Стохастические системы

© 2026 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ II: ЧИСЛЕННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ[1]

Вторая часть цикла посвящена численному аспекту решения задачи фильтрации состояний специальных марковских скачкообразных процессов по наблюдениям с мультипликативными шумами. Алгоритм вычисления оценки основан на решении задачи оптимальной фильтрации по наблюдениям, дискретизованным по времени. Полученная рекуррентная формула представляет собой некоторый вариант формулы Байеса. В ее числителе и знаменателе присутствуют суммы бесконечных рядов, которые не могут быть вычислены аналитически. В алгоритме предлагается заменить их конечными отрезками и представлено утверждение, характеризующее потерю точности оценивания, возникающую из-за такой замены. Доказана сходимость предложенных аппроксимаций к исходной оптимальной оценке фильтрации по непрерывным наблюдениям при шаге дискретизации, стремящемся к нулю. Качество оценок проиллюстрировано рядом численных примеров.

Ключевые слова: наблюдения с мультипликативными шумами, дискретизованные по времени наблюдения, задача оптимальной фильтрации, аналитическая аппроксимация оценки фильтрации.

DOI: 10.7868/S2413977726120047

1. Введение

В первой части работы [1] исследована задача оптимальной фильтрации состояний класса специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП) по диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами. Решение задачи описывается условной плотностью распределения состояния относительно имеющихся наблюдений. Ее эволюция определяется системой рекуррентно связанных интегро-дифференциальных уравнений и некоторых

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00504).
Численные эксперименты проводились с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

интегральных преобразований. Имеющиеся исходные наблюдения преобразуются в совокупность кусочно-постоянной интенсивности шумов в наблюдениях, наблюдаемой без шума, и диффузионной компоненты с шумами единичной интенсивности. На интервалах постоянства интенсивности шумов условная плотность сосредоточена на некоторых линейных многообразиях и описывается указанными интегро-дифференциальными уравнениями. В случайные моменты скачков интенсивностей эти многообразия, а также условные плотности также изменяются в соответствии с интегральными преобразованиями.

Объект исследований второй части работы включает в себя методы численной реализации решения задачи оптимальной фильтрации состояний исследуемых систем наблюдения и тесно связан с различными вариантами приближенного решения уравнений Кушнера–Стратоновича [2] и Закаи [3].

Схематически, без претензии на исчерпывающий обзор на заявленную тему, следует упомянуть следующие подходы. Прежде всего, они включают в себя различные варианты сеточных методов решения стохастических интегро-дифференциальных уравнений в частных производных [2, 4–6]. Такