Стохастические системы

© 2026 г. А.Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ, д-р физ.-мат. наук (ayv@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Российский университет дружбы народов, Москва;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва),
Е.Ю. ЯЩЕНКО (elizaveta.iashchenko@math.msu.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО ЭРГОДИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДНЕМ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ[1]

Рассмотрен эргодический аналог хорошо известной модели управляемой диффузии при анализе риска и распределения дивидендов страховой компании. Представляется любопытным как в этом несложном примере оптимальные стратегии, которых оказывается бесконечное множество, согласуются с эргодическим уравнением Беллмана.

Ключевые слова: диффузионная модель, страховая компания, эргодическое управление в среднем, пример.

DOI: 10.7868/S2413977726120054

1. Введение, постановка задачи

Рассматривается эргодический аналог задачи оптимального стохастического управления из [1]. Данная модель может быть интересна как пример того, как самые простые методы стохастического анализа могут быть использованы для формализации долговременной устойчивости финансовой компании в условиях риска и неопределенности. Опустим здесь детали обоснования диффузионной аппроксимации, которые можно найти, в частности, в литературе, приведенной в [1], и прямо перейдем к идеальной предельной модели эволюции резерва или капитала компании, принятой в [1] и во многих других работах[2]:

$$dX_t = (\mu - a(X_t))dt + dW_t, \quad X_0 = x > 0, \quad 0 \leqslant a \leqslant M, \quad M > \mu. \tag{1}$$

Здесь $(W_t,\, t \geqslant 0)$ – стандартный винеровский процесс, постоянная $\mu > 0$ имеет смысл (средней) страховой премии за единицу времени, функция $a(X_t)$ есть сумма, которую компания тратит, также в единицу времени, на расходы, зарплату и т.п., и как раз эту функцию следует определить. Функция $a(\cdot)$

[1] Исследование для первого автора осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

[2] В отличие от модели в [1], подчеркнем отсутствие дисконтирования, как обычно в эргодической постановке, см. далее формулировку цели оптимизации в (4).

называется стратегией, или марковской стратегией, и должна быть выбрана так, чтобы максимизировать некоторый функционал, см. ниже. Рассматривается модель «идеальной» компании, которая никогда не разорится, даже если ее капитал станет отрицательным в какой-то момент времени. Но любая «разумная» стратегия должна стараться избегать попадать в состояния с отрицательным капиталом, и в то же время, обеспечивать некоторый положительный в среднем доход. Поэтому примем правило

$$a(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \leqslant 0. \tag{2}$$

Это значит, что при отрицательном резерве никакие выплаты «себе» и даже выдачу зарплат компания позволить не может[3]. Другое ограничение состоит в том, что существует конечное значение $M > \mu$ такое, что

$$0 \leqslant a(x) \leqslant M, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Символы E^a или $\mathsf{E}^{a(\cdot)}$ обозначают математическое ожидание при применении стратегии $a(\cdot)$. Целью оптимизации является функционал [4]

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathsf{E}_x^{a(\cdot)} \int\limits_0^T a(X_t)\, dt \to \sup_{a(\cdot)} =: r. \tag{4}$$

Дополнительно необходимо найти стратегию, на которой супремум достигается или, возможно, почти достигается (т.е. достигается с точностью до заданного малого $\varepsilon > 0$).

В задачах стохастического управления одним из стандартных инструментов является уравнение Беллмана, в данном случае в его эргодическом варианте, который отличается от уравнения на конечном интервале времени. В данной постановке эргодическое уравнение Беллмана также можно выписать и попытаться решить (см. ниже раздел 3), хотя строгая обоснованность такого метода пока остается под вопросом[5]. Поэтому в данной работе был принят иной подход. Сперва на основе эвристических соображений предъявляются оптимальный «выигрыш» r и оптимальная стратегия, и даже не

[3] Возможны другие, близкие по смыслу постановки. В данном случае рассматривается лишь один из вариантов, кажущийся разумным и нередко используемый в приложениях, см., например, [1]. Фактически, модель могла бы допускать и выплаты при некоторых отрицательных значениях резерва, что соответствовало бы выбору некоторого порога $x_0 \leqslant 0$, выше которого также разрешены выплаты. Анализ ниже допускает такую возможность, но такое расширение модели привело бы, на взгляд авторов, к неоправданному увеличению объема статьи.

[4] Левая и правая части данной формулы могут зависеть от начальной точки x. Для эргодических стратегий это обычно константы.

[5] Это уравнение удается строго обосновать в некоторых других эргодических моделях, см. [3, 4]. К рассматриваемой постановке указанные результаты не применимы. В [3] функция $a(x)$ должна быть строго меньше еще не найденного значения r вблизи бесконечности, что в настоящей работе не предполагается. В [4] процесс должен быть равномерно эргодичен при любой допустимой стратегии; в данном случае это требование также нарушено.

одна, а целое семейство. Затем строго доказывается, что все предъявленные стратегии приводят к одной и той же величине r, и что больше получить невозможно. В отдельном разделе показано, как найти решение эргодического уравнения Беллмана и что это дает в плане отыскания оптимальных стратегий. Результаты соответствуют полученным ранее, несмотря на то, что данный подход здесь не является строгим.

