка сходятся к УМО состояния относительно естественной фильтрации O_t, не обладающей свойством непрерывности справа. Имеет место включение $\mathsf{O}_t \subset \mathcal{O}_t$: исходная фильтрация вложена в свое замыкание справа. Из этого следует, что в общем случае $\mathsf{P}\left\{\widetilde{Z}_T \neq \widehat{Z}_T\right\} > 0$. В исследуемой задаче фильтрации это нарушение имеет место при $T = 0$: $\widetilde{Z}_0 = p_0$, в то время как $\widehat{Z}_0$ вычисляется по формуле (12) из [1]. Исследуемая система наблюдения носит частный характер: коэффициенты сноса и диффузии в модели наблюдений (2) не зависят от времени. Это свойство гарантирует [32], что несмотря на несовпадение фильтраций

для $T > 0$, имеет место равенство $\widetilde{Z}_T = \widehat{Z}_T$ P-п.н., т.е. оценки относительно замкнутой и незамкнутой фильтрации совпадают. В случае зависимости коэффициента диффузии в наблюдениях это равенство нарушается в моменты времени t изменения ранга матрицы диффузии $h(t, Z_t)$ [33].

5. Численные примеры

В данном разделе представлены результаты комплекса численных экспериментов. Он составлен для достижения следующих целей. Во-первых, продемонстрировано, что предложенные алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации состояний СМСП могут быть эффективно применены для решения прикладной задачи мониторинга качественного состояния и числовых характеристик сетевого канала. Результаты этих расчетов представлены в подразделе 5.1.

Во-вторых, показано влияние выбора порядка аналитической аппроксимации на итоговое качество оценок фильтрации. Результаты соответствующих расчетов приведены в подразделе 5.2.

В-третьих, продемонстрировано влияние выполнения условий идентифицируемости состояний СМСП на возможность построения высокоточных оценок этих состояний. В [1] было показано, что условия идентифицируемости гарантируют точное восстановление состояний СМСП или некоторых функций от них по имеющимся зашумленным наблюдениям. Данный теоретический результат получен в предположении, что обрабатываются наблюдения в непрерывном времени. В подразделе 5.3 дана численная иллюстрация этого факта: с уменьшением шага временно́й дискретизации точность оценок фильтрации увеличивается.

Подтверждение теоретических результатов, приводимое в подразделах 5.2 и 5.3, требует специального подбора параметров численных экспериментов. Дело в том, что демонстрация влияния порядка аппроксимации и условий идентифицируемости на точность оценивания является нетривиальной задачей. Среднеквадратическое отклонение (СКО) оценки фильтрации и ее аналитических аппроксимаций не может быть вычислено точно, а только приближенно с помощью метода Монте-Карло. Поэтому дополнительные ошибки, вносимые этим методом, могут нивелировать те эффекты, которые должны быть проиллюстрированы предлагаемым численным примером. В то же время пучок траекторий, по которому рассчитываются оценки СКО, должен иметь обозримый объем, чтобы вычисления можно было провести за разумное время. Указанные причины объясняют то, что системы наблюдения в подразделах 5.2 и 5.3 носят модельный характер. С другой стороны, выбор параметров в них дает дополнительную информацию об использовании алгоритмов фильтрации на практике: когда следует использовать аппроксимации высоких порядков и при каких масштабах временно́й дискретизации при выполнении условий идентифицируемости можно получить высокоточные оценки состояний СМСП.

5.1. Фильтрация состояний СМСП с нелинейной зависимостью от состояния интенсивности шумов наблюдений

В [1] теоретическое решение задачи фильтрации было получено в случае, когда интенсивность шумов в наблюдениях линейно зависела от состояний СМСП. В случае фильтрации по дискретизованным наблюдениям это требование можно ослабить.

Рассмотрим систему наблюдения, близкую к рассмотренной в [34]. Состояние, подлежащее оцениванию, представляет собой СМСП $Z_t = \operatorname{col}(\theta_t, Y_t)$ – качественное состояние и числовые характеристики сетевого канала. Качественное состояние θ_t может принимать следующие значения:

– e_1 – канал функционирует штатно, «бутылочное горло» пусто,

– e_2 – состояние, предшествующее перегрузке: «бутылочное горло» непусто,

– e_3 – перегрузка канала, «бутылочное горло» полно,

– e_4 – потеря сигнала на беспроводном участке канала.

Числовые характеристики канала $Y_t = \operatorname{col}(Y_t^1, Y_t^2)$ включают в себя текущие временные задержки и долю потерянных пакетов. Система наблюдения (1) и (2) в данной задаче имеет следующие параметры: $N = 4$, $M = 2$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}45 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & -0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0 & -0{,}6 & 0{,}05 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}47 \\ 0{,}06 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Распределения $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ совпадают. Плотности $\pi^i(\cdot)$ имеют вид $\pi^i(y^1, y^2) = \pi_1^i(y^1)\pi_2^i(y^2|y^1)$, где

$$\pi_1^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}01)}{9!} 2000^{10} (y^1 - 0{,}01)^9 e^{-2000(y^1 - 0{,}01)},$$

$$\pi_2^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}015)}{14!} 2000^{15} (y^1 - 0{,}015)^{14} e^{-2000(y^1 - 0{,}015)},$$

$$\pi_3^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}02)}{19!} 2000^{20} (y^1 - 0{,}02)^{19} e^{-2000(y^1 - 0{,}02)},$$

$$\pi_4^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}022)}{21!} 1000^{22} (y^1 - 0{,}022)^{21} e^{-1000(y^1 - 0{,}022)}$$

и

$$\pi_2^i(y^2|y^1) = \frac{\mathbf{I}_{[a_i, b_i]}(y^2)}{b_i - a_i} \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y^1) \left(y^2 - \frac{a_i + b_i}{2} \right) + 1 \right],$$

$$a_1 = 0{,}002, \quad b_1 = 0{,}03, \quad a_2 = 0{,}01, \quad b_2 = 0{,}05,$$

$$a_3 = 0{,}04, \quad b_3 = 0{,}08, \quad a_4 = 0{,}06, \quad b_4 = 0{,}1.$$

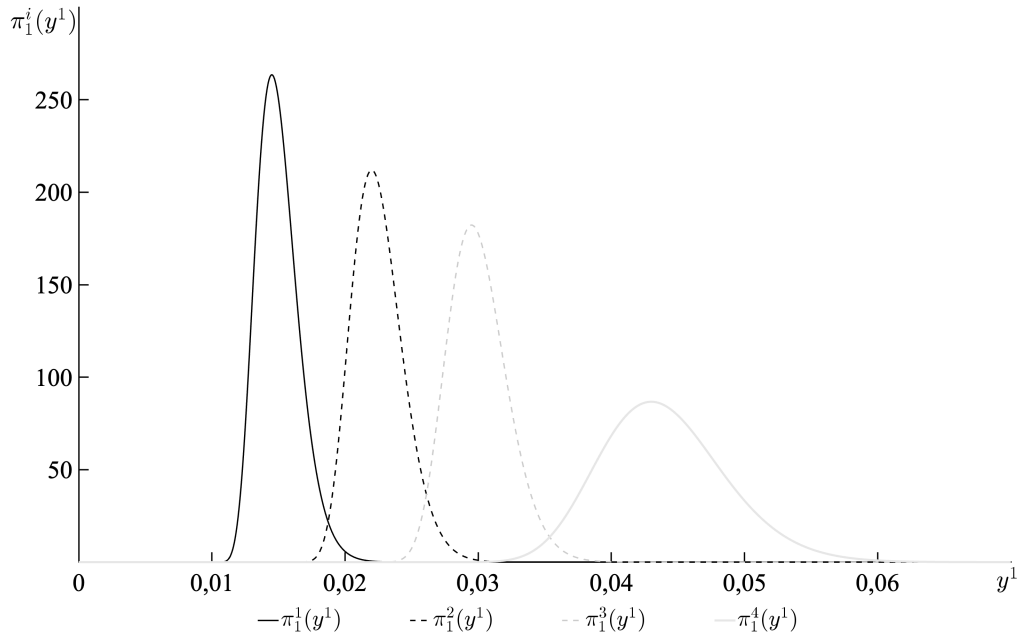


Рис. 1. Вид плотностей распределения $\pi_1^i(y^1)$, $i = \overline{1,4}$.

Плотности $\pi_1^i(y^1)$ представлены на рис. 1. Они относятся к классу гамма-распределений со сдвигом, достаточно широко применяющихся при описании времени передачи/приема/обработки пакетов в телекоммуникационных системах [35, 36]. Их можно трактовать следующим образом.

1) $\pi_1^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по каналу, содержащему 10 сетевых устройств в предположении, что их очереди пусты, а полное время распространения пакета по каналу до очередного устройства и его передачи через него представляет собой экспоненциальную случайную величину с параметром $\lambda = 2000$, сдвинутую на 0,001. Этот вариант соответствует ненагруженному (штатному) функционированию канала, когда буфер его «бутылочного горла» пуст.

2) $\pi_2^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по тому же маршруту в предположении, что буфер «бутылочного горла» канала уже заполнен пятью пакетами, что приводит к дополнительным задержкам. Этот вариант соответствует загруженному функционированию канала, когда буфер его «бутылочного горла» непуст, но не перегружен.

3) $\pi_3^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по тому же маршруту в предположении, что буфер «бутылочного горла» канала заполнен десятью пакетами, что соответствует варианту перегрузки канала.

4) $\pi_4^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по каналу, содержащему 10 сетевых устройств, причем в буфере «бутылочного горла» присутствует 1 пакет. Полное время распространения пакета по каналу до очередного

устройства и передачи пакета этим устройством представляет собой экспоненциальную случайную величину с параметром $\lambda = 1000$, сдвинутую на 0,001. Данный вариант соответствует случаю общей перегрузки канала, связанной, например, с проблемами передачи по беспроводным участкам канала.

Условные распределения $\pi_2^i(y^2|y^1)$ имеют конечные носители, плотности при фиксированном y^1 представляют собой линейные функции. Такое поведение соответствует тому, что время задержки имеет положительную корреляцию с долей потерянных пакетов [37].

Плотность начального распределения СМСП равна $\pi_0(y) = \mathrm{diag}\,(p_0)\pi(y)$. Следует отметить, что носители распределений $\pi^i(y)$ пересекаются.

С шагом $\Delta_t = 0{,}01$ наблюдаются зашумленные значения задержки передачи пакетов

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_t^1 dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} 0{,}1\sqrt{Y_t^1} dw_t^1$$

и число потерянных пакетов, представленное в форме диффузионной аппроксимации

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} 1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1} dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}} dw_t^2.$$

В имеющихся наблюдениях w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы.

Вид функций сноса связан со спецификой постановки прикладной телекоммуникационной задачи, а также диффузионной аппроксимации наблюдений, используемой в данном случае [34].

Задача фильтрации заключается в оценивании в реальном масштабе времени компонент θ_t и Y_t по нарастающему объему наблюдений.

Для вычислений был выбран порядок аналитической аппроксимации $s = 1$, интеграл в (8) вычислялся по формуле прямоугольников [38, с. 71]. Условные плотности $\overline{\psi}_t^n(y)$ определялись для разных значений n на отрезках $[a_n^m, b_n^m]$ с шагами $\Delta_{y^m}^n$. Информация об этой сетке сведена в табл. 1. Интегралы в (13) также вычислялись по формуле прямоугольников.

Таблица 1. Сводная таблица областей интегрирования и шага сетки для вычисления оценок плотностей $\overline{\psi}_i^n(y)$

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Отрезок $[a_n^1, b_n^1]$	$[0{,}01; 0{,}02]$	$[0{,}015; 0{,}025]$	$[0{,}02; 0{,}03]$	$[0{,}022; 0{,}052]$
Шаг $\Delta_{y^1}^n$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}47619 \times 10^{-5}$
Отрезок $[a_n^2, b_n^2]$	$[0{,}002; 0{,}03]$	$[0{,}01; 0{,}05]$	$[0{,}04; 0{,}08]$	$[0{,}06; 0{,}1]$
Шаг $\Delta_{y^2}^n$	$0{,}46032 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$

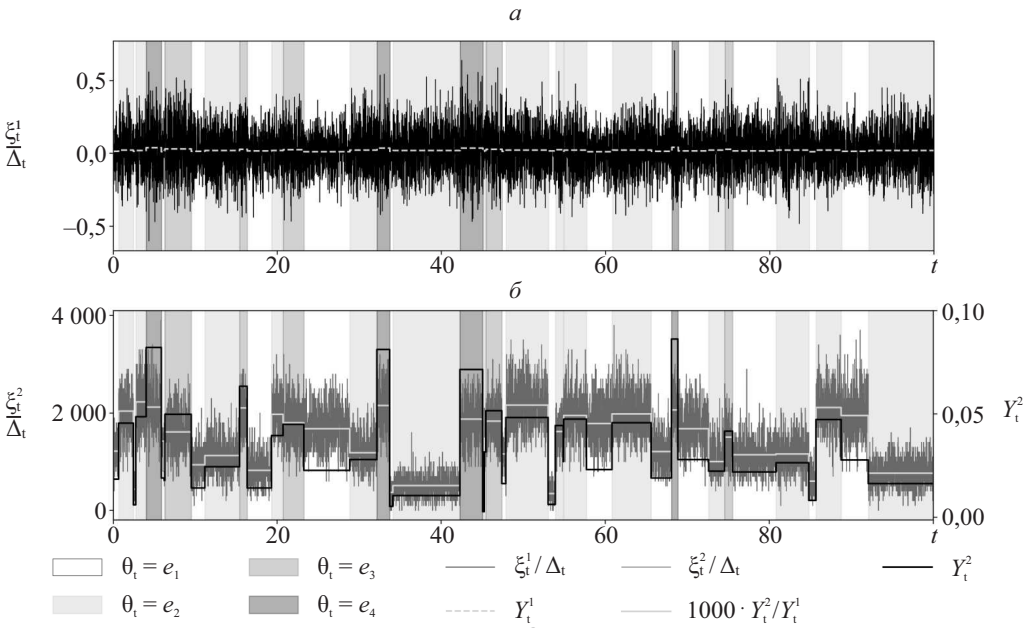


Рис. 2. Результаты моделирования состояний СМСП и измерений.

Система наблюдения в данном примере отличается от представленной в [34] наличием мультипликативных шумов. Заметим, что и снос, и диффузия в наблюдениях нелинейно зависят от Y_t. При этом ни снос, ни диффузия не зависят от компоненты θ_t. Носители распределений $\pi^i(\cdot)$ пересекаются, и это означает, что даже знание компоненты Y_t не позволит точно восстановить компоненту θ_t. В то же время, квадратическая характеристика исходных непрерывных наблюдений ξ такова, что

$$\frac{d\langle \xi^1 \rangle_{t+}}{dt} = 0{,}01 Y_t^1, \qquad \frac{d\langle \xi^2 \rangle_{t+}}{dt} = 1000 \frac{Y_t^2}{Y_t^1}.$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно (Y_t^1, Y_t^2) очевидно, что она разрешима.

Отсюда можно сделать вывод, что компонента θ_t будет оцениваться с умеренной точностью, так как она недоступна прямому наблюдению, а компонента Y_t не позволяет однозначным образом идентифицировать θ_t. В то же время можно ожидать достаточную точность оценки компоненты Y_t.

Рисунок 2 содержит результаты моделирования:

- компоненты θ_t (отмечены фоном),
- компоненты Y_t^1,
- компоненты Y_t^2 (ось ординат на рисунке *б* справа),
- отношения $1000 \frac{Y_t^2}{Y_t^1}$,
- наблюдения $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$,
- наблюдения $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$.

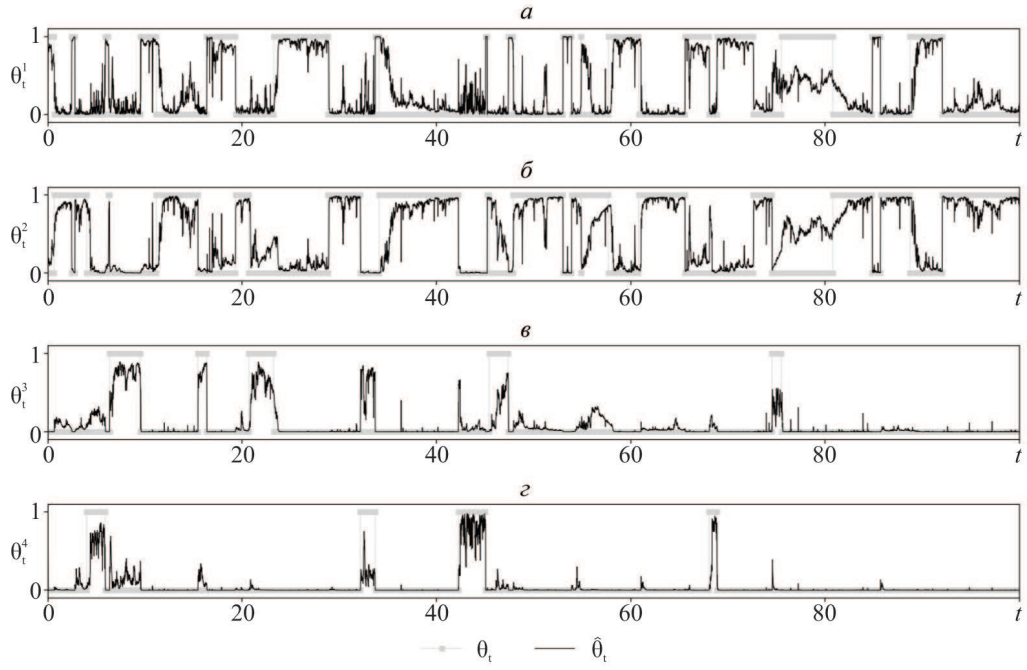


Рис. 3. Результаты оценивания компоненты θ_t.

Данный рисунок приведен для того, чтобы можно было *визуально* сравнить истинные значения оцениваемых компонент СМСП Z_t и доступных наблюдений $\boldsymbol{\xi}_t$. Из него можно сделать следующие заключения.

1. Согласно рис. 2,*а* отношение «сигнал/шум» в наблюдениях $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$ мало и не позволяет визуально идентифицировать изменение значения компоненты Y_t^1. Изменение компонеты θ_t по наблюдениям $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$ отследить нельзя.
2. По рис. 2,*б* зрительно можно локализовать моменты некоторых скачков Z_t, а значит и компоненты θ_t, однако визуально значение θ_t определить невозможно. Более того, некоторые моменты скачков Z_t визуально определить затруднительно из-за малой разницы в изменении значения $1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}$. Такая ситуация наблюдается, например, на [2,6; 6,1]: момент скачка Z_t на этом отрезке сложно различим по зашумленным наблюдениям $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$.
3. По рис. 2,*б* путем скользящего осреднения наблюдений $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$ можно построить некоторую оценку процесса $1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}$. Тем не менее, построить по ним оценку компоненты Y_t^2, имеющую приемлемую точность, не удается.

Оценки компонент $\widehat{\theta}_t^n$ $(n = \overline{1,4})$ и $\widehat{Y}_t^m$, $(m = 1, 2)$ выражаются через $\overline{\psi}_t^n(y)$ формулами (23) и (24).

На рис. 3 представлены результаты покомпонентной фильтрации вектора θ_t:

– точное значение компоненты θ_t^n, $n = \overline{1,4}$,

– оценка фильтрации $\widehat{\theta}_t^n$, $n = \overline{1,4}$.

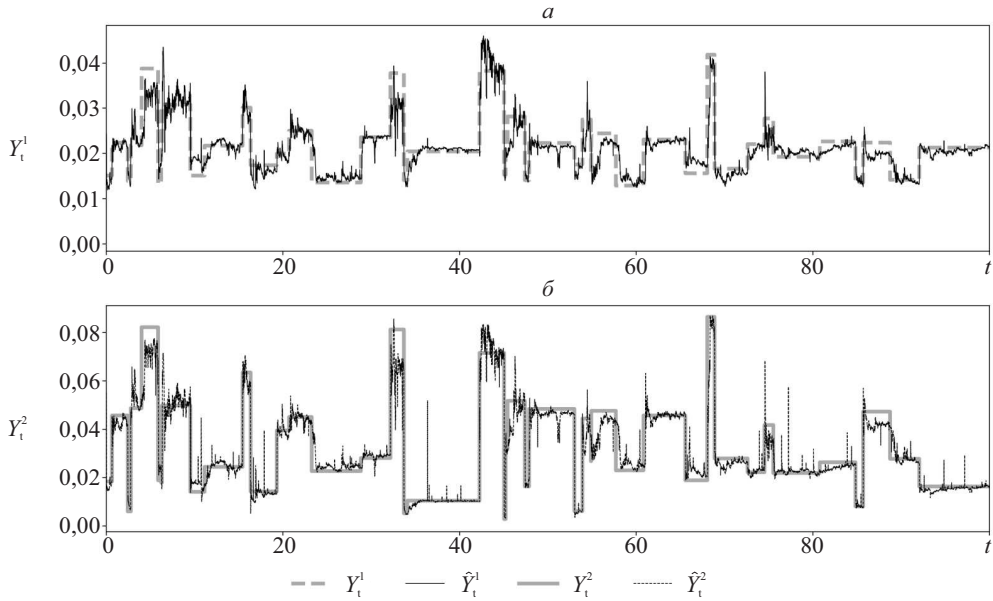


Рис. 4. Результаты оценивания компоненты Y_t.

На рис. 4 представлены результаты покомпонентной фильтрации вектора Y_t:

– точное значение Y_t^m, $m = 1, 2$,

– оценка фильтрации $\widehat{Y}_t^m$, $m = 1, 2$.

Полученные результаты расчетов вполне соответствуют ожиданиям. В целом, оценки фильтрации компонент θ_t и Y_t демонстрируют высокую точность. Тем не менее, из-за того, что носители распределения компоненты Y_t пересекаются, в случае попадания значения Y_t в области пересечения компонента θ_t оценивается посредственно, так как функции сноса и диффузии в наблюдениях не зависят от θ_t. Примером этого служит фрагмент графиков истинных значений компонент θ_t и их оценок фильтрации на промежутке [73; 82] на рис. 3: алгоритм «исключил» для θ_t значения e_3 и e_4, но не смог правильно выбрать e_1 или e_2.

5.2. Влияние порядка аналитической аппроксимации на точность фильтрации

Данный численный пример демонстрирует степень влияния порядка s аналитической аппроксимации на итоговую точность оценок фильтрации.

Система наблюдения (1), (2) имеет следующие параметры: $N = 2$, $M = 1$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $\Delta_t = 4$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \pi^1(y) = \mathbf{I}_{[1;\,2]}(y), \\ \pi^2(y) = \mathbf{I}_{[10001;\,10002]}(y), \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_t dw_t,$$

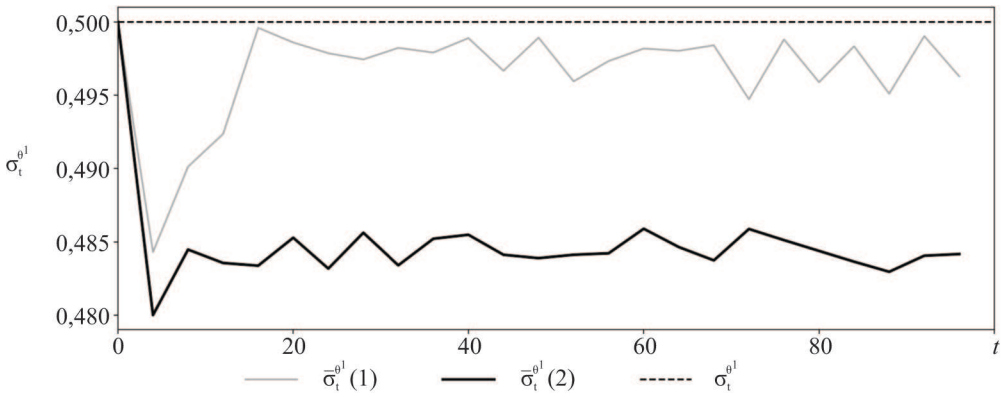


Рис. 5. Сравнение СКО ошибок аналитических аппроксимаций различного порядка: компонента θ_t^1.

где w_t – винеровский процесс. Как и в прошлом примере, оценке подлежат все компоненты СМСП Z_t. Шаг сетки по пространственной переменной $\Delta_y = 0{,}01$.

Параметры системы наблюдения и численных схем были выбраны из следующих соображений. Во-первых, МИП Λ обеспечивает наихудшее с точки зрения неопределенности стационарное распределение – равномерное. Во-вторых, нулевой снос в наблюдениях также затрудняет оценивание – вся статистическая информация сосредоточена в интенсивности шума. В-третьих, носители распределений $\pi^1(y)$ и $\pi^2(y)$ выбраны далеко отстоящими друг от друга: при наличии высокочастотных наблюдений все компоненты Z_t могут быть оценены с высокой точностью. Однако в данной задаче шаг Δ_t зафиксирован, и является достаточно большим: скачок процесса происходит в среднем за полшага дискретизации. Вероятности того, что на шаге дискретизации произойдет 0, 1 или 2 скачка, равны соответственно 0,135, 0,271 и 0,271, в то время, как бóльшее число скачков происходит с вероятностью 0,323. Среднее число скачков на шаге $\Delta_t = 4$ равно 2, и резонно ожидать, что использование аналитической аппроксимации второго порядка обеспечит значимое приращение точности по сравнению с аналитической аппроксимацией первого порядка.

Сравнивалась:

– аналитическая аппроксимация первого порядка: формула (8) вычислялась по формуле прямоугольников, формула (13) – по формуле прямоугольников с шагом Δ_y,
– аналитическая аппроксимация второго порядка: формулы (8) и (9) вычислялись с помощью формулы прямоугольников, формула (13) – по формуле прямоугольников с шагом Δ_y.

Вычисления были проведены на пучке траекторий объемом 10 000.

Результаты оценивания θ_t представлены на рис. 5: для компоненты θ_t^1 вычислены

– СКО σ^θ компоненты θ_t^1;

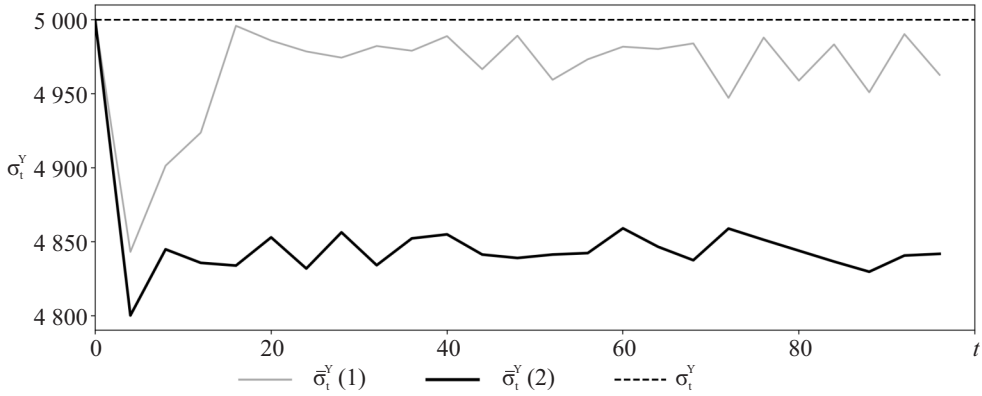


Рис. 6. Сравнение СКО ошибок аналитических аппроксимаций различного порядка: компонента Y_t.

– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^{\theta}(1)$ аналитической аппроксимации первого порядка,
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^{\theta}(2)$ аналитической аппроксимации второго порядка.

Поведение характеристик точности аппроксимаций оценок компоненты θ_t^2 аналогично.

Сравнительные результаты для компоненты Y_t представлены на рис. 6:
– СКО σ^Y компоненты Y_t;
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^Y(1)$ аналитической аппроксимации первого порядка,
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^Y(2)$ аналитической аппроксимации второго порядка.

Пример демонстрирует ситуацию, когда использование аналитических аппроксимаций порядка, выше первого, приводит к значимому повышению качества оценивания. В данной системе каждое наблюдение несет много информации о состоянии Z_t т.к. носители условного распределения Y_t относительно значений компоненты θ_t разнесены далеко друг от друга. В то же время, наблюдения поступают с такими большими интервалами, что вероятность возникновения на этих отрезках двух и более скачков практически равна 0,6. Предложенные оценки вообще дают незначительный выигрыш по отношению к тривиальной оценке – безусловному математическому ожиданию – именно из-за очень редких наблюдений, и предложенные оценки следует использовать в тех практических случаях, когда любое повышение точности является критичным вне зависимости от роста объема вычислений. На рисунках также видно явление накопления ошибки: выборочные СКО ошибок обеих аппроксимаций на первом шаге ниже, чем на последующих. Это связано с высокой вероятностью того, что за время Δ_t произойдет два и более скачков состояния. Использование аппроксимации порядка 2 в значительной степени парирует этот недостаток.

5.3. Идентифицируемость компонент СМСП

В [1] были приведены частные случаи систем наблюдений, которые гарантируют точное восстановление отдельных компонент или всего состояния си-

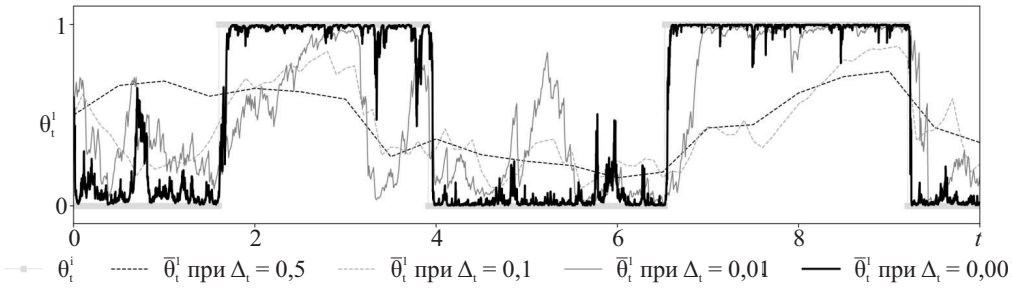


Рис. 7. Результаты оценивания компоненты θ_t^1: условия идентифицируемости № 1.

стемы. Данные результаты носят теоретический характер, однако позволяют надеяться на разработку приближенных методов, обеспечивающих высокую точность оценивания. Данный подраздел демонстрирует, что предлагаемый класс фильтров обладает этим свойством: при выполнении условий идентифицируемости аналитические аппроксимации стремятся к оцениваемому состоянию при $\Delta_t \to 0$.

Первый вариант системы наблюдения (1), (2) имеет следующие параметры: $N = 2$, $M = 2$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $t \in [0; 10]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \pi^1(y^1, y^2) &= \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \\ \pi^2(y^1, y^2) &= \mathbf{I}_{[2;3]\times[4;5]}(y^1, y^2), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{Y_t^1}\, dw_t^1,$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{Y_t^2}\, dw_t^2,$$

где w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы. Задача фильтрации заключается в оценивании всего вектора состояния Z_t.

Условия идентифицируемости в данном примере выполнены потому, что носители распределений $\pi^1(\cdot)$ и $\pi^2(\cdot)$ не пересекаются.

В эксперименте использовалась аналитическая аппроксимация порядка 1, интегралы вычислялись по формуле прямоугольников, а шаг пространственной сетки равнялся $\Delta_{y^1} = \Delta_{y^2} = 0{,}01$. Вычисления производились для различных шагов дискретизации по времени: $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$. Результаты оценивания компоненты θ_t^1 приведены на рис. 7 (оценка θ_t^2 следует из условия нормировки):

– точное значение компоненты θ_t^1,
– оценки $\overline{Y}_t^n$ для $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$.

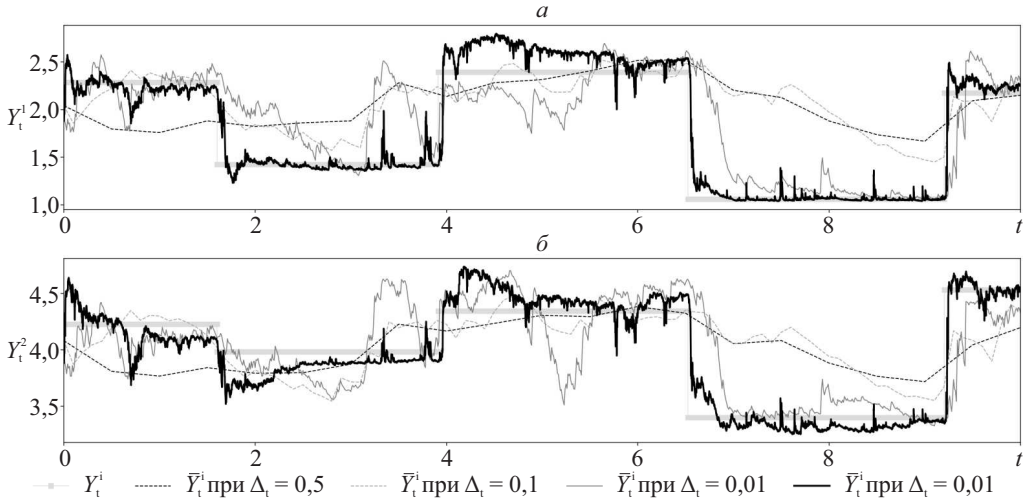


Рис. 8. Результаты оценивания компонент Y_t: условия идентифицируемости № 1.

Результаты оценивания компонент Y_t приведены на рис. 8:

– точные значения компонент Y_t^n $(n = 1, 2)$,

– оценки $\widehat{Y}_t^n$ для $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$.

Второй вариант системы наблюдения (1), (2) имеет параметры $N = 2$, $M = 2$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \pi^1(y^1, y^2) = \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \\ \pi^2(y^1, y^2) = \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\theta_t^1 \sqrt{Y_t^1} + 2\theta_t^2 \sqrt{Y_t^1} \right) dw_t^1,$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(2\theta_t^1 \sqrt{Y_t^2} + \theta_t^2 \sqrt{Y_t^2} \right) dw_t^2,$$

где w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы. Задача фильтрации заключается в оценивании всего вектора состояния Z_t.

В данном примере распределения $\pi^1(\cdot)$ и $\pi^2(\cdot)$ совпадают, однако условия идентифицируемости выполнены из-за разницы интенсивностей шумов в наблюдениях при различных значениях компоненты θ_t.

Вычисления выполнялись с той же пространственной сеткой и теми же шагами дискретизации по времени, что и в предыдущем примере. На рис. 9 и 10 представлены результаты оценивания компонент θ_t и Y_t.

Результаты данных примеров соответствуют теоретическим выводам [1]: при выполнении условий идентифицируемости оптимальная оценка фильтрации совпадает с оцениваемым состоянием Z_t, а на практике это означает воз-

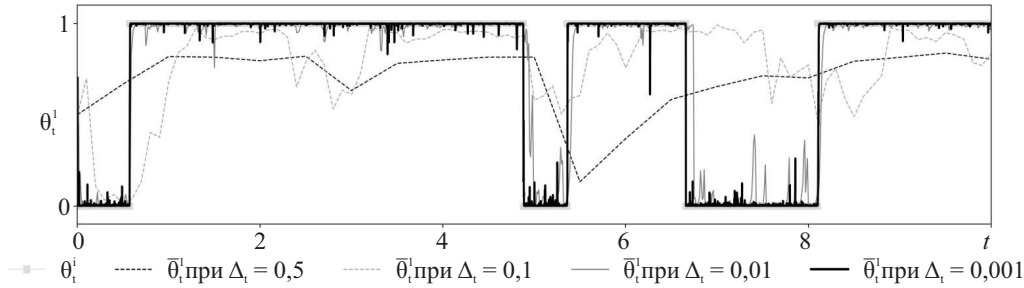


Рис. 9. Результаты оценивания компоненты θ_t^1: условия идентифицируемости № 2.

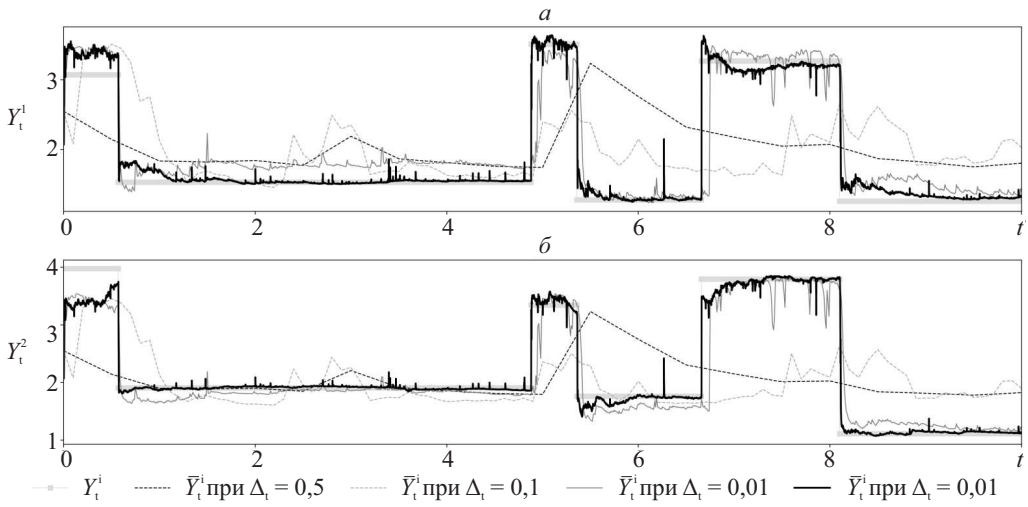


Рис. 10. Результаты оценивания компонент Y_t: условия идентифицируемости № 2.

можность конструирования высокоточных алгоритмов фильтрации при условии произвольного уменьшения шага временно́й дискретизации наблюдений.

6. Заключение

Вторая часть цикла посвящена алгоритмическому аспекту решения задачи оптимальной фильтрации состояния СМСП по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Вместо разработки методов численного решения предложенного в [1] аналога уравнения Кушнера–Стратоновича, включая предварительное преобразование исходных наблюдений, в качестве аппроксимации предлагается использовать решение задачи фильтрации состояния непрерывно-дискретной системы наблюдения. В ней состояние представляет собой СМСП с непрерывным временем, а наблюдения – временна́я дискретизация исходных наблюдений. Для преобразованной задачи предложены аналитические аппроксимации, а также исследованы характеристики их точности в зависимости от порядка. По сути во второй части представлен

алгоритм численного решения задач фильтрации непрерывной и непрерывно-дискретной систем наблюдения. Следует также отметить, что непрерывно-дискретная система наблюдения не эквивалентна никакой системе с дискретным временем: дискретизованные наблюдения $\boldsymbol{\xi}_i$ зависят не только от значений оцениваемого состояния в моменты t_{i-1} и t_i, но и от всей траектории СМСП Z_t на всем отрезке $[t_{i-1};\, t_i]$.

Помимо построения оценок состояния систем в различных прикладных задачах, возможно дальнейшее теоретическое и алгоритмическое развитие представленных результатов. Во-первых, формулы (8)–(10) и (13), реализующие алгоритм фильтрации, содержат операции интегрирования по временно́й и пространственным переменным, которые не могут быть реализованы аналитически. Необходимы исследования, количественно характеризующие дополнительные погрешности, возникающие в результате численного интегрирования, а также направленные на оптимизацию величин шагов интегрирования. Во-вторых, говоря о сеточных методах, следует указать их основной недостаток – экспоненциальный рост объема вычислений и затрачиваемой памяти с ростом размерности системы наблюдения. Возможными вариантами сокращения объема вычислений является переход к другому виду представления условных плотностей: использование модификаций сигма-точечного представления полимодальных распределений, сплайн-аппроксимации, проекционных представлений и пр. Еще одним вариантом, позволяющим снизить объем вычислений, представляется применение дополнительных преобразований к дискретизованным наблюдениям, и последующее использование субоптимальных нелинейных фильтров калмановской структуры: ценой приемлемой потери точности оценивания возможно создать алгоритмы, трудоемкость которых с ростом размерности растет не столь драматично.

Еще одно возможное направление дальнейших исследований связано с неравенством (17) и его обсуждением в замечании 1. Согласно этому неравенству верхняя оценка показателя точности $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$ аналитической аппроксимации порядка s показательным образом стремится к максимально возможному пределу $2 + \overline{d}$. Это связано с тем, что предлагаемые оценки учитывают возможность возникновении на интервале дискретизации Δ_t не более s скачков. Возможная потеря точности в соответствии с (17) призывает быть осторожным при встраивании предлагаемого алгоритма фильтрации в реальные системы наблюдения, в которых время фильтрации значительно. Однако в пользу применения этих алгоритмов имеются следующие аргументы. Во-первых, в зависимости от конкретной практической задачи потерю точности вследствие накопления ошибки можно потенциально снизить, увеличивая порядок аппроксимации s, уменьшая шаг Δ_t или применяя комбинацию этих мер. Во-вторых, оценка (17) является очень консервативной, перестраховочной: она говорит о некоторой верхней границе ошибки, в то время как истинная ошибка остается умеренной. Этот факт иллюстрируется расчетами, приведенными в подразделе 5.2: выборочное СКО ошибки оценки, построенное по значительному пучку траекторий, не растет со временем. Таким образом, для

решения вопроса о включении предлагаемых аппроксимаций в контур стационарной фильтрации в реальных прикладных задачах необходимо проводить комплекс дополнительных вычислительных экспериментов, чтобы получить оценку реального СКО ошибки предлагаемой оценки. В-третьих, оценка точности, определяемая неравенством (17), является слишком консервативной, и дальнейшие исследования могут быть направлены на ее уточнение.

В [39, 40] представлено решение задачи оптимального управления МСП по бесшумовым наблюдениям, поступающим с запаздыванием. В этих статьях возможность прямого наблюдения вектора состояния является ключевым. В то же время выполнение условий идентифицируемости [1] всего вектора состояния МСП позволит точно восстановить процесс Z_t по косвенным зашумленным наблюдениям. Использование комбинации решения задачи оптимальной фильтрации и задачи оптимального управления по наблюдениям с запаздыванием можно трактовать как решение задачи оптимального стохастического управления по неполной информации с помощью теоремы разделения. Предложенные в данной части цикла аналитические аппроксимации оценок оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям вполне пригодны для построения высокоточных оценок состояния управляемого МСП с последующим синтезом управления на их основе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Введем следующие обозначения:

$$\gamma^{nm}(y,x|u) \triangleq \sum_{r=0}^{s} \varrho^{nm}(y,x,r|u), \qquad \gamma(y,x|u) \triangleq \|\gamma^{nm}(y,x|u)\|_{n,m=\overline{1,N}},$$

$$\zeta^{nm}(y,x|u) \triangleq \sum_{r=s+1}^{\infty} \varrho^{nm}(y,x,r|u), \qquad \zeta(y,x|u) \triangleq \|\zeta^{nm}(y,x|u)\|_{n,m=\overline{1,N}},$$

$$\varrho(y,x|u) \triangleq \gamma(y,x|u) + \zeta(y,x|u),$$

$$c_{\varrho}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\varrho^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx]\}}{dx},$$

$$c_{\gamma}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\gamma^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx],\ R \leqslant s\}}{dx},$$

$$c_{\zeta}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\zeta^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx],\ R > s\}}{dx}.$$

С использованием этих обозначений разность оценки и ее аппроксимации $\widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1$ может быть преобразована следующим образом:

$$\text{(П.1)} \qquad \widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1(s) = c_\varrho^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1) \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} \varrho^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}\varrho^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} -$$

$$-c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1) \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} \gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{c_\zeta(\boldsymbol{\xi}_1)}{c_\gamma(\boldsymbol{\xi}_1)+c_\zeta(\boldsymbol{\xi}_1)} \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} (c_\zeta^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\zeta^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u) - c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u))\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}(c_\zeta^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\zeta^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u) - c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u))\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} =$$

$$= \mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\} \underbrace{\left(\frac{1}{\mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R>s\}}(\omega)\theta_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \\ \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R>s\}}(\omega)Y_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \end{bmatrix} - \frac{1}{\mathsf{P}\{R \leqslant s|\boldsymbol{\xi}_1\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R\leqslant s\}}(\omega)\theta_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \\ \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R\leqslant s\}}(\omega)Y_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \end{bmatrix} \right)}_{\triangleq F(\boldsymbol{\xi}_1)}.$$

Из свойств компонент θ и Y, а также условия А следует, что $\|F(x)\|_1 \leqslant 2 + \overline{d}$. Тогда

$$\sigma(s) = \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1\|_1\right\} \leqslant (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{E}\{\mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\}\} =$$

$$= (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{P}\{R > s\} \leqslant (2+\overline{d}) e^{-\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^k}{k!} =$$

$$= (2+\overline{d}) \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!} \underbrace{e^{-\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+1)!(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^k}{(k+s+1)!}}_{\triangleq C_1 = C_1(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t, s)},$$

причем $0 < C_1 < 1$. Истинность неравенства (16) доказана.

Рассмотрим q итераций (11) и (13). Обозначим случайные величины $R_i(\omega)$, $i = \overline{1,q}$ – число скачков Z_t на отрезках $[t_{i-1}, t_i]$, а также событие $A_q(\omega) \triangleq \{\omega \in \Omega : \max_{i=\overline{1,q}} R_i(\omega) \leqslant s\}$. Выполняя те же преобразования, что и в (П.1), можно получить выражение для $\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_q - \overline{Z}_q(s)\|_1\right\}$:

$$\mathsf{E}\left\{\left\|\widehat{Z}_q - \overline{Z}_q(s)\right\|_1\right\} = \mathsf{E}\left[\left\| \mathsf{P}\left\{\overline{A}_q|\mathfrak{O}_q\right\} \left(\frac{1}{\mathsf{P}\left\{\overline{A}_q|\mathfrak{O}_q\right\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\overline{A}_q}(\omega)\theta_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \\ \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\overline{A}_q}(\omega)Y_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \end{bmatrix} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{\mathsf{P}\{A_q|\mathfrak{O}_q\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_q}(\omega)\theta_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \\ \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_q}(\omega)Y_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \end{bmatrix} \right) \right\|_1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{P}\left\{\overline{A}_q\right\} \leqslant (2+\overline{d}) \left(1 - \left(1 - C_1 \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^q\right).$$

Истинность неравенства (17) и теоремы 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Последовательность σ-алгебр $\mathfrak{O}^j_{2^j}$ – вложенная, т.е. $\mathfrak{O}^j_{2^j} \in \mathfrak{O}^{j+1}_{2^j}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Траектории наблюдений $\{\xi_t\}_{t\in[0;T]}$ – непрерывные функции времени, поэтому процесс ξ_t является сепарабельным [41], и $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{O}^j_{2^j} = \mathsf{O}_T$. В силу теоремы Леви о мартингале имеем $\widehat{\mathsf{Z}}^j_T \triangleq \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathfrak{O}^j_{2^j}\right\} \to \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_t\right\}$ P-п.н. при $j \to \infty$. Условие A гарантирует не только сильную сходимость последовательности оценок, но и сходимость в пространстве $\mathcal{L}_1$: $\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_T\right\} - \widehat{\mathsf{Z}}^j_T\|\right\} = 0$. Снос и диффузия в наблюдениях (2) не зависят от времени, поэтому согласно [32] для $T > 0$ имеем $\mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_T\right\} = \widehat{Z}_T$ P-п.н., из чего следует равенство (25). Истинность (26) следует из (25) и неравенства (18).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В.* Оптимальная фильтрация состояний специальных марковских скачкообразных процессов по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами I: теоретическое решение // АиТ. 2026. № 12. С. 39–65.
2. *Кушнер Г.Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.
3. *Zakai M.* On the optimal filtering of diffusion processes // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1969. V. 11. P. 230–243.
4. *Chow P., Jiang J.* Almost Sure Convergence of Some Approximate Solutions for Random Parabolic Equations, Random Partial Differential Equations. Basel, Birkhüser: 1991. P. 45–54.
5. *Ahmed N.* Linear and nonlinear filtering for scientists and engineers. Singapore: World Scientific, 1999.
6. *Kushner H., Dupuis P.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. N. Y.: Springer, 2001.
7. *Bensoussan A., Glowinski R., Rascanu A.* Approximation of the Zakai equation by the splitting up method // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28(6). P. 1420–1431.
8. *Gyöngy I., Krylov N.* On the splitting-up method and stochastic partial differential equations // The Annals of Probability. 2003. V. 31(2). P. 564–591.
9. *Clark J., Crisan D.* On a robust version of the integral representation formula of nonlinear filtering // Probab. Theory Relat. Fields. 2005. V. 133. P. 43–56.
10. *Yau S., Chen X., Jiao X., et al.* Principles of Nonlinear Filtering Theory. Cham: Springer, 2024.
11. *Kouritzin M., Long H., Sun W.* Markov chain approximations to filtering equations for reflecting diffusion signals // Stochastic Processes and their Applications. 2004. V. 110(2). P. 275–298.
12. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Высшая школа, 1990.
13. *Ahmed N., Radaideh S.* A Powerful Numerical Technique Solving Zakai Equation for Nonlinear Filtering // Dynamics and Control. 1997. V. 7. P. 293–308.

14. *Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.* Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. V. 35(2). P. 435–461.
15. *Brigo D., Hanzon B., Le Gland F.* Approximate nonlinear filtering by projection on exponential manifolds of densities // Bernoulli. 1999. V. 5(3). P. 495–534.
16. *Armstrong J., Brigo D.* Nonlinear filtering via stochastic PDE projection on mixture manifolds in direct metric // Math. Control Signals Syst. 2016. V. 28. Art. 5.
17. *Emzir M., Zhao Z., Särkkä, S.* Multidimensional projection filters via automatic differentiation and sparse-grid integration // Signal Processing. 2023. V. 204. Art. 108832.
18. *Bain A., Crisan D.* Fundamentals of Stochastic Filtering. N.Y.: Springer, 2009.
19. *Crisan D., Rozovskii B.* (eds). The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. Oxford University Press, 2011.
20. *Setoodeh P., Habibi S., Haykin S.* Nonlinear filters: Theory and Applications. N. Y.: John Wiley & Sons, 2022.
21. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.
22. *Beck C., Becker S., Cheridito P., et al.* Deep learning based numerical approximation algorithms for stochastic partial differential equations. https://arxiv.org/pdf/2012.01194v2. 2025
23. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. V. 21. P. 303–313.
24. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I // АиТ. 2020. Вып. 11. С. 11–31.
25. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // АиТ. 2020. Вып. 12. С. 24–49.
26. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stochastic Processes and Their Applications. 2006. V. 116(12). P. 1743–1769.
27. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н., Смелянский Р.Л.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и ее применения. 2024. Том 18. Вып. 3. С. 30–37.
28. *Kloeden P., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
29. *Armstrong J., Brigo D., Hanzon B.* Optimal projection filters with information geometry // Information Geometry. 2024. No. 7. P. 525–540.
30. *Diethelm K.* Error Bounds for the Numerical Integration of Functions with Limited Smoothness // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2014. V. 52(2). P. 877–879.
31. *Temlyakov V.* Numerical Integration and Discrepancy Under Smoothness Assumption and Without It // Constructive Approximation. 2022. V. 55. P. 743–771.
32. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
33. *Borisov A., Sokolov, I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics. 2020. V. 8(4). Art. 506.
34. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Численный анализ робастности оценки фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 2. С. 85–96.

35. *Chen D., Fu X., Ding W., et al.* Shifted gamma distribution and long-range prediction of Round Trip Timedelay for Internet-based teleoperation // 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. Bangkok. 2009. P. 1261–1266.
36. *Yasuda S., Yoshida H.* Prediction of round trip delay for wireless networks by a two-state model // 2018 IEEE Wireless Communications and Networking Conference. 2018. P. 1–6.
37. *Strowes S.* Passively measuring TCP round-trip times: A close look at RTT measurements with TCP // ACM Queue. 2013. V. 11(10). P. 20–30.
38. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
39. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Оптимальное управление марковскими скачкообразными процессами по бесшумовым наблюдениям с задержками II: задача минимизации издержек // Информатика и ее применения. 2026. Том 20. Вып. 4, в печати.
40. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Компенсирующее управление марковским скачкообразным процессом по запаздывающим наблюдениям состояния // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 5.
41. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 17.02.2026

После доработки 19.07.2026

Принята к публикации 03.08.2026

Стохастические системы

© 2026 г. А.Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ, д-р физ.-мат. наук (ayv@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Российский университет дружбы народов, Москва;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва),
Е.Ю. ЯЩЕНКО (elizaveta.iashchenko@math.msu.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО ЭРГОДИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДНЕМ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ[1]

Рассмотрен эргодический аналог хорошо известной модели управляемой диффузии при анализе риска и распределения дивидендов страховой компании. Представляется любопытным как в этом несложном примере оптимальные стратегии, которых оказывается бесконечное множество, согласуются с эргодическим уравнением Беллмана.

Ключевые слова: диффузионная модель, страховая компания, эргодическое управление в среднем, пример.

DOI: 10.7868/S2413977726120054

1. Введение, постановка задачи

Рассматривается эргодический аналог задачи оптимального стохастического управления из [1]. Данная модель может быть интересна как пример того, как самые простые методы стохастического анализа могут быть использованы для формализации долговременной устойчивости финансовой компании в условиях риска и неопределенности. Опустим здесь детали обоснования диффузионной аппроксимации, которые можно найти, в частности, в литературе, приведенной в [1], и прямо перейдем к идеальной предельной модели эволюции резерва или капитала компании, принятой в [1] и во многих других работах[2]:

$$dX_t = (\mu - a(X_t))dt + dW_t, \quad X_0 = x > 0, \quad 0 \leqslant a \leqslant M, \quad M > \mu. \tag{1}$$

Здесь $(W_t,\, t \geqslant 0)$ – стандартный винеровский процесс, постоянная $\mu > 0$ имеет смысл (средней) страховой премии за единицу времени, функция $a(X_t)$ есть сумма, которую компания тратит, также в единицу времени, на расходы, зарплату и т.п., и как раз эту функцию следует определить. Функция $a(\cdot)$

[1] Исследование для первого автора осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[2] В отличие от модели в [1], подчеркнем отсутствие дисконтирования, как обычно в эргодической постановке, см. далее формулировку цели оптимизации в (4).

называется стратегией, или марковской стратегией, и должна быть выбрана так, чтобы максимизировать некоторый функционал, см. ниже. Рассматривается модель «идеальной» компании, которая никогда не разорится, даже если ее капитал станет отрицательным в какой-то момент времени. Но любая «разумная» стратегия должна стараться избегать попадать в состояния с отрицательным капиталом, и в то же время, обеспечивать некоторый положительный в среднем доход. Поэтому примем правило

$$a(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \leqslant 0. \tag{2}$$

Это значит, что при отрицательном резерве никакие выплаты «себе» и даже выдачу зарплат компания позволить не может[3]. Другое ограничение состоит в том, что существует конечное значение $M > \mu$ такое, что

$$0 \leqslant a(x) \leqslant M, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Символы E^a или $\mathsf{E}^{a(\cdot)}$ обозначают математическое ожидание при применении стратегии $a(\cdot)$. Целью оптимизации является функционал [4]

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathsf{E}_x^{a(\cdot)} \int\limits_0^T a(X_t)\, dt \to \sup_{a(\cdot)} =: r. \tag{4}$$

Дополнительно необходимо найти стратегию, на которой супремум достигается или, возможно, почти достигается (т.е. достигается с точностью до заданного малого $\varepsilon > 0$).

В задачах стохастического управления одним из стандартных инструментов является уравнение Беллмана, в данном случае в его эргодическом варианте, который отличается от уравнения на конечном интервале времени. В данной постановке эргодическое уравнение Беллмана также можно выписать и попытаться решить (см. ниже раздел 3), хотя строгая обоснованность такого метода пока остается под вопросом[5]. Поэтому в данной работе был принят иной подход. Сперва на основе эвристических соображений предъявляются оптимальный «выигрыш» r и оптимальная стратегия, и даже не

[3] Возможны другие, близкие по смыслу постановки. В данном случае рассматривается лишь один из вариантов, кажущийся разумным и нередко используемый в приложениях, см., например, [1]. Фактически, модель могла бы допускать и выплаты при некоторых отрицательных значениях резерва, что соответствовало бы выбору некоторого порога $x_0 \leqslant 0$, выше которого также разрешены выплаты. Анализ ниже допускает такую возможность, но такое расширение модели привело бы, на взгляд авторов, к неоправданному увеличению объема статьи.

[4] Левая и правая части данной формулы могут зависеть от начальной точки x. Для эргодических стратегий это обычно константы.

[5] Это уравнение удается строго обосновать в некоторых других эргодических моделях, см. [3, 4]. К рассматриваемой постановке указанные результаты не применимы. В [3] функция $a(x)$ должна быть строго меньше еще не найденного значения r вблизи бесконечности, что в настоящей работе не предполагается. В [4] процесс должен быть равномерно эргодичен при любой допустимой стратегии; в данном случае это требование также нарушено.

одна, а целое семейство. Затем строго доказывается, что все предъявленные стратегии приводят к одной и той же величине r, и что больше получить невозможно. В отдельном разделе показано, как найти решение эргодического уравнения Беллмана и что это дает в плане отыскания оптимальных стратегий. Результаты соответствуют полученным ранее, несмотря на то, что данный подход здесь не является строгим.

В данной модели существуют и эргодические, и неэргодические стратегии. Например, тривиальной неэргодической стратегией является $a(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Несколько более разумным кажется использовать $a(x) = (\mu - \varepsilon)\, 1(x \geqslant x_0)$ при некотором $x_0 \geqslant 0$. Поведение процесса при такой стратегии транзиентно, он будет «уходить» на бесконечность, а средний доход за большое время окажется равен $\mu - \varepsilon$. На неэргодических стратегиях, по крайней мере, не зависящих явно от времени, достичь максимума функционала не удастся. Этот вопрос в работе не обсуждается.

Одной из очевидных эргодических стратегий является правило (см. (3))

$$a(x) = M\, 1(x > x_0), \qquad \text{при произвольном } x_0 \geqslant 0.$$

Для такой стратегии существует (единственная) инвариантная вероятностная мера процесса μ^a, а его маргинальные распределения μ_t сходятся к μ^a по метрике полной вариации экспоненциально быстро (см., например, [2]). Можно отметить, что при $M = 2\mu$ такая стратегия обеспечивает средний выигрыш $r = \mu$, в силу очевидной симметрии относительно x_0, причем независимо от выбора $x_0 \geqslant 0$. Это будет следовать и из строгих рассуждений в следующих разделах.

Другое интуитивное и нестрогое рассуждение говорит, что с постоянной компонентой сноса μ (напомним, что $\mu > 0$) вряд ли возможно обеспечить за большое время больший в среднем доход, чем μ. Действительно, в противном случае резерв с какого-то момента неизбежно стал бы отрицательным и начал бы уходить на $-\infty$. Но это противоречит ограничению (2) при отрицательных значениях x, так что такое поведение не является возможным. Следовательно, естественна *гипотеза,* что при $M > \mu$ ответ должен быть таким

$$r = \mu. \tag{5}$$

Это, действительно, справедливо и будет далее строго доказано, см. ниже теорему 1. В части существования оптимальных стратегий имеется бесконечно много таких (эргодических) стратегий, и их можно описать, даже не опираясь на эргодическое уравнение Беллмана, которое обычно появляется в подобных задачах (см. [3, 4], и др.), хотя тут и нет никакого противоречия с этим уравнением. Как оказывается, искомый максимум r достигается на любой эргодической стратегии при условии выполнения неограничительного технического условия (6) (см. ниже).

В разделе 2 предложено два разных доказательства основного результата, оба без использования (эргодического) уравнения Беллмана. В разделе 3

выписано это уравнение, оно решено и показано, что на его основе строится то же самое семейство оптимальных стратегий.

Все технические доказательства могут быть найдены в Приложении, где, в частности, обосновано условие непрерывности стационарной плотности для специального класса эргодических стратегий, называемое обычно условием склейки.

2. Основные результаты

Существуют различные определения эргодичности. В данной работе будет принято следующее.

Определение 1. Стратегия $a(\cdot)$, так же, как и (марковский) процесс X, ей соответствующий, называются эргодическими, если и только если существует единственная инвариантная мера μ^a, не зависящая от начального значения $X_0 = x$, и для любой ограниченной, измеримой по Борелю функции g и для любого начального значения x,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{E}_x^a g(X_t)dt = \int g(y)\mu^a(dy).$$

Теорема 1. «Функция» (константа) выигрыша r в рассматриваемой модели равна

$$r = \mu.$$

Она достигается, во всяком случае, на любой эргодической стратегии $a(\cdot)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}^a X_t}{t} = 0. \tag{6}$$

Стоит отметить, что для эргодических стратегий условие (6) обычно выполняется, хотя формально в определение не входит; более того, обычно в таком случае числитель $\mathsf{E}^a X_t$ ограничен. Вопрос о том, существуют ли неэргодические стратегии, на которых супремум (4) достигается, не обсуждается: представляется, что такую возможность не следует исключать, хотя для ее реализации класс стратегий, возможно, следует расширить, включив некоторые функции, зависящие от времени; такие стратегии в настоящей работе не рассматриваются. Отметим, что так же обычно поступают и в задачах неэргодического управления (см., например, [5]).

Показательны следующие примеры. Напомним, что во всех случаях $M > \mu$.

Пример 1. Выберем произвольное $x_0 \geqslant 0$ и стратегию $a(\cdot)$ вида

$$a(x) = M\,1(x > x_0).$$

В условиях модели имеем экспоненциальную сходимость (см., например, [2]), единственную инвариантную меру μ^a, причем последняя интегрирует любую степенную функцию.

а) **Случай $M = 2\mu$.**

Предложение 1. В данном примере $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Доказательство см. в Приложении.

б) **Случай $M > 2\mu$.**

Предложение 2. В этом случае снова имеем $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Доказательство см. в Приложении.

в) **Случай $M = C\mu$, $C > 1$.**

Предложение 3. В этом случае снова имеем $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = M\, 1(x > x_0); \quad x_0 \geqslant 0 \text{ произвольно.}$$

Доказательство см. в Приложении после доказательства Предложения 4, которое удобно обосновать раньше.

Во всех случаях полезно следующее уравнение на стационарную плотность; только случай $M \geqslant 2\mu$ может быть исследован без этого уравнения, лишь на основе использования симметрии.

Предложение 4. Пусть снос имеет вид

$$b(x) = \mu - a(x), \quad \text{где} \quad a(x) = C\mu 1(x > x_0),\ C > 1.$$

Тогда стационарная плотность $p(\cdot)$ удовлетворяет уравнению стационарности

$$\mathcal{L}^* p(x) = \frac{1}{2}\, p''(x) - (b(x)p(x))' = 0, \quad x \neq x_0, \tag{7}$$

дополненному условием непрерывности в x_0

$$p(x_0-) = p(x_0+) =: p(x_0). \tag{8}$$

Доказательство см. в Приложении.

Напомним, что ни для нахождения цены r, ни для построения оптимальной стратегии эргодическое уравнение Беллмана выше не применялось, что не означает, что его нельзя использовать в данной модели. В следующем разделе будет продемонстрировано, как это сделать, хотя и без претензии на полную строгость.

3. Об эргодическом уравнении Беллмана

Эргодическое уравнение Беллмана

$$\sup_{a\in[0,M]}\left[(\mu-a)V'(x)+\frac{1}{2}V''(x)+a-\rho\right]=0 \tag{9}$$

может быть использовано для построения оптимальной стратегии (см. [3, 4, 8]). Его решением является пара $(V(\cdot),\rho)$. Известен ряд близких моделей (см. [3, 4, 8]), для которых решение уравнения (9) существует в классе пар, где r является константой и где функция V растет не быстрее некоторого полинома и имеет две соболевские производные, локально интегрируемые в L_p при любом $p>1$. Более того, компонента ρ определена единственным образом и совпадает с «константой выигрыша r», тогда как вспомогательная функция V единственна с точностью до произвольной аддитивной постоянной. По этой причине представляется разумным исследовать уравнение (9) и для данной постановки.

Заметим, что тут имеется решение

$$V(x)=x,\quad \rho=\mu,$$

что легко проверяется[6]: $x'\equiv 1$ и $\mu-a+a-\mu=0$.

При использовании уравнения Беллмана отдельной задачей является проверка того, что в данном случае компонента ρ совпадает с «постоянной выигрыша» r. Здесь это может быть сделано с помощью рассуждений, основанных на формуле Ито (см. [3, 4]). Правда в данной ситуации это излишне, поскольку в предыдущих разделах уже строго установлено, что $r=\mu$; стало быть, и $\rho=\mu=r$.

Далее, если решение (V,ρ) найдено, то оптимальная стратегия может быть построена в форме

$$\bar a(x)\in\operatorname*{Argsup}_{0\leqslant a\leqslant M}\left[(\mu-a)V'(x)+\frac{1}{2}V''(x)+f(a,x)-\rho\right], \tag{10}$$

где в рассматриваемой модели $f(a,x)\equiv a$, так что на самом деле

$$\bar a(x)\in\operatorname*{Argsup}_{0\leqslant a\leqslant M}\left[a(1-V'(x))\right].$$

В частности, в [8] справедливость (9) и (10) показана для одномерных управляемых диффузий при условии «почти-монотонности» на функцию f. В настоящей работе это условие не обсуждается, поскольку оно просто не выполнено. В то же время, уравнения (9)–(10) могут быть использованы в виде

[6] Здесь лишь устанавливается, что это решение без проверки единственности; последнее можно вывести из общих свойств уравнения Пуассона «во всем пространстве».

«обоснованной догадки», даже без строгого обоснования. Согласно (10), любая оптимальная стратегия должна иметь следующую структуру:

$$a^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } V'(x) > 1, \\ M, & \text{если } V'(x) < 1, x > 0, \\ \text{любое } a \in [0, M], & \text{если } V'(x) = 1, x > 0. \end{cases}$$

В данном случае $V'(x) \equiv 1$. Следовательно, рецепт уравнения Беллмана подсказывает, что оптимальной будет любая стратегия $\bar{a}(\cdot)$ со значениями во множестве $[0, M]$, если только функция $\bar{a}(\cdot)$ измерима по Борелю и является эргодической, в частности, она должна удовлетворять условию (6), а также ограничению (2). Повторим, что строгое обоснование ответа, полученного таким путем, – как величины ρ, так и стратегий, претендующих на оптимальность, – без предыдущего раздела осталось бы под вопросом. Этот раздел был призван лишь показать, что в рассматриваемой модели метод эргодического уравнения Беллмана также приводит к аналогичным результатам, хоть и в отсутствие достаточной строгости. Тем не менее, это можно считать полезным дополнением к предыдущему разделу.

4. Заключение

Данная работа теоретическая, с возможностью приложений к управлению рисками. Постановка задачи относится к оптимизации управляемого диффузионного процесса специального вида в стационарных режимах.

Во-первых, в данной постановке немного неожиданно оказалось, что несложно найти оптимальную цену (средний выигрыш) $r = \mu$, используя весьма общие аргументы и при довольно общих предположениях. Интуитивно, это равенство следует из «устойчивости» системы, которая невозможна, если это равенство нарушается.

Во-вторых, тут есть целый класс оптимальных эргодических марковских стратегий простой структуры, а именно, в форме $a(x) = c\mu 1(x > x_0)$, или $a(x) = c\mu 1(x \geqslant x_0)$, при любом $x_0 \geqslant 0$, и даже при любом $x_0 \in \mathbb{R}$. При них при всех имеет место потраекторно единственное сильное решение соответствующего СДУ. Разумеется, есть и множество более сложно устроенных оптимальных эргодических стратегий. Их полное описание не входит в цели данной работы Довольно любопытно, что такая их конструкция не требует обязательного обращения к уравнению Беллмана, «обычно» являющегося одним из основных технических инструментов в стохастических оптимизационных задачах.

В-третьих, в данной проблеме эргодическое уравнение Беллмана допускает простое решение, на базе «обоснованной догадки». Решение этого уравнения подтверждает и дополняет ранее сделанные выводы относительно оптимальных стратегий, хотя сам подход, основанный на этом уравнении в данном случае не претендует на полную строгость.

В-четвертых, как вспомогательное средство, тут оказалось возможным строго обосновать «условия непрерывной склейки» для стационарной плотности, соответствующей любой такой простой оптимальной стратегии. Этот весьма важный технический прием часто встречается в подобных задачах и не всегда допускает формальное обоснование; здесь это оказалось возможно. Данное соображение может оказаться полезным и в других ситуациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Предложения 1, случай $M = 2\mu$

Выберем

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Тогда снос СДУ имеет вид

$$\mu - a(x) = \mu\, 1(x \leqslant x_0) - \mu\, 1(x > x_0).$$

Это симметричный случай, в котором «очевидно», что процесс проводит в среднем половину времени на $(-\infty, x_0]$, и половину времени на (x_0, ∞). Следовательно, при такой стратегии средний доход будет равен

$$r^a = 0 * 1/2 + 2\mu * 1/2 = \mu.$$

Тот факт, что $r = \mu$, следует из Теоремы 1. Также отметим, что тут несложно вычислить стационарную плотность с сингулярностью ее производной в x_0: она имеет вид

$$p(x) = p(x_0)[\exp(\mu(x - x_0))\ 1(x \leqslant x_0) + \exp(-\mu(x - x_0))\ 1(x > x_0)],$$

где из условия нормировки можно найти, что $p(x_0) = \mu/2$.

Доказательство Предложения 2, случай $M > 2\mu$

Тут, хоть выбор $a(x) = M\ 1(x > x_0)$ и выглядит более, чем естественным, тем не менее, чтобы свести задачу к предыдущему примеру[7], можно снова выбрать

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Тогда снос снова равен

$$\mu - a(x) = \mu\, 1(x \leqslant x_0) - \mu\, 1(x > x_0),$$

и, значит, снова получаем

$$r = r^a = 0 * 1/2 + 2\mu * 1/2 = \mu.$$

Доказательство Предложения 4

Здесь будут обоснованы уравнения стационарности (7)–(8), что вполне естественно поместить перед доказательством случая $M = c\mu$ с $c > 1$ в примере.

[7] Как известно, математики любят так делать.

1. Начнем с уравнения (7). Рассмотрим произвольную гладкую (C_0^∞) тест-функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую условию $\psi(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности x_0. Запишем «тождество стационарности»:

$$\mathsf{E}_\mu \psi(X_t) = \int \psi(y)\mu(dy), \quad \forall\, t > 0, \tag{П.1}$$

где μ – стационарная вероятностная мера. Напомним, что ее единственность уже известна, в силу оценки скорости сходимости (cf. [2]). По формуле Ито имеем,

$$\mathsf{E}_\mu \psi(X_t) = \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \mathsf{E}_\mu \int\limits_0^t L\psi(X_s)ds =$$

$$= \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_s)ds = \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_0)ds.$$

В силу равенства (П.1), заключаем, что

$$\int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_0)ds \equiv 0$$

и, значит,

$$\mathsf{E}_\mu L\psi(X_0) = \int L\psi(y)\mu(dy) = 0.$$

Это можно записать в виде

$$\langle L\psi, \mu\rangle = \langle \psi, L^*\mu\rangle = 0.$$

В свою очередь, это эквивалентно формальному тождеству

$$L^*\mu(dy) = 0 \quad \text{на множестве } (y:\, y \neq x_0).$$

Следовательно, для стационарной плотности имеем уравнение

$$L^*p(y) = 0 \quad \text{на множестве } (y:\, y \neq x_0).$$

NB: Это уравнение не утверждается в x_0, поскольку и снос b, и производная плотности p' имеют скачки в этой точке. Именно поэтому рассматриваются тест-функции ψ, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности x_0; таким образом, тождества $L^*\mu(dy) = 0$ и $L^*p(y) = 0$ устанавливаются лишь вне x_0. Другими словами, имеются «хорошие», корректно определенные ОДУ на плотность p на интервалах $(-\infty, x_0)$ и на (x_0, ∞), см. (П.6) и (П.7) ниже[8] в подразделе «Доказательство Предложения 3, случай $M = c\mu$, $c > 1$». Их

[8] В этих рассуждениях замкнутого круга нет.

решения обладают классическими производными на $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ и заведомо обладают правыми и левыми пределами в точке x_0, обозначаемые как $p(x_0\pm)$.

Таким образом, уравнение (7) обосновано.

2. Далее, следующий шаг состоит в том, чтобы проверить уравнение (8). Допустим, что (8) не выполнено, а, на самом деле,

$$p(x_0-) \neq p(x_0+).$$

Предположим, что $p(x_0-) > p(x_0+)$. Противоположный случай $p(x_0-) < < p(x_0+)$ может быть рассмотрен аналогично. Используем так называемый «гидродинамический подход» из теории массового обслуживания. Заметим, что в стационарном режиме «вероятностная масса» в точке x за инфинитезимально малое время δ перераспределится приблизительно как гауссовское распределение $\mathcal{N}(x, \sigma(x)^2\delta)$ с центром в x и малой дисперсией, пропорциональной δ (в данном случае $\sigma(x) \equiv 1$), независимо от конкретных значений сноса, во всяком случае, пока снос остается ограниченным (более точно, это асимптотическое утверждение с малым возмущением порядка $O(\delta)$, вызванным сносом; еще более точно, это будет $\approx \mathcal{N}(x + b(x)\delta, \sigma(x)^2\delta)$; при этом типичный разброс вокруг x, вызванный винеровским процессом, будет иметь порядок $\sqrt{\delta} \gg \delta$). Итак, ввиду асимптотической пренебрежимости воздействия сноса на эволюцию процесса на малых временах по сравнению с действием диффузионной части, приблизительно половина этой массы распространится направо от этой точки, а половина – налево от нее. Оказывается, что, во всяком случае, благодаря существованию левого предела $p(x)$ в x_0, та инфинитезимально малая часть общей вероятностной массы из полуоси $x < x_0$, которая перейдет на полуось $x > x_0$ за малое время δ, будет приближенно пропорциональна величине $p(x_0-)(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{\delta}))$. Ниже это строго обосновано в лемме 1. Совершенно аналогично, инфинитезимально малая часть общей вероятностной массы $x > x_0$, которая перейдет на полуось $x < x_0$ за малое время δ, будет приближенно пропорциональна величине $p(x_0+)(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{\delta}))$. Значит, для стационарного режима из этого будет следовать, что

$$p(x_0-) = p(x_0+),$$

что и требовалось. Отметим, что для этого вывода никакая конкретная форма плотности p на $x < x_0$ и на $x > x_0$ не является существенной, лишь бы только эта плотность была ограничена и имела правый и левый пределы в x_0. Сформулируем это в виде леммы. Без ограничения общности, можем и будем считать, что $x_0 = 0$.

Лемма 1. В условиях теоремы, «вероятностная масса», которая перейдет с левой полуоси $x < 0$ на правую полуось $x > 0$, имеет вид

$$S_1 = \frac{p(0-)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\delta} + o(\delta), \tag{П.2}$$

и «вероятностная масса», которая с правой полуоси $x > 0$ перейдет на левую полуось $x < 0$, имеет вид

$$S_2 = \frac{p(0+)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\delta} + o(\delta) \tag{П.3}$$

при $\delta \to 0$.

Доказательство леммы 1. Собственно говоря, вероятностная масса, которая перейдет с $\mathbb{R}_-$ на $\mathbb{R}_+$ за время δ, задается точным выражением

$$S_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1(X_\delta > 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1\Bigg(\overbrace{x + W_\delta + \underbrace{\int\limits_0^\delta b(X_s)ds}_{=O(\delta)} > 0}^{W_\delta > -x - O(\delta)}\Bigg).$$

Здесь $O(\delta)$, очевидно, является случайным; однако во всяком случае, эта величина удовлетворяет оценке

$$|O(\delta)| \leqslant \mu(1 \vee (C-1))\delta.$$

Поэтому можно оценить S_1 сверху, заменяя эту с.в. $O(\delta)$ на $-(C-1)\mu$ и μ соответственно. На самом деле, асимптотики при $\delta \to 0$ в обеих оценках будут очень похожи. Поэтому покажем лишь одну выкладку, используя то же обозначение $O(\delta)$, как если бы эта величина была неслучайной[9]. Итак, с такими предосторожностями в уме, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1(W_\delta > -x - O(\delta)) = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-x-O(\delta)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{y^2}{2\delta}} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x+O(\delta)}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x+O(\delta)}{\sqrt{\delta}}}^{-\frac{x}{\sqrt{\delta}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tag{П.4}$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^{0} p(x)dx \pm O(\sqrt{\delta}) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} p(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+O(\delta))^2}{2\delta}} dx}_{=o(1)}.$$

[9] Более строго, надо было бы предпринять два отдельных вычисления, одно с $O(\delta) = \mu\delta$, и другое с $O(\delta) = -(C-1)\mu\delta$; одно дало бы оценку на S_1 сверху, а другое – на то же S_1 снизу. Асимптотические значения для обеих оценок получились бы одинаковыми, как показано в (П.2).

Здесь второй член есть $o(\sqrt{\delta})$, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Для первого имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \left(\int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^0 p(x)dx \mp z\sqrt{\delta}\, p(0-) \right) =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\delta}\, p(0-) \int\limits_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=\sqrt{\delta}\, p(0-)/\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\delta} \int\limits_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \left(\frac{1}{z\sqrt{\delta}} \int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^0 p(x)dx - p(0-) \right).$$

В свою очередь тут подынтегральное выражение во втором слагаемом ограничено интегрируемой функцией и сходится к нулю для всякого $z > 0$. Поэтому снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости все второе слагаемое есть $o(\sqrt{\delta})$.

Объединяя все найденные выше оценки, находим, что

$$S_1 = \frac{p(0-)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}), \quad \delta \downarrow 0,$$

что и требовалось. Асимптотическое равенство (П.2) доказано.

Уравнение (П.3) следует из подобной выкладки, начиная с интеграла

$$S_2 = \int\limits_0^\infty p(x)dx \, \mathsf{E} \int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{(y-(x-O(\delta)))^2}{2\delta}} dy$$

с использованием аналога вычисления, приведшего к (П.4). Остальное аналогично, и детали оставляем читателю. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству уравнения (8), видим теперь, что предположение $p(x_0-) > p(x_0+)$ означало бы, что больше вероятностной массы перешло бы слева направо, чем обратно. Однако в стационарном режиме эти два «потока» должны быть сбалансированы, поэтому предположение $p(x_0-) \neq p(x_0+)$ ведет к противоречию. Следовательно, должно выполняться равенство (8). По существу, в доказательстве использовалось лишь, что плотность p существует, имеет правый и левый пределы в x_0, и что диффузионный коэффициент есть ненулевая постоянная[10].

Доказательство Предложения 3, случай $M = c\mu$, $c > 1$

Оказывается, не обязательно выбирать снос симметричным. Положим

$$a(x) = M \; 1(x > x_0).$$

[10] Правдоподобно, что аналогичный результат справедлив также для невырожденного коэффициента диффузии, непрерывного по Гельдеру.

Найдем стационарную плотность $p(\cdot)$. Обозначим ее значение в x_0 через $p(x_0)$. Ради удобства читателя, напомним уравнение стационарности на обеих полуосях $x > x_0$ и $x < x_0$:

$$\mathcal{L}^* p(x) = \frac{1}{2}\, p''(x) - (b(x)p(x))' = 0, \quad x \neq x_0, \tag{П.5}$$

где $b(x) = -(C-1)\mu$ при $x > x_0$ и $b(x) = \mu$ при $x < x_0$, дополненное условием непрерывности в x_0,

$$p(x_0-) = p(x_0+) =: p(x_0),$$

установленным в Предложении 4, см. (8).

1) При $x > x_0$ имеем

$$p'' + \gamma_1 p' = 0, \quad x > x_0, \quad \gamma_1 = (C-1)\mu > 0. \tag{П.6}$$

Легко найти решение и также легко проверить, что решением является функция

$$p(x) = p(x_0)e^{-\gamma_1(x-x_0)}, \quad x > x_0.$$

2) При $x < x_0$ имеем уравнение

$$p'' - \gamma_2 p' = 0, \quad x < x_0, \quad \gamma_2 = \mu > 0. \tag{П.7}$$

Аналогично случаю (П.6), находим

$$p(x) = p(x_0)e^{\gamma_2(x-x_0)}, \quad x < x_0.$$

Из условия нормировки получаем

$$1 = p(x_0)\left(\int_0^\infty e^{-\gamma_1 x}dx + \int_0^\infty e^{-\gamma_2 x}dx\right) = p(x_0)\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

так что

$$p(x_0) = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}.$$

Следовательно, стационарные вероятности процессу быть слева и справа от $x_0 = 0$ равны, соответственно,

$$p_+ = \int_0^\infty p_0 e^{-\gamma_1 x}dx = \frac{p_0}{\gamma_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\cdot\frac{1}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} = \frac{\mu}{(C-1)\mu+\mu} = \frac{1}{C}$$

и

$$p_- = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} = \frac{(C-1)\mu}{(C-1)\mu+\mu} = \frac{C-1}{C}.$$

Значит, средний доход при такой стратегии равен

$$p_- \cdot 0 + p_+ \cdot C\mu = \mu,$$

что и требовалось.

Отметим еще, что для стратегии $a(x) = c\mu\ 1(x > x_0)$ при условии $1 < c \leqslant \leqslant M/\mu$ доход также равен μ. Действительно, это следует в точности из тех же выкладок, с одной лишь заменой C на c.

Доказательство Теоремы 1

Первое доказательство. Для любой эргодической стратегии $a(\cdot)$ имеем согласно уравнению (1),

$$\mathsf{E}_x^a X_T - x = \mathsf{E}^a \int\limits_0^T (\mu - a(X_s))ds.$$

Теперь разделим обе части этого равенства на t, и устремим $t \to \infty$. В силу условия (6) получаем существование предела

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathsf{E}^a \int\limits_0^T (\mu - a(X_s))ds = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathsf{E}^a \int\limits_0^T a(X_s)ds = \mu.$$

Таким образом, получаем равенство (5)

$$r = \mu.$$

Второе доказательство. Пусть $a(\cdot)$ – произвольная эргодическая стратегия. Известно [6, 7], что в этом случае существует единственная инвариантная вероятностная мера μ^a, и справедлив закон больших чисел (ЗБЧ) в виде

$$\frac{\int_0^T a(X_s)ds}{T} \to \mathsf{E}^{a,inv} a(X_0),\ t \to \infty, \quad \mathsf{P}^a - \text{п.н.}, \tag{П.8}$$

где $\mathsf{E}^{a,inv} a(X_0) \equiv \int a(y)\mu^a(dy)$ – интеграл по инвариантной мере, соответствующей этой стратегии, и также

$$\frac{\mathsf{E}^a \int_0^T a(X_s)ds}{T} \to \mathsf{E}^{a,inv} a(X_0), \quad T \to \infty, \tag{П.9}$$

согласно принятому определению эргодичности. Если предположить, что $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) < \mu$, то в силу (П.8) процесс оказался бы транзиентным, уходящим на $+\infty$, поскольку в этом случае положительный доход μT, гарантированный постоянной мгновенной премией μ, за большое время T оказался бы намного больше, чем «потери» $\int_0^T a(X_s)ds$. Случай $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) > \mu$ при наложенных предположениях также невозможен. Действительно, в этом случае процесс должен был бы уходить на $-\infty$ в силу того же ЗБЧ (П.8), что запрещено ограничением (2). Следовательно, эргодичность влечет за собой равенство $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) = \mu$. Также, в силу (П.9) имеет место равенство (5). □

Замечание 1. Заметим, что с логической точки зрения одного доказательства достаточно[11]. Тем не менее, эти два метода показывают различные подходы, которые могут оказаться полезны в более сложных ситуациях[12]. Еще один, более стандартный метод показан в следующем разделе. Будучи в данном случае не вполне строгим, он, тем не менее, демонстрирует, что тут нет противоречия между разными подходами. Само уравнение (9) будет решено с использованием некоторой догадки. При этом проверка решения тривиальна, и описание всех эргодических (не зависящих явно от времени) оптимальных стратегий будет повторено на его основе.

Решение эргодического уравнения Беллмана

Решим уравнение Беллмана (9), как было сказано, немного нестрого в том, что компонента $\rho = \mu$ считается уже найденной. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = 0$, хотя любые другие значения x_0 также возможны.

Итак, при $x < 0$ имеем уравнение

$$V''(x) + \mu V'(x) - \rho = 0 \quad \text{т.е.,} \quad V''(x) + \mu V'(x) = \rho, \quad x < 0.$$

Частное решение имеет вид $V_p(x) = \frac{\rho}{\mu}x$, а общее решение ОДУ с нулевой правой частью $(V'' + \mu V' = 0)$ имеет вид $V_g(x) = C_1 + C_2 e^{-\mu x}$. Значит, при $x < 0$ получаем

$$V_1(x) = V_p(x) + V_g(x) = C_1 + C_2 e^{-\mu x} + \frac{r}{\mu}x.$$

[11] Известно почему А.Н. Колмогоров, будучи студентом, предпочел математику истории. Он написал историческое эссе с аргументацией относительно вопросов землевладения в XV в., и его профессор, историк С.В. Бахрушин, сказал ему, что в истории одного доказательства не достаточно: надо, по крайней мере, пять. В то время Колмогоров параллельно изучал математику, и он сказал самому себе, что в математике достаточно одного доказательства; поэтому он принял решение оставить историю и сконцентрироваться на математике. Спустя годы его историческое эссе было опубликовано учениками и высоко оценено специалистами-историками: А. Н. Колмогоров, Новгородское землевладение XV века. М.: Физматлит, 1994.

[12] Здесь уместно напомнить кажущийся противоположным совет Леонарда Эйлера: если есть несколько тропинок, возможно, ведущих к решению задачи, то желательно попробовать их все.

Аналогично, при $x > 0$ имеем уравнение

$$V'' + (\mu - M)V' + M - \rho = 0.$$

Его решение, построенное таким же образом, имеет вид

$$V_2(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 e^{(M-\mu)x} + \frac{\rho - M}{\mu - M}x, \quad x > 0.$$

Из условий гладкой склейки[13]

$$V_1(0-) = V_2(0+) \quad \text{и} \quad V_1'(0-) = V_2'(0+)$$

находим

$$V_1(0-) = C_1 + C_2 = V_2(0+) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$$

и

$$V_1'(x) = -\mu C_2 e^{-\mu x} + \frac{\rho}{\mu}, \quad x < 0.$$

Далее

$$V_1'(0-) = -\mu C_2 + \frac{\rho}{\mu} = 1$$

и поскольку здесь $\rho = \mu$, то заключаем, что $C_2 = 0$.

Аналогично

$$V_2'(x) = \tilde{C}_2 e^{(M-\mu)x}(M - \mu) + \frac{\rho - M}{\mu - M},$$

откуда имеем

$$V_2'(0+) = \tilde{C}_2(M - \mu) + \frac{\rho - M}{\mu - M} = 1.$$

В силу равенства $\frac{\rho-M}{\mu-M} = 1$, заключаем, что также $\tilde{C}_2 = 0$. Таким образом, $C_1 = \tilde{C}_1 =: C$. Значит,

$$V_1(x) = C + \frac{r}{\mu}x = C + x$$

и аналогично

$$V_2(x) = C + x.$$

Окончательно находим, что

$$V(x) = C + x.$$

[13] Эти условия не обсуждаются. Если с их помощью найдено классическое, или соболевское решение уравнения Беллмана, к которому применима формула Ито после подстановки диффузии в функцию V, то проверка того, что вторая компонента r – решение задачи (4), является стандартной процедурой. По существу, именно это и было сделано в первом доказательстве теоремы 1.

Тот факт, что здесь константа C не может быть определена, не удивителен, поскольку в уравнении Беллмана присутствуют только первые две производные V, но не сама функция V. Следовательно, первая компонента решения определена с точностью до аддитивной постоянной, как и было предсказано.

Подставляя эту *вспомогательную* функцию V в уравнение (10), можно увидеть, что предлагается выбирать произвольную (измеримую по Борелю) функцию $a(x) \in [0, M]$. Не будем забывать, что стратегия должна быть эргодической, и что имеет место условие (2), так что, строго говоря, этот выбор не совсем произволен. Эти заключения хорошо соответствуют ответу, найденному в разделе 3.

Чтобы завершить анализ данной модели, напомним, что с любой ограниченной и измеримой по Борелю стратегией $a(\cdot)$ уравнение (1) имеет потраекторно единственное сильное решение благодарая результатам любой из статей[14] [9–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taksar M.I.* Optimal Risk and Dividend Distribution Control Models for an Insurance Company // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. V. 51. P. 1–42. https://doi.org/10.1007/s001860050001
2. *Веретенников А.Ю.* О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических разностных и дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1999. Т. 44. № 2. С. 317–321. http://mi.mathnet.ru/tvp766
3. *Arapostathis A., Borkar V.S., Ghosh M.K.* Ergodic Control of Diffusion Processes // Cambridge: Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9781139003605
4. *Anulova S.V., Mai H., Veretennikov A.Yu.* On Iteration Improvement for Averaged Expected Cost Control for One-Dimensional Ergodic Diffusions // SIAM Journal on Control and Optimization. 2020. V. 58. No. 4. P. 2312–2331. https://doi.org/10.1137/19M1271944
5. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
6. *Хасьминский Р.З.* Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1960. Т. 5. № 2. С. 196–214. https://www.mathnet.ru/rus/tvp4825
7. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. With contributions by G. N. Milstein and M. B. Nevelson / 2nd completely revised and enlarged ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.
8. *Bensoussan A., Borkar V.* Ergodic control problem for one-dimensional diffusions with near-monotone cost // Systems & Control Letters. 1984. V. 5. No. 2. P. 127–133. https://doi.org/10.1016/0167-6911(84)90021-5
9. *Nakao S.* On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations // Osaka J. Math. 1972. V. 9. P. 513–518.

[14] Эти работы все весьма разные, однако есть общее пересечение, которое и позволяет в данном случае на любую из них сослаться.

https://projecteuclid.org/journals/osaka-journal-of-mathematics/volume-9/issue-3/On-the-pathwise-uniqueness-of-solutions-of-one-dimensional-stochastic/ojm/1200693939.pdf

10. *Звонкин А.К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос // Матем. сб. 1974. Т. 93(135). № 1. С. 129–149. https://www.mathnet.ru/rus/sm2963
11. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1979. Т. 24. № 2. С. 348–360. https://www.mathnet.ru/rus/tvp2867
12. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 3. С. 434–452. https://doi.org/10.1137/1124039

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 27.08.2025

После доработки 27.07.2026

Принята к публикации 11.08.2026

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. Ф.И. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук (fivanov@hse.ru),
А.В. КУВШИНОВ (akuvshinov@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ БЧХ-КОДОВ ПО МАКСИМУМУ АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ[1]

В данной статье предложен алгоритм упрощенного декодирования по максимуму апостериорной вероятности расширенных кодов БЧХ. В основе алгоритма лежат декодирование по максимуму апостериорной вероятности с использованием дуального кода, предложенное Хартманом и Рудольфом, и быстрое декодирование по МАВ кодов Хэмминга, предложенное Лицыным и Ашихминым. Рассмотренные модификации позволяют существенно снизить сложность декодирования по максимуму апостериорной вероятности при сохранении его корректирующей способности.

Ключевые слова: БЧХ, декодирование по максимуму апостериорной вероятности, декодер с «мягким» выходом.

DOI: 10.7868/S2413977726120062

1. Введение

В теории помехоустойчивого кодирования особое место занимают алгоритмы оптимального декодирования коротких кодов. Примерами таких алгоритмов являются декодирование по максимуму правдоподобия (МП) и декодирование по максимуму апостериорной вероятности (МАВ). МП-декодер является первоначальным подходом к подобному роду алгоритмов, он формирует глобально оптимальное решение с точки зрения вероятности кодового слова при условии заданной принятой последовательности, в то время как выходом МАВ-декодера являются посимвольно-оптимальные решения, т.е. алгоритм производит оценку апостериорных вероятностей для каждого символа по отдельности и принимает решение по наибольшей вероятности.

Востребованность МАВ-алгоритмов обусловлена появлением итеративных алгоритмов декодирования каскадных кодов. В частности, от декодера требуется наличие «мягкого» выхода при «мягком» входе. В этом случае выход декодера каждого компонента должен предоставлять не только «жесткое»

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-19-00299).

решение обо всем кодовом слове или каждом символе в отдельности, но и давать «мягкий» выход, т.е. надежность каждого такого «жесткого» решения (апостериорная вероятность, посчитанная МАВ). Подобный «мягкий» выход учитывается на следующей итерации путем обновления информации, полученной из канала. Подобные схемы, позволяющие не только снизить сложность, но и улучшить корректирующую способность, получили активное распространение в 1990-х годах после появления турбо-кодов [1], где в качестве декодера сверточных кодов-компонентов используется алгоритм Бала–Кука–Джелинека–Равива (БКДР) [2]. Алгоритм БКДР использует представление кода в виде решетки, что позволяет снизить сложность декодирования по сравнению с МАВ-декодером с прямым вычислением всех апостериорных вероятностей.