В данной модели существуют и эргодические, и неэргодические стратегии. Например, тривиальной неэргодической стратегией является $a(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Несколько более разумным кажется использовать $a(x) = (\mu - \varepsilon)\, 1(x \geqslant x_0)$ при некотором $x_0 \geqslant 0$. Поведение процесса при такой стратегии транзиентно, он будет «уходить» на бесконечность, а средний доход за большое время окажется равен $\mu - \varepsilon$. На неэргодических стратегиях, по крайней мере, не зависящих явно от времени, достичь максимума функционала не удастся. Этот вопрос в работе не обсуждается.

Одной из очевидных эргодических стратегий является правило (см. (3))

$$a(x) = M\, 1(x > x_0), \qquad \text{при произвольном } x_0 \geqslant 0.$$

Для такой стратегии существует (единственная) инвариантная вероятностная мера процесса μ^a, а его маргинальные распределения μ_t сходятся к μ^a по метрике полной вариации экспоненциально быстро (см., например, [2]). Можно отметить, что при $M = 2\mu$ такая стратегия обеспечивает средний выигрыш $r = \mu$, в силу очевидной симметрии относительно x_0, причем независимо от выбора $x_0 \geqslant 0$. Это будет следовать и из строгих рассуждений в следующих разделах.

Другое интуитивное и нестрогое рассуждение говорит, что с постоянной компонентой сноса μ (напомним, что $\mu > 0$) вряд ли возможно обеспечить за большое время больший в среднем доход, чем μ. Действительно, в противном случае резерв с какого-то момента неизбежно стал бы отрицательным и начал бы уходить на $-\infty$. Но это противоречит ограничению (2) при отрицательных значениях x, так что такое поведение не является возможным. Следовательно, естественна *гипотеза,* что при $M > \mu$ ответ должен быть таким

$$r = \mu. \tag{5}$$

Это, действительно, справедливо и будет далее строго доказано, см. ниже теорему 1. В части существования оптимальных стратегий имеется бесконечно много таких (эргодических) стратегий, и их можно описать, даже не опираясь на эргодическое уравнение Беллмана, которое обычно появляется в подобных задачах (см. [3, 4], и др.), хотя тут и нет никакого противоречия с этим уравнением. Как оказывается, искомый максимум r достигается на любой эргодической стратегии при условии выполнения неограничительного технического условия (6) (см. ниже).

В разделе 2 предложено два разных доказательства основного результата, оба без использования (эргодического) уравнения Беллмана. В разделе 3

выписано это уравнение, оно решено и показано, что на его основе строится то же самое семейство оптимальных стратегий.

Все технические доказательства могут быть найдены в Приложении, где, в частности, обосновано условие непрерывности стационарной плотности для специального класса эргодических стратегий, называемое обычно условием склейки.

2. Основные результаты

Существуют различные определения эргодичности. В данной работе будет принято следующее.

Определение 1. Стратегия $a(\cdot)$, так же, как и (марковский) процесс X, ей соответствующий, называются эргодическими, если и только если существует единственная инвариантная мера μ^a, не зависящая от начального значения $X_0 = x$, и для любой ограниченной, измеримой по Борелю функции g и для любого начального значения x,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathsf{E}_x^a g(X_t)dt = \int g(y)\mu^a(dy).$$

Теорема 1. «Функция» (константа) выигрыша r в рассматриваемой модели равна

$$r = \mu.$$

Она достигается, во всяком случае, на любой эргодической стратегии $a(\cdot)$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}^a X_t}{t} = 0. \tag{6}$$

Стоит отметить, что для эргодических стратегий условие (6) обычно выполняется, хотя формально в определение не входит; более того, обычно в таком случае числитель $\mathsf{E}^a X_t$ ограничен. Вопрос о том, существуют ли неэргодические стратегии, на которых супремум (4) достигается, не обсуждается: представляется, что такую возможность не следует исключать, хотя для ее реализации класс стратегий, возможно, следует расширить, включив некоторые функции, зависящие от времени; такие стратегии в настоящей работе не рассматриваются. Отметим, что так же обычно поступают и в задачах неэргодического управления (см., например, [5]).

Показательны следующие примеры. Напомним, что во всех случаях $M > \mu$.

Пример 1. Выберем произвольное $x_0 \geqslant 0$ и стратегию $a(\cdot)$ вида

$$a(x) = M\,1(x > x_0).$$

В условиях модели имеем экспоненциальную сходимость (см., например, [2]), единственную инвариантную меру μ^a, причем последняя интегрирует любую степенную функцию.

а) **Случай $M = 2\mu$.**

Предложение 1. В данном примере $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Доказательство см. в Приложении.

б) **Случай $M > 2\mu$.**

Предложение 2. В этом случае снова имеем $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Доказательство см. в Приложении.

в) **Случай $M = C\mu$, $C > 1$.**

Предложение 3. В этом случае снова имеем $r = \mu$. Одна из оптимальных стратегий имеет вид

$$a(x) = M\, 1(x > x_0); \quad x_0 \geqslant 0 \text{ произвольно.}$$

Доказательство см. в Приложении после доказательства Предложения 4, которое удобно обосновать раньше.

Во всех случаях полезно следующее уравнение на стационарную плотность; только случай $M \geqslant 2\mu$ может быть исследован без этого уравнения, лишь на основе использования симметрии.

Предложение 4. Пусть снос имеет вид

$$b(x) = \mu - a(x), \quad \text{где} \quad a(x) = C\mu 1(x > x_0),\ C > 1.$$

Тогда стационарная плотность $p(\cdot)$ удовлетворяет уравнению стационарности

$$\mathcal{L}^* p(x) = \frac{1}{2}\, p''(x) - (b(x)p(x))' = 0, \quad x \neq x_0, \tag{7}$$

дополненному условием непрерывности в x_0

$$p(x_0-) = p(x_0+) =: p(x_0). \tag{8}$$

Доказательство см. в Приложении.

Напомним, что ни для нахождения цены r, ни для построения оптимальной стратегии эргодическое уравнение Беллмана выше не применялось, что не означает, что его нельзя использовать в данной модели. В следующем разделе будет продемонстрировано, как это сделать, хотя и без претензии на полную строгость.

3. Об эргодическом уравнении Беллмана

Эргодическое уравнение Беллмана

$$\sup_{a\in[0,M]}\left[(\mu-a)V'(x)+\frac{1}{2}V''(x)+a-\rho\right]=0 \tag{9}$$

может быть использовано для построения оптимальной стратегии (см. [3, 4, 8]). Его решением является пара $(V(\cdot),\rho)$. Известен ряд близких моделей (см. [3, 4, 8]), для которых решение уравнения (9) существует в классе пар, где r является константой и где функция V растет не быстрее некоторого полинома и имеет две соболевские производные, локально интегрируемые в L_p при любом $p>1$. Более того, компонента ρ определена единственным образом и совпадает с «константой выигрыша r», тогда как вспомогательная функция V единственна с точностью до произвольной аддитивной постоянной. По этой причине представляется разумным исследовать уравнение (9) и для данной постановки.

Заметим, что тут имеется решение

$$V(x)=x,\quad \rho=\mu,$$

что легко проверяется[6]: $x'\equiv 1$ и $\mu-a+a-\mu=0$.

При использовании уравнения Беллмана отдельной задачей является проверка того, что в данном случае компонента ρ совпадает с «постоянной выигрыша» r. Здесь это может быть сделано с помощью рассуждений, основанных на формуле Ито (см. [3, 4]). Правда в данной ситуации это излишне, поскольку в предыдущих разделах уже строго установлено, что $r=\mu$; стало быть, и $\rho=\mu=r$.

Далее, если решение (V,ρ) найдено, то оптимальная стратегия может быть построена в форме

$$\bar a(x)\in\operatorname*{Argsup}_{0\leqslant a\leqslant M}\left[(\mu-a)V'(x)+\frac{1}{2}V''(x)+f(a,x)-\rho\right], \tag{10}$$

где в рассматриваемой модели $f(a,x)\equiv a$, так что на самом деле

$$\bar a(x)\in\operatorname*{Argsup}_{0\leqslant a\leqslant M}\left[a(1-V'(x))\right].$$

В частности, в [8] справедливость (9) и (10) показана для одномерных управляемых диффузий при условии «почти-монотонности» на функцию f. В настоящей работе это условие не обсуждается, поскольку оно просто не выполнено. В то же время, уравнения (9)–(10) могут быть использованы в виде

[6] Здесь лишь устанавливается, что это решение без проверки единственности; последнее можно вывести из общих свойств уравнения Пуассона «во всем пространстве».

«обоснованной догадки», даже без строгого обоснования. Согласно (10), любая оптимальная стратегия должна иметь следующую структуру:

$$a^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } V'(x) > 1, \\ M, & \text{если } V'(x) < 1, x > 0, \\ \text{любое } a \in [0, M], & \text{если } V'(x) = 1, x > 0. \end{cases}$$

В данном случае $V'(x) \equiv 1$. Следовательно, рецепт уравнения Беллмана подсказывает, что оптимальной будет любая стратегия $\bar{a}(\cdot)$ со значениями во множестве $[0, M]$, если только функция $\bar{a}(\cdot)$ измерима по Борелю и является эргодической, в частности, она должна удовлетворять условию (6), а также ограничению (2). Повторим, что строгое обоснование ответа, полученного таким путем, – как величины ρ, так и стратегий, претендующих на оптимальность, – без предыдущего раздела осталось бы под вопросом. Этот раздел был призван лишь показать, что в рассматриваемой модели метод эргодического уравнения Беллмана также приводит к аналогичным результатам, хоть и в отсутствие достаточной строгости. Тем не менее, это можно считать полезным дополнением к предыдущему разделу.

4. Заключение

Данная работа теоретическая, с возможностью приложений к управлению рисками. Постановка задачи относится к оптимизации управляемого диффузионного процесса специального вида в стационарных режимах.