Коды Боуза–Чоудхури–Хоквингема (БЧХ) являются представителями класса циклических линейных кодов и широко применяются во многих приложениях [3]. Коды БЧХ обладают простой конструкцией и алгоритмом декодирования при условии их рассмотрения в канале с «жесткими» решениями. Наиболее известными декодерами БЧХ-кодов являются алгоритмы Питерсона–Горенстейна–Цирлера [4] и Берлекампа–Месси [5]. Однако, являясь декодерами с «жесткими» решениями, данные алгоритмы не могут быть применены в итеративных схемах декодирования. Проблеме «мягкого» декодирования БЧХ-кодов посвящено несколько работ. Авторы [6, 7] рассматривают МП-декодер БЧХ с «мягким» выходом, однако предложенный алгоритм может быть применен для ограниченного числа длин кодов БЧХ. Более универсальные с точки зрения параметров кода мягкие МП-декодеры для БЧХ-кодов рассмотрены в [8, 9]. По сути данные алгоритмы являются декодерами Витерби с решетками Вульфа [10].

Одним из возможных способов получения «мягкого» выхода декодера БЧХ является списочный подход к классическим декодерам с «жестким» списком в совокупности с алгоритмом Пиндиаха [11]. В основе такого метода – декодер Чейза, формирующий список из «жестких» кандидатов со всеми возможными комбинациями двоичных символов на самых ненадежных позициях принятого из канала вектора [12]. Каждый кандидат из списка декодируется далее классическим декодером с «жесткими» решениями. Далее эти решения вместе с принятой из канала последовательностью используются для формирования «мягкого» выхода. Списочному декодированию БЧХ-кодов посвящено недавнее исследование [13].

В [14] был рассмотрен подход, уменьшающий сложность декодирования расширенных кодов Хэмминга по МАВ по сравнению с декодированием по алгоритму БКРД. Используя быстрое преобразование Адамара, авторы упрощают вычисления по формулам декодирования по МАВ, выведенным в [15], применительно к расширенным кодам Хэмминга и указывают на возможность применения данного подхода к любым линейным кодам.

В данной работе рассмотрено применение предложенного в [14] подхода к расширенным кодам БЧХ. В статье разработаны методы, которые позволяют существенно уменьшить сложность подхода, предложенного в [14]. Основная идея упрощений основана на том, что структура кода Хэмминга, являющегося основой для декодирования БЧХ-кодов в [14], позволяет произвести расчет некоторых параметров заранее, а не в процессе непосредственного декодирования. Таким образом, разработанные процедуры, примененные к алгоритму декодирования, уменьшают его сложность при сохранении корректирующей способности декодера по максимуму апостериорной вероятности.

2. Декодирование по максимуму апостериорной вероятности

Вначале рассмотрим общий принцип МАВ-декодирования.

Ограничимся рассмотрением линейных (n, k) блоковых кодов C над полем $GF(2)$: $C = \{\mathbf{c}_m, m = 1, \ldots, 2^k\} \subseteq \{0,1\}^n$, слова кодовой книги которых передаются через канал с двоичным входом и без памяти. Таким образом, на вход в канал поступают векторы $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\mathbf{c} \in C$ длины n.

На приемном конце наблюдаются последовательности $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_i \in \mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y}$ – выходной алфавит канала), искаженные шумом.

МАВ-декодер является побитовым декодером и для каждой j-й позиции кодового слова оценивает условную (апостериорную) вероятность отправки каждого из символов $\{0,1\}$ в кодовом слове $\mathbf{c}$ и вычисляет значение j-го символа следующим образом:

$$\hat{c_j} = \arg \max_{k \in \{0,1\}} P(c_j = k|\mathbf{r}).$$

Для случая передачи в дискретном канале апостериорная вероятность может быть выражена через функции правдоподобия с использованием формулы Байеса. Обозначим $C_j(k)$ множество кодовых слов, в которых символ на j-й позиции равен k, тогда при условии равномерного распределения на множестве кодовых слов, имеем:

$$P(c_j = k|\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{s} \in C_j(k)} P(\mathbf{c} = \mathbf{s}|\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{s} \in C_j(k)} \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{s})}{P(\mathbf{r})} P(\mathbf{s}) = \frac{1}{2^k P(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{s} \in C_j(k)} \prod_{i=1}^{n} P(r_i|s_i). \quad (1)$$

Таким образом, для каждой позиции передаваемой последовательности МАВ-декодер вычисляет (1) для символов из $\{0,1\}$ и принимает «жесткое» решение по наибольшей апостериорной вероятности. Надежностью данного решения (т.е. «мягким» выходом декодера) и служит вероятность $P(c_j = k|\mathbf{r})$.

3. Упрощенное декодирование по максимуму апостериорной вероятности кодов Хэмминга

Для кодов скорости $R = \frac{k}{n} > \frac{1}{2}$ можно добиться упрощения вычисления (1) за счет декодирования в дуальном коде, что было предложено в [15]. Код, дуальный коду C, будем обозначать $C^{\perp}$, а кодовые слова такого кода – $\mathbf{c}'$. В [15] была доказана теорема, из которой следует соотношение для разности между апостериорными вероятностями, по сути являющаяся искомым «мягким» выходом декодера, которое для двоичных кодов выглядит следующим образом:

$$P(c_j = 0|\mathbf{r}) - P(c_j = 1|\mathbf{r}) = \frac{P(c_j = 0|\mathbf{r}) - P(c_j = 1|\mathbf{r})}{P(c_j = 0|\mathbf{r}) + P(c_j = 1|\mathbf{r})} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{n-k}} \prod\limits_{l=1}^{n} \rho_l^{c'_{il} \oplus \delta_{jl}}}{\sum\limits_{i=1}^{2^{n-k}} \prod\limits_{l=1}^{n} \rho_l^{c'_{il}}}, \tag{2}$$

где c'_{ij} – j-й элемент i-го кодового слова дуального кода $C^{\perp}$, δ_{ij} – символ Кронекера и ρ_j может быть выражено через отношение правдоподобия $\frac{P(r_j|c_j=1)}{P(r_j|c_j=0)}$ следующим образом:

$$\rho_j = \frac{1 - \frac{P(r_j|c_j=1)}{P(r_j|c_j=0)}}{1 + \frac{P(r_j|c_j=1)}{P(r_j|c_j=0)}} = P(c_j = 0|r_j) - P(c_j = 1|r_j). \tag{3}$$

В [14] был предложен метод для быстрого подсчета (2) для расширенного $(2^m, 2^m - m - 1)$ кода Хэмминга. В основе алгоритма лежит быстрое преобразование Адамара.

Опишем кратко основные этапы декодирования по данному алгоритму. Введем обозначения $\mathcal{I}_j(0)$, $\mathcal{I}_j(1)$ для набора позиций, в которых символ j-го кодового слова равен 0 или 1 соответственно, причем $\mathcal{I}_j(0) \cap \mathcal{I}_j(1) = \emptyset$ и $\mathcal{I}_j(0) \cup \mathcal{I}_j(1) = \{1, \ldots, 2^m\}$. После подсчета элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$ процесс декодирования сводится к двум шагам.

- Посчитаем элементы векторов $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ следующим образом:

$$\omega_j^{(0)} = \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(0)} \prod_{l \in \mathcal{I}_t(1)} \rho_l + \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(1)} \prod_{l \in \mathcal{I}_t(0)} \rho_l, \ j = 1, \ldots, 2^m, \tag{4}$$

$$\omega_j^{(1)} = \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(0)} \prod_{l \in \mathcal{I}_t(0)} \rho_l + \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(1)} \prod_{l \in \mathcal{I}_t(1)} \rho_l, \ j = 1, \ldots, 2^m. \tag{5}$$

- В результате искомый «мягкий» выход декодера для каждой j-й позиции кодового слова может быть выражен через соответствующие элементы найденных векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\rho}$:

$$z_j = \frac{\omega_j^{(0)} \rho_j + \frac{\omega_j^{(1)}}{\rho_j}}{\omega_j^{(0)} + \omega_j^{(1)}} = P(c_j = 0|\mathbf{r}) - P(c_j = 1|\mathbf{r}). \tag{6}$$

Данный результат декодирования (как и в выражении (2)) без труда можно перевести в отношение апостериорных вероятностей, логарифм от которого как правило используется в схемах декодирования, например, для последующего обновления информации из канала в итеративных декодерах каскадных кодов.

4. Упрощенное декодирование по максимуму апостериорной вероятности кодов БЧХ

В данном разделе описан алгоритм декодирования по МАВ, адаптированный для декодирования расширенных БЧХ-кодов. Идея распространения алгоритма декодирования, описанного в предыдущем разделе, на любые линейные высокоскоростные коды была предложена в [14]. Основная идея заключается в декодировании предложенным алгоритмом $(2^m, 2^m - tm - 1)$-кода БЧХ с использованием проверочной матрицы кода Хэмминга с тем же числом строк, что и в соответствующей матрице расширенного БЧХ-кода. Тогда для указанного кода БЧХ рассмотрим расширенный $(2^{tm+1}, 2^{tm+1} - tm - 2)$-код Хэмминга (с параметрами $n - k = tm + 2,\ n = 2^{tm+1}$). Идея декодирования заключается в том, что проверочная матрица кода Хэмминга длины $2^{n-k} - 1$ обязательно содержит все столбцы проверочной матрицы любого кода избыточности $(n - k)$. Следует отметить, что рассмотренный далее алгоритм применим для декодирования кодов с минимальным расстоянием $d \geqslant 3$, поскольку проверочные матрицы таких кодов не содержат одинаковые столбцы.

В таком случае процесс декодирования расширенного $(2^m, 2^m - tm - 1)$-кода БЧХ можно свести к алгоритму, описанному в разделе 3. Данный алгоритм будет использовать дуальный код расширенного $(2^{tm+1}, 2^{tm+1} - tm - 2)$-кода Хэмминга, который, как известно, является $(2^{tm+1}, tm + 1)$-кодом Рида–Маллера первого порядка $RM(1, tm+1)$. На его вход будет поступать вектор $\boldsymbol{\rho}$ длины 2^{tm+1}. Если j-й столбец проверочной матрицы кода Хэмминга не являются одновременно столбцом проверочной матрицы соответствующего кода БЧХ, то элемент ρ_j вектора $\boldsymbol{\rho}$ приравниваются единице в начале процедуры декодирования. В противном случае, ρ_j вычисляется по формуле (3).

Ключевым недостатком такого подхода является большой размер кодовой книги кода, дуального коду Хэмминга, даже для небольших длин соответствующего кода БЧХ. В процессе декодирования одной принятой последовательности необходимо использовать каждое слово такой кодовой книги при основных подсчетах, что существенно замедляет алгоритм. Далее будут предложены модификации, упрощающие процесс вычислений.

Для удобства длину принятой последовательности $\boldsymbol{r}$, соответствующей длине $(2^m, 2^m - tm - 1)$ БЧХ-кода будем по-прежнему обозначать $n = 2^m$. Длину расширенного кода Хэмминга, имеющего то же число проверок, что и БЧХ-код, обозначим $N = 2^{tm+1}$ (число столбцов в кодовой книге, используемой в процессе декодирования). Будем далее для удобства рассматривать вектор $\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ как матрицу с элементами $\omega_{ij}^{(0)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, N$. Для

получения $\omega_j^{(0)}$ необходимо просуммировать $\omega_{ij}^{(0)}$ по i, т.е.

$$\omega_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^{(0)},$$

$$\omega_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij}^{(1)},$$

где элементы $\omega_{ij}^{(0)}$ и $\omega_{ij}^{(1)}$ определяются далее в выражениях (8) и (9).

Структура кода $RM(1, tm+1)$ позволяет ввести в процесс декодирования следующие модификации:

а) Введем множество $\mathcal{R} : \mathcal{R} = \{i : \rho_i \neq 1\}$, которое совпадает с индексами столбцов проверочной матрицы расширенного $(2^m, 2^m - tm - 1)$-кода БЧХ в проверочной матрице $(2^{tm+1} - 1, 2^{tm+1} - tm - 2)$-кода Хэмминга. В виду того, что $\forall j = \{1, \ldots, 2^{tm+1}\}$, $\forall \mathbf{c} \in RM(1, tm+1) \cap \mathcal{I}_j(0)$ $\exists\, \tilde{\mathbf{c}} \in RM(1, tm+1) \cap \mathcal{I}_j(1)$: $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{1} + \mathbf{c}$, где $\mathbf{1}$ – вектор из единиц, то при подсчете (4) и (5) будем рассматривать только половину кодовых слов (например, $C_j^{\perp}(0)$) в процессе декодирования, поэтому

$$\omega_j^{(0)} = 2 \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(0)} \prod_{l \in \mathcal{I}_t(1)} \rho_l,$$

$$\omega_j^{(1)} = 2L \sum_{\mathbf{c}'_{\mathbf{t}} \in C_j^{\perp}(0)} \frac{1}{\prod\limits_{l \in \mathcal{I}_t(1)} \rho_l},$$

где константа L вычисляется как произведение элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$ на позициях $\mathcal{R}$:

$$L = \prod_{l \in \mathcal{R}} \rho_l.$$

б) В связи с тем, что на результат декодирования влияют только строки кодовой книги $C_j^{\perp}(0)$ с индексами из $\mathcal{R}$, достаточно ограничиться рассмотрением n таких кодовых слов.

в) Для результата декодирования достаточно посчитать только элементы z_j, $j \in \mathcal{R}$ в формуле (6), которые зависят от $\rho_j, j \in \mathcal{R}$.

г) Для каждой пары столбцов кодовой книги $C_j^{\perp}(0)$ может быть посчитано единственное значение ρ_{ij}. Остальные элементы $\boldsymbol{\rho}$ равны либо данному значению, либо $\frac{L}{\rho_{ij}}$ (в произведении берутся только индексы $j \in \mathcal{R}$).

д) Используя кодовую книгу, можно заранее посчитать индексы элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$, произведение от которых будет использовано в процессе декодирования для поиска соответствующих элементов векторов $\boldsymbol{\omega}^{(\mathbf{0})}$, а также индексы соответствующих произведений для каждого элемента.

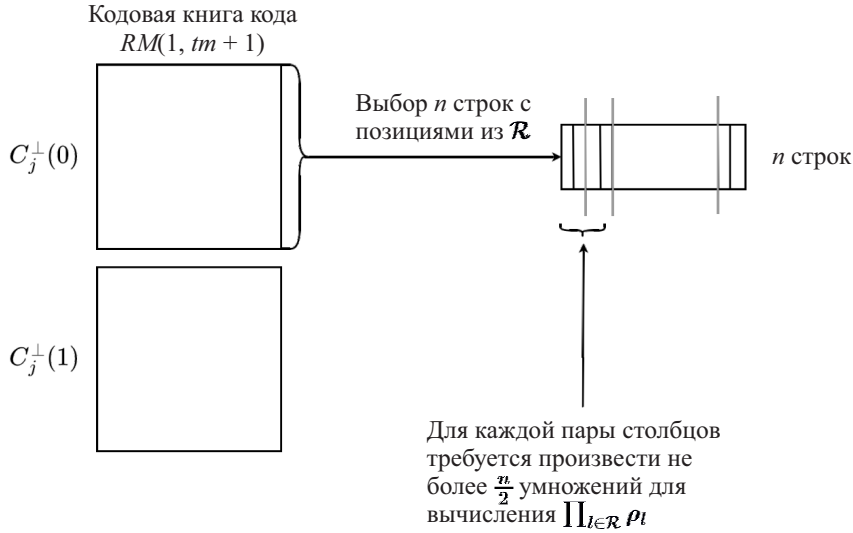


Рис. 1. Упрощение обработки кодовой книги.

Основные модификации MAB-декодера с точки зрения обработки только части кодовой книги соответствующего расширенного кода Хэмминга продемонстрированы в виде схемы на рис. 1.

В соответствии с перечисленными пунктами (а)–(д) декодирование расширенных кодов БЧХ можно представить в виде двух этапов – предварительного подсчета, не зависящего от принятой последовательности, и непосредственного декодирования принятого вектора $\mathbf{r}$:

- Предварительный расчет. Множества пересечений позиций $\mathcal{R}$ и позиций, в которых $C_j^{\perp}(0)$ равно единице, посчитаем заранее для каждого j. Запишем такие пересечения в виде матрицы $\mathcal{A}$, которая будет иметь размеры N на N, и каждый элемент α которой является множеством указанных пересечений: $\alpha_{ji} = \mathcal{R} \cap \{i : c'_i = 1, \mathbf{c}' \in C_j^{\perp}(0)\}$. Ввиду пункта (а) пересечения $\mathcal{R} \cap \{i : c'_i = 1, \mathbf{c}' \in C_j^{\perp}(1)\}$ хранить не нужно. Полученную матрицу можем сократить до размеров n на N, сохранив только строки с индексами из $\mathcal{R}$.

  Матрица $\mathcal{A}$ имеет N уникальных элементов. В процессе декодирования будут использоваться только произведения элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$ на позициях, хранящихся в данных элементах. Запишем такие элементы в виде массива $\mathcal{J}$.

  Тогда матрицу соответствия между элементами $\mathcal{J}$ и $\mathcal{A}$ получим как позиции элементов $\mathcal{J}$ в матрице $\mathcal{A}$ и обозначим $\mathcal{P}$. Элементы данной матрицы будут указывать на одно из N произведений, использующихся в (4) и (5).

  Для каждой пары соседних столбцов в матрице $\mathcal{A}$ справедливо следующее:

$$\alpha_{j,2i-1} \cup \alpha_{j,2i} = \mathcal{R}, \quad i = 1, \ldots, \frac{n}{2}.$$

- Непосредственный процесс декодирования принятой последовательности $\mathbf{r}$:

  1) Посчитаем N произведений элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$ на соответствующих позициях: Для каждого j-го символа в декодируемой последовательности вычислим произведение элементов вектора $\boldsymbol{\rho}$ на позициях $\mathcal{J}(j)$

  $$P_j = \prod_{s \in \mathcal{J}(j)} \rho_s. \tag{7}$$

  2) Используем полученный результат для вычисления элементов $\omega_{ij}^{(0)}$ и $\omega_{ij}^{(1)}$

  $$\omega_{ij}^{(0)} = P(\mathcal{P}(i,j)), \tag{8}$$

  $$\omega_{ij}^{(1)} = \frac{L}{\omega_{ij}^{(0)}}. \tag{9}$$

  3) Формула для подсчета «мягкого» результата z_j для каждого j-го символа совпадает с (6).

При вычислениях в (7) можно использовать функцию sum-product (по аналогии с функциями декодирования кодов с малой плотностью проверок на четность:

$$P_j = \prod_{s \in \mathcal{J}(j)} \beta_s \exp\left(\sum_{s \in \mathcal{J}(j)} \varphi_s \right),$$

где $\beta_i = \operatorname{sign}(\rho_i)$, $\varphi_i = ln(|\rho_i|)$.

5. Результаты моделирования и сравнение по сложности

В данном разделе представлено сравнение производительности (с точки зрения корректирующей способности и вычислительной сложности) расширенных БЧХ-кодов с использованием классического MAB-декодера, описанного в [15] и модифицированного для БЧХ-кодов декодером из [14].

На рис. 2 показано сравнение MAB-декодеров для $(32, 21)$ расширенного БЧХ-кода с точки зрения вероятности ошибки на бит (bit error rate, BER). Кроме того, на рисунке показаны вероятности ошибки на бит для декодера Чейза с параметром $p = 6$ (число перебираемых ненадежных позиций) и для декодера sum-product, примененного к проверочной матрице расширенного БЧХ-кода. В качестве канала для моделирования был выбран канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ), модуляция – двоичная фазовая манипуляция (binary phase shift keying, BPSK).

На рис. 3 продемонстрировано аналогичное сравнение MAB-декодеров для $(16, 7)$ расширенного БЧХ-кода по BER.

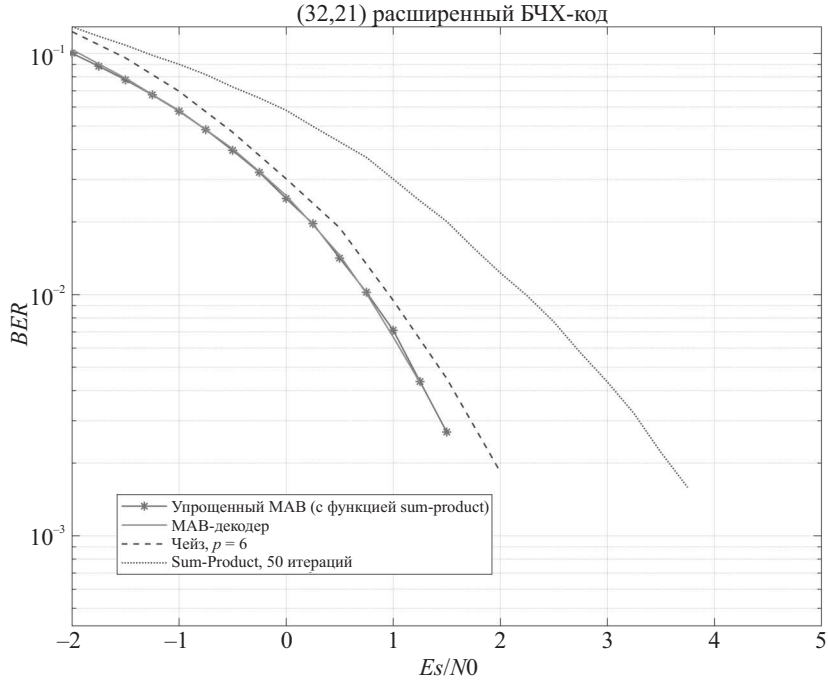


Рис. 2. BER-характеристика предложенного МАВ-декодера для $(32, 21)$ расширенного БЧХ-кода.

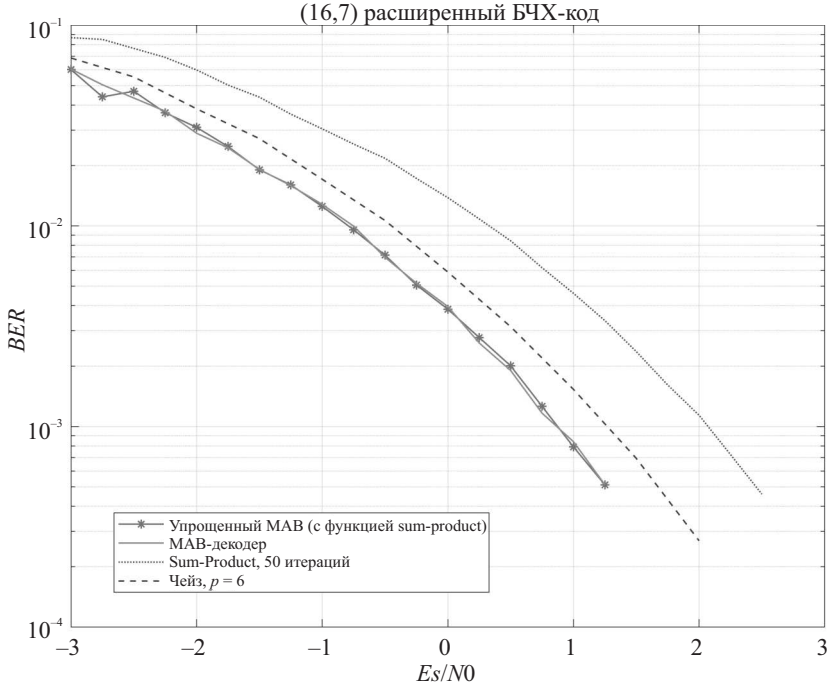


Рис. 3. BER-характеристика предложенного МАВ-декодера для $(16, 7)$ расширенного БЧХ-кода.

Как видно из представленных результатов, корректирующая способность представленного упрощенного МАВ-декодера совпадает с классическим подходом декодирования по МАВ при выборе в качестве функции для подсчета (7) функции sum-product.

Для сравнения предложенных алгоритмов декодирования по сложности запишем количество затрачиваемых на каждом этапе операций в виде формул по элементарным операциям:

для базового декодера МАВ без упрощений с функцией sum-product для подсчета (4) и (5):

$$2N^t \left(NC_+ + C_* + C_{\exp}\right),$$

для упрощенной версии декодера МАВ с функцией sum-product:

$$n^t \left(\frac{n}{2}C_+ + C_* + C_{\exp}\right),$$

для декодера Чейза:

$$2^p * (t * (n \log nC_{prod} + n \log nmC_{XOR}) + 2C_{prod} + 2mC_{XOR}),$$

где

1) C_+ – сложность вычисления суммы в $\mathbb{R}$,

2) C_* – сложность умножения (деления) в $\mathbb{R}$,

3) $C_{\exp}$ – сложность вычисления $\exp(\cdot)$,

4) C_{XOR} – сложность операции XOR (mC_{XOR} – сложность вычисления суммы в поле $GF(2^m)$),

5) C_{prod} – сложность умножения (деления) в $GF(2^m)$,

6) p – параметр декодера Чейза,

7) t – число исправляемых кодом ошибок.

Декодер Чейза 2^p раз применяет базовый декодер БЧХ с «жестким» выходом (декодер Берлекампа–Месси). Сложность декодера Берлекампа–Месси заключается в составлении квадратного уравнения, требующего вычисления t компонентов синдрома (каждое из которых равносильно быстрому преобразованию Фурье и требует $n \log nC_{prod} + n \log nmC_{XOR}$), и его решении (подстановка элементов поля $GF(2^m)$ в уравнение, что требует $2C_{prod} + 2mC_{XOR}$ операций).

Далее в табл. 1 и 2 продемонстрировано сравнение рассмотренных декодеров для расширенного БЧХ-кода с параметрами, соответствующими результатам моделирования, с точки зрения элементарных операций, использующихся для декодирования одной принятой последовательности.

Таблица 1. Сравнение декодеров по элементарным операциям для $(32, 21)$ расширенного кода БЧХ

(32,21) расширенный БЧХ	Exp	Умножения в поле GF	Умножения в $\mathbb{R}$	Сложения в $\mathbb{R}$	Сложения в поле GF
Чейз, $p = 6$	0	20 608	0	0	20 608
Упрощенный МАВ-декодер	1024	0	1024	16 384	0
МАВ-декодер [14]	8 388 608	0	8 388 608	1.7180e+10	0

Таблица 2. Сравнение декодеров по элементарным операциям для $(16, 7)$ расширенного кода БЧХ

(16,7) расширенный БЧХ	Exp	Умножения в поле GF	Умножения в $\mathbb{R}$	Сложения в $\mathbb{R}$	Сложения в поле GF
Чейз, $p = 6$	0	8320	0	0	8320
Упрощенный МАВ-декодер	256	0	256	2048	0
МАВ-декодер [14]	524 288	0	524 288	268 435 456	0

6. Заключение

В настоящей работе рассмотрено эффективное по сложности декодирование расширенных кодов БЧХ. Предложены различные модификации, касающиеся декодирования кодов БЧХ по максимуму апостериорной вероятности, использующего кодовую книгу кода, дуального расширенному коду Хэмминга с тем же числом проверок, что и расширенный код БЧХ. Изначально такой подход имеет высокую сложность в виду большой длины соответствующего кода Хэмминга. Однако этап предварительного подсчета некоторых параметров, предложенный в данной статье, позволяют существенно снизить сложность такого декодера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Berrou C., Glavieux A.* Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo-codes // IEEE Trans. on Commun. 1996. V. 44. No. 10. P. 1261–1271.
2. *Bahl L., Cocke J., Jelinek F., Raviv J.* Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1974. V. 20. No. 2. P. 284–287.
3. *Bose R.C., Ray-Chaudhuri D.K.* On a class of error correcting binary group codes // Information and Control. 1960. V. 3. No. 1. P. 68–79.
4. *Peterson W.* Encoding and error-correction procedures for the Bose-Chaudhuri codes // IRE Trans. on Inform. Theory. 1960. V. 6. No. 4. P. 459–470.
5. *Massey J.* Shift-register synthesis and BCH decoding // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1969. V. 15. No. 1. P. 122–127.
6. *Kasami T., Takata T., Fujiwara T., Lin S.* Trellis diagram construction for some BCH codes // IEEE Int. Symp. Inform. Theory and Appl. Honolulu. HI. 1990.

7. *Kasami T., Takata T., Fujiwara T., Lin S.* On the optimum bit orders with respect to the state complexity of trellis diagrams for binary linear codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1993. V. 39. P. 242–243.
8. *Snyders J., Be'ery Y.* Maximum likelihood soft decoding of binary block codes and decoders for the Golay codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1989. V. 35. No. 5. P. 963–975.
9. *Berger Y., Be'ery Y.* Soft trellis-based decoder for linear block codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1994. V. 40. No. 1. P. 764–773.
10. *Wolf J.* Efficient maximum likelihood decoding of linear block codes using a trellis // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1978. V. 24. No. 1. P. 76–80.
11. *Pyndiah R.* Near-optimum decoding of product codes: block turbo codes // IEEE Trans. on Commun. 1998. V. 46. No. 8. P. 1003–1010.
12. *Chase D.* Class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1972. V. 18. No. 1. P. 170–182.
13. *Bossert M., Schulz R., Bitzer S.* On hard and soft decision decoding of BCH codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 2022. V. 68. No. 11. P. 7107–7124.
14. *Ashikhmin A., Litsyn S.* Simple MAP decoding of first-order Reed-Muller and Hamming codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 2004. V. 50. No. 8. P. 1812–1818.
15. *Hartmann C., Rudolph L.* An optimum symbol-by-symbol decoding rule for linear codes // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1976. V. 22. No. 5. P. 514–517.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 16.12.2024

После доработки 21.07.2026

Принята к публикации 03.08.2026

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Каменецкий В.А. Критерий Попова абсолютной устойчивости для систем с несколькими стационарными нелинейностями без использования S-процедуры 3

Стохастические системы

Бирюков Р.С., Бубнова Е.С. Обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление линейной дискретной системой с марковскими переключениями на конечном горизонте 16

Борисов А.В. Оптимальная фильтрация состояний специальных марковских скачкообразных процессов по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами I: теоретическое решение 39

Борисов А.В. Оптимальная фильтрация состояний специальных марковских скачкообразных процессов по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами II: численная аппроксимация 66

Веретенников А.Ю., Ященко Е.Ю. Пример оптимального эргодического управления в среднем в диффузионной модели страховой компании 97

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Иванов Ф.И., Кувшинов А.В. Эффективное декодирование БЧХ-кодов по максимуму апостериорной вероятности 115

CONTENTS

Nonlinear Systems

Kamenetskiy V.A. Popov's Criterion of Absolute Stability for Systems with Several Stationary Nonlinearities without the Use of the S-Procedure 3

Stochastic Systems

Biryukov R.S., Bubnova E.S. Generalized $\mathcal{H}_2$-Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems over a Finite Horizon 16

Borisov A.V. Optimal Filtering of Special Markov Jump Processes Given Continuous Observations with Multiplicative Noise I: Theoretical Solution 39

Borisov A.V. Optimal Filtering of Special Markov Jump Processes Given Continuous Observations with Multiplicative Noise II: Numerical Approximation 66

Veretennikov A.Yu., Yashchenko E.Yu. A Primer of Optimal Ergodic Average Control for an Insurance Company Diffusion Model 97

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Ivanov F.I., Kuvshinov A.V. Simplified Maximum A Posteriori Probability Decoding of Binary BCH Codes 115