Во-первых, в данной постановке немного неожиданно оказалось, что несложно найти оптимальную цену (средний выигрыш) $r = \mu$, используя весьма общие аргументы и при довольно общих предположениях. Интуитивно, это равенство следует из «устойчивости» системы, которая невозможна, если это равенство нарушается.

Во-вторых, тут есть целый класс оптимальных эргодических марковских стратегий простой структуры, а именно, в форме $a(x) = c\mu 1(x > x_0)$, или $a(x) = c\mu 1(x \geqslant x_0)$, при любом $x_0 \geqslant 0$, и даже при любом $x_0 \in \mathbb{R}$. При них при всех имеет место потраекторно единственное сильное решение соответствующего СДУ. Разумеется, есть и множество более сложно устроенных оптимальных эргодических стратегий. Их полное описание не входит в цели данной работы Довольно любопытно, что такая их конструкция не требует обязательного обращения к уравнению Беллмана, «обычно» являющегося одним из основных технических инструментов в стохастических оптимизационных задачах.

В-третьих, в данной проблеме эргодическое уравнение Беллмана допускает простое решение, на базе «обоснованной догадки». Решение этого уравнения подтверждает и дополняет ранее сделанные выводы относительно оптимальных стратегий, хотя сам подход, основанный на этом уравнении в данном случае не претендует на полную строгость.

В-четвертых, как вспомогательное средство, тут оказалось возможным строго обосновать «условия непрерывной склейки» для стационарной плотности, соответствующей любой такой простой оптимальной стратегии. Этот весьма важный технический прием часто встречается в подобных задачах и не всегда допускает формальное обоснование; здесь это оказалось возможно. Данное соображение может оказаться полезным и в других ситуациях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство Предложения 1, случай $M = 2\mu$

Выберем

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Тогда снос СДУ имеет вид

$$\mu - a(x) = \mu\, 1(x \leqslant x_0) - \mu\, 1(x > x_0).$$

Это симметричный случай, в котором «очевидно», что процесс проводит в среднем половину времени на $(-\infty, x_0]$, и половину времени на (x_0, ∞). Следовательно, при такой стратегии средний доход будет равен

$$r^a = 0 * 1/2 + 2\mu * 1/2 = \mu.$$

Тот факт, что $r = \mu$, следует из Теоремы 1. Также отметим, что тут несложно вычислить стационарную плотность с сингулярностью ее производной в x_0: она имеет вид

$$p(x) = p(x_0)[\exp(\mu(x - x_0))\ 1(x \leqslant x_0) + \exp(-\mu(x - x_0))\ 1(x > x_0)],$$

где из условия нормировки можно найти, что $p(x_0) = \mu/2$.

Доказательство Предложения 2, случай $M > 2\mu$

Тут, хоть выбор $a(x) = M\ 1(x > x_0)$ и выглядит более, чем естественным, тем не менее, чтобы свести задачу к предыдущему примеру[7], можно снова выбрать

$$a(x) = 2\mu\, 1(x > x_0).$$

Тогда снос снова равен

$$\mu - a(x) = \mu\, 1(x \leqslant x_0) - \mu\, 1(x > x_0),$$

и, значит, снова получаем

$$r = r^a = 0 * 1/2 + 2\mu * 1/2 = \mu.$$

Доказательство Предложения 4

Здесь будут обоснованы уравнения стационарности (7)–(8), что вполне естественно поместить перед доказательством случая $M = c\mu$ с $c > 1$ в примере.

[7] Как известно, математики любят так делать.

1. Начнем с уравнения (7). Рассмотрим произвольную гладкую (C_0^∞) тест-функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую условию $\psi(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности x_0. Запишем «тождество стационарности»:

$$\mathsf{E}_\mu \psi(X_t) = \int \psi(y)\mu(dy), \quad \forall\, t > 0, \tag{П.1}$$

где μ – стационарная вероятностная мера. Напомним, что ее единственность уже известна, в силу оценки скорости сходимости (cf. [2]). По формуле Ито имеем,

$$\mathsf{E}_\mu \psi(X_t) = \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \mathsf{E}_\mu \int\limits_0^t L\psi(X_s)ds =$$

$$= \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_s)ds = \mathsf{E}_\mu \psi(X_0) + \int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_0)ds.$$

В силу равенства (П.1), заключаем, что

$$\int\limits_0^t \mathsf{E}_\mu L\psi(X_0)ds \equiv 0$$

и, значит,

$$\mathsf{E}_\mu L\psi(X_0) = \int L\psi(y)\mu(dy) = 0.$$

Это можно записать в виде

$$\langle L\psi, \mu\rangle = \langle \psi, L^*\mu\rangle = 0.$$

В свою очередь, это эквивалентно формальному тождеству

$$L^*\mu(dy) = 0 \quad \text{на множестве } (y:\, y \neq x_0).$$

Следовательно, для стационарной плотности имеем уравнение

$$L^*p(y) = 0 \quad \text{на множестве } (y:\, y \neq x_0).$$

NB: Это уравнение не утверждается в x_0, поскольку и снос b, и производная плотности p' имеют скачки в этой точке. Именно поэтому рассматриваются тест-функции ψ, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности x_0; таким образом, тождества $L^*\mu(dy) = 0$ и $L^*p(y) = 0$ устанавливаются лишь вне x_0. Другими словами, имеются «хорошие», корректно определенные ОДУ на плотность p на интервалах $(-\infty, x_0)$ и на (x_0, ∞), см. (П.6) и (П.7) ниже[8] в подразделе «Доказательство Предложения 3, случай $M = c\mu$, $c > 1$». Их

[8] В этих рассуждениях замкнутого круга нет.

решения обладают классическими производными на $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ и заведомо обладают правыми и левыми пределами в точке x_0, обозначаемые как $p(x_0\pm)$.

Таким образом, уравнение (7) обосновано.

2. Далее, следующий шаг состоит в том, чтобы проверить уравнение (8). Допустим, что (8) не выполнено, а, на самом деле,

$$p(x_0-) \neq p(x_0+).$$

Предположим, что $p(x_0-) > p(x_0+)$. Противоположный случай $p(x_0-) < < p(x_0+)$ может быть рассмотрен аналогично. Используем так называемый «гидродинамический подход» из теории массового обслуживания. Заметим, что в стационарном режиме «вероятностная масса» в точке x за инфинитезимально малое время δ перераспределится приблизительно как гауссовское распределение $\mathcal{N}(x, \sigma(x)^2\delta)$ с центром в x и малой дисперсией, пропорциональной δ (в данном случае $\sigma(x) \equiv 1$), независимо от конкретных значений сноса, во всяком случае, пока снос остается ограниченным (более точно, это асимптотическое утверждение с малым возмущением порядка $O(\delta)$, вызванным сносом; еще более точно, это будет $\approx \mathcal{N}(x + b(x)\delta, \sigma(x)^2\delta)$; при этом типичный разброс вокруг x, вызванный винеровским процессом, будет иметь порядок $\sqrt{\delta} \gg \delta$). Итак, ввиду асимптотической пренебрежимости воздействия сноса на эволюцию процесса на малых временах по сравнению с действием диффузионной части, приблизительно половина этой массы распространится направо от этой точки, а половина – налево от нее. Оказывается, что, во всяком случае, благодаря существованию левого предела $p(x)$ в x_0, та инфинитезимально малая часть общей вероятностной массы из полуоси $x < x_0$, которая перейдет на полуось $x > x_0$ за малое время δ, будет приближенно пропорциональна величине $p(x_0-)(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{\delta}))$. Ниже это строго обосновано в лемме 1. Совершенно аналогично, инфинитезимально малая часть общей вероятностной массы $x > x_0$, которая перейдет на полуось $x < x_0$ за малое время δ, будет приближенно пропорциональна величине $p(x_0+)(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{\delta}))$. Значит, для стационарного режима из этого будет следовать, что

$$p(x_0-) = p(x_0+),$$

что и требовалось. Отметим, что для этого вывода никакая конкретная форма плотности p на $x < x_0$ и на $x > x_0$ не является существенной, лишь бы только эта плотность была ограничена и имела правый и левый пределы в x_0. Сформулируем это в виде леммы. Без ограничения общности, можем и будем считать, что $x_0 = 0$.

Лемма 1. В условиях теоремы, «вероятностная масса», которая перейдет с левой полуоси $x < 0$ на правую полуось $x > 0$, имеет вид

$$S_1 = \frac{p(0-)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\delta} + o(\delta), \tag{П.2}$$

и «вероятностная масса», которая с правой полуоси $x > 0$ перейдет на левую полуось $x < 0$, имеет вид

$$S_2 = \frac{p(0+)}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\delta} + o(\delta) \tag{П.3}$$

при $\delta \to 0$.

Доказательство леммы 1. Собственно говоря, вероятностная масса, которая перейдет с $\mathbb{R}_-$ на $\mathbb{R}_+$ за время δ, задается точным выражением

$$S_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1(X_\delta > 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1\Bigg(\overbrace{x + W_\delta + \underbrace{\int\limits_0^\delta b(X_s)ds}_{=O(\delta)} > 0}^{W_\delta > -x - O(\delta)}\Bigg).$$

Здесь $O(\delta)$, очевидно, является случайным; однако во всяком случае, эта величина удовлетворяет оценке

$$|O(\delta)| \leqslant \mu(1 \vee (C-1))\delta.$$

Поэтому можно оценить S_1 сверху, заменяя эту с.в. $O(\delta)$ на $-(C-1)\mu$ и μ соответственно. На самом деле, асимптотики при $\delta \to 0$ в обеих оценках будут очень похожи. Поэтому покажем лишь одну выкладку, используя то же обозначение $O(\delta)$, как если бы эта величина была неслучайной[9]. Итак, с такими предосторожностями в уме, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx\,\mathsf{E}_x 1(W_\delta > -x - O(\delta)) = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-x-O(\delta)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{y^2}{2\delta}} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x+O(\delta)}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx \int\limits_{-\frac{x+O(\delta)}{\sqrt{\delta}}}^{-\frac{x}{\sqrt{\delta}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \tag{П.4}$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^{0} p(x)dx \pm O(\sqrt{\delta}) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} p(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+O(\delta))^2}{2\delta}} dx}_{=o(1)}.$$

[9] Более строго, надо было бы предпринять два отдельных вычисления, одно с $O(\delta) = \mu\delta$, и другое с $O(\delta) = -(C-1)\mu\delta$; одно дало бы оценку на S_1 сверху, а другое – на то же S_1 снизу. Асимптотические значения для обеих оценок получились бы одинаковыми, как показано в (П.2).

Здесь второй член есть $o(\sqrt{\delta})$, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Для первого имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \left(\int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^0 p(x)dx \mp z\sqrt{\delta}\, p(0-) \right) =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\delta}\, p(0-) \int\limits_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=\sqrt{\delta}\, p(0-)/\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\delta} \int\limits_0^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \left(\frac{1}{z\sqrt{\delta}} \int\limits_{-z\sqrt{\delta}}^0 p(x)dx - p(0-) \right).$$

В свою очередь тут подынтегральное выражение во втором слагаемом ограничено интегрируемой функцией и сходится к нулю для всякого $z > 0$. Поэтому снова по теореме Лебега о мажорируемой сходимости все второе слагаемое есть $o(\sqrt{\delta})$.

Объединяя все найденные выше оценки, находим, что

$$S_1 = \frac{p(0-)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta}), \quad \delta \downarrow 0,$$

что и требовалось. Асимптотическое равенство (П.2) доказано.

Уравнение (П.3) следует из подобной выкладки, начиная с интеграла

$$S_2 = \int\limits_0^\infty p(x)dx \, \mathsf{E} \int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{(y-(x-O(\delta)))^2}{2\delta}} dy$$

с использованием аналога вычисления, приведшего к (П.4). Остальное аналогично, и детали оставляем читателю. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству уравнения (8), видим теперь, что предположение $p(x_0-) > p(x_0+)$ означало бы, что больше вероятностной массы перешло бы слева направо, чем обратно. Однако в стационарном режиме эти два «потока» должны быть сбалансированы, поэтому предположение $p(x_0-) \neq p(x_0+)$ ведет к противоречию. Следовательно, должно выполняться равенство (8). По существу, в доказательстве использовалось лишь, что плотность p существует, имеет правый и левый пределы в x_0, и что диффузионный коэффициент есть ненулевая постоянная[10].

Доказательство Предложения 3, случай $M = c\mu$, $c > 1$

Оказывается, не обязательно выбирать снос симметричным. Положим

$$a(x) = M \; 1(x > x_0).$$

[10] Правдоподобно, что аналогичный результат справедлив также для невырожденного коэффициента диффузии, непрерывного по Гельдеру.

Найдем стационарную плотность $p(\cdot)$. Обозначим ее значение в x_0 через $p(x_0)$. Ради удобства читателя, напомним уравнение стационарности на обеих полуосях $x > x_0$ и $x < x_0$:

$$\mathcal{L}^* p(x) = \frac{1}{2}\, p''(x) - (b(x)p(x))' = 0, \quad x \neq x_0, \tag{П.5}$$

где $b(x) = -(C-1)\mu$ при $x > x_0$ и $b(x) = \mu$ при $x < x_0$, дополненное условием непрерывности в x_0,

$$p(x_0-) = p(x_0+) =: p(x_0),$$

установленным в Предложении 4, см. (8).

1) При $x > x_0$ имеем

$$p'' + \gamma_1 p' = 0, \quad x > x_0, \quad \gamma_1 = (C-1)\mu > 0. \tag{П.6}$$

Легко найти решение и также легко проверить, что решением является функция

$$p(x) = p(x_0)e^{-\gamma_1(x-x_0)}, \quad x > x_0.$$

2) При $x < x_0$ имеем уравнение

$$p'' - \gamma_2 p' = 0, \quad x < x_0, \quad \gamma_2 = \mu > 0. \tag{П.7}$$

Аналогично случаю (П.6), находим

$$p(x) = p(x_0)e^{\gamma_2(x-x_0)}, \quad x < x_0.$$

Из условия нормировки получаем

$$1 = p(x_0)\left(\int_0^\infty e^{-\gamma_1 x}dx + \int_0^\infty e^{-\gamma_2 x}dx\right) = p(x_0)\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

так что

$$p(x_0) = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}.$$

Следовательно, стационарные вероятности процессу быть слева и справа от $x_0 = 0$ равны, соответственно,

$$p_+ = \int_0^\infty p_0 e^{-\gamma_1 x}dx = \frac{p_0}{\gamma_1} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\cdot\frac{1}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} = \frac{\mu}{(C-1)\mu+\mu} = \frac{1}{C}$$

и

$$p_- = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} = \frac{(C-1)\mu}{(C-1)\mu+\mu} = \frac{C-1}{C}.$$

Значит, средний доход при такой стратегии равен

$$p_- \cdot 0 + p_+ \cdot C\mu = \mu,$$

что и требовалось.

Отметим еще, что для стратегии $a(x) = c\mu\ 1(x > x_0)$ при условии $1 < c \leqslant \leqslant M/\mu$ доход также равен μ. Действительно, это следует в точности из тех же выкладок, с одной лишь заменой C на c.

Доказательство Теоремы 1

Первое доказательство. Для любой эргодической стратегии $a(\cdot)$ имеем согласно уравнению (1),

$$\mathsf{E}_x^a X_T - x = \mathsf{E}^a \int\limits_0^T (\mu - a(X_s))ds.$$

Теперь разделим обе части этого равенства на t, и устремим $t \to \infty$. В силу условия (6) получаем существование предела

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathsf{E}^a \int\limits_0^T (\mu - a(X_s))ds = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathsf{E}^a \int\limits_0^T a(X_s)ds = \mu.$$

Таким образом, получаем равенство (5)

$$r = \mu.$$

Второе доказательство. Пусть $a(\cdot)$ – произвольная эргодическая стратегия. Известно [6, 7], что в этом случае существует единственная инвариантная вероятностная мера μ^a, и справедлив закон больших чисел (ЗБЧ) в виде

$$\frac{\int_0^T a(X_s)ds}{T} \to \mathsf{E}^{a,inv} a(X_0),\ t \to \infty, \quad \mathsf{P}^a - \text{п.н.}, \tag{П.8}$$

где $\mathsf{E}^{a,inv} a(X_0) \equiv \int a(y)\mu^a(dy)$ – интеграл по инвариантной мере, соответствующей этой стратегии, и также

$$\frac{\mathsf{E}^a \int_0^T a(X_s)ds}{T} \to \mathsf{E}^{a,inv} a(X_0), \quad T \to \infty, \tag{П.9}$$

согласно принятому определению эргодичности. Если предположить, что $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) < \mu$, то в силу (П.8) процесс оказался бы транзиентным, уходящим на $+\infty$, поскольку в этом случае положительный доход μT, гарантированный постоянной мгновенной премией μ, за большое время T оказался бы намного больше, чем «потери» $\int_0^T a(X_s)ds$. Случай $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) > \mu$ при наложенных предположениях также невозможен. Действительно, в этом случае процесс должен был бы уходить на $-\infty$ в силу того же ЗБЧ (П.8), что запрещено ограничением (2). Следовательно, эргодичность влечет за собой равенство $\mathsf{E}^{a,inv}a(X_0) = \mu$. Также, в силу (П.9) имеет место равенство (5). □

Замечание 1. Заметим, что с логической точки зрения одного доказательства достаточно[11]. Тем не менее, эти два метода показывают различные подходы, которые могут оказаться полезны в более сложных ситуациях[12]. Еще один, более стандартный метод показан в следующем разделе. Будучи в данном случае не вполне строгим, он, тем не менее, демонстрирует, что тут нет противоречия между разными подходами. Само уравнение (9) будет решено с использованием некоторой догадки. При этом проверка решения тривиальна, и описание всех эргодических (не зависящих явно от времени) оптимальных стратегий будет повторено на его основе.

Решение эргодического уравнения Беллмана

Решим уравнение Беллмана (9), как было сказано, немного нестрого в том, что компонента $\rho = \mu$ считается уже найденной. Не ограничивая общности, будем считать, что $x_0 = 0$, хотя любые другие значения x_0 также возможны.

Итак, при $x < 0$ имеем уравнение

$$V''(x) + \mu V'(x) - \rho = 0 \quad \text{т.е.,} \quad V''(x) + \mu V'(x) = \rho, \quad x < 0.$$

Частное решение имеет вид $V_p(x) = \frac{\rho}{\mu}x$, а общее решение ОДУ с нулевой правой частью $(V'' + \mu V' = 0)$ имеет вид $V_g(x) = C_1 + C_2 e^{-\mu x}$. Значит, при $x < 0$ получаем

$$V_1(x) = V_p(x) + V_g(x) = C_1 + C_2 e^{-\mu x} + \frac{r}{\mu}x.$$

[11] Известно почему А.Н. Колмогоров, будучи студентом, предпочел математику истории. Он написал историческое эссе с аргументацией относительно вопросов землевладения в XV в., и его профессор, историк С.В. Бахрушин, сказал ему, что в истории одного доказательства не достаточно: надо, по крайней мере, пять. В то время Колмогоров параллельно изучал математику, и он сказал самому себе, что в математике достаточно одного доказательства; поэтому он принял решение оставить историю и сконцентрироваться на математике. Спустя годы его историческое эссе было опубликовано учениками и высоко оценено специалистами-историками: А. Н. Колмогоров, Новгородское землевладение XV века. М.: Физматлит, 1994.

[12] Здесь уместно напомнить кажущийся противоположным совет Леонарда Эйлера: если есть несколько тропинок, возможно, ведущих к решению задачи, то желательно попробовать их все.

Аналогично, при $x > 0$ имеем уравнение

$$V'' + (\mu - M)V' + M - \rho = 0.$$

Его решение, построенное таким же образом, имеет вид

$$V_2(x) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 e^{(M-\mu)x} + \frac{\rho - M}{\mu - M}x, \quad x > 0.$$

Из условий гладкой склейки[13]

$$V_1(0-) = V_2(0+) \quad \text{и} \quad V_1'(0-) = V_2'(0+)$$

находим

$$V_1(0-) = C_1 + C_2 = V_2(0+) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$$

и

$$V_1'(x) = -\mu C_2 e^{-\mu x} + \frac{\rho}{\mu}, \quad x < 0.$$

Далее

$$V_1'(0-) = -\mu C_2 + \frac{\rho}{\mu} = 1$$

и поскольку здесь $\rho = \mu$, то заключаем, что $C_2 = 0$.

Аналогично

$$V_2'(x) = \tilde{C}_2 e^{(M-\mu)x}(M - \mu) + \frac{\rho - M}{\mu - M},$$

откуда имеем

$$V_2'(0+) = \tilde{C}_2(M - \mu) + \frac{\rho - M}{\mu - M} = 1.$$

В силу равенства $\frac{\rho-M}{\mu-M} = 1$, заключаем, что также $\tilde{C}_2 = 0$. Таким образом, $C_1 = \tilde{C}_1 =: C$. Значит,

$$V_1(x) = C + \frac{r}{\mu}x = C + x$$

и аналогично

$$V_2(x) = C + x.$$

Окончательно находим, что

$$V(x) = C + x.$$

[13] Эти условия не обсуждаются. Если с их помощью найдено классическое, или соболевское решение уравнения Беллмана, к которому применима формула Ито после подстановки диффузии в функцию V, то проверка того, что вторая компонента r – решение задачи (4), является стандартной процедурой. По существу, именно это и было сделано в первом доказательстве теоремы 1.

Тот факт, что здесь константа C не может быть определена, не удивителен, поскольку в уравнении Беллмана присутствуют только первые две производные V, но не сама функция V. Следовательно, первая компонента решения определена с точностью до аддитивной постоянной, как и было предсказано.

Подставляя эту *вспомогательную* функцию V в уравнение (10), можно увидеть, что предлагается выбирать произвольную (измеримую по Борелю) функцию $a(x) \in [0, M]$. Не будем забывать, что стратегия должна быть эргодической, и что имеет место условие (2), так что, строго говоря, этот выбор не совсем произволен. Эти заключения хорошо соответствуют ответу, найденному в разделе 3.

Чтобы завершить анализ данной модели, напомним, что с любой ограниченной и измеримой по Борелю стратегией $a(\cdot)$ уравнение (1) имеет потраекторно единственное сильное решение благодарая результатам любой из статей[14] [9–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Taksar M.I.* Optimal Risk and Dividend Distribution Control Models for an Insurance Company // Mathematical Methods of Operations Research. 2000. V. 51. P. 1–42. https://doi.org/10.1007/s001860050001
2. *Веретенников А.Ю.* О полиномиальном перемешивании и скорости сходимости для стохастических разностных и дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1999. Т. 44. № 2. С. 317–321. http://mi.mathnet.ru/tvp766
3. *Arapostathis A., Borkar V.S., Ghosh M.K.* Ergodic Control of Diffusion Processes // Cambridge: Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9781139003605
4. *Anulova S.V., Mai H., Veretennikov A.Yu.* On Iteration Improvement for Averaged Expected Cost Control for One-Dimensional Ergodic Diffusions // SIAM Journal on Control and Optimization. 2020. V. 58. No. 4. P. 2312–2331. https://doi.org/10.1137/19M1271944
5. Крылов Н.В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
6. *Хасьминский Р.З.* Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1960. Т. 5. № 2. С. 196–214. https://www.mathnet.ru/rus/tvp4825
7. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. With contributions by G. N. Milstein and M. B. Nevelson / 2nd completely revised and enlarged ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.
8. *Bensoussan A., Borkar V.* Ergodic control problem for one-dimensional diffusions with near-monotone cost // Systems & Control Letters. 1984. V. 5. No. 2. P. 127–133. https://doi.org/10.1016/0167-6911(84)90021-5
9. *Nakao S.* On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations // Osaka J. Math. 1972. V. 9. P. 513–518.

[14] Эти работы все весьма разные, однако есть общее пересечение, которое и позволяет в данном случае на любую из них сослаться.

https://projecteuclid.org/journals/osaka-journal-of-mathematics/volume-9/issue-3/On-the-pathwise-uniqueness-of-solutions-of-one-dimensional-stochastic/ojm/1200693939.pdf

10. *Звонкин А.К.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос // Матем. сб. 1974. Т. 93(135). № 1. С. 129–149. https://www.mathnet.ru/rus/sm2963
11. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее применен. 1979. Т. 24. № 2. С. 348–360. https://www.mathnet.ru/rus/tvp2867
12. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 3. С. 434–452. https://doi.org/10.1137/1124039

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 27.08.2025

После доработки 27.07.2026

Принята к публикации 11.08.2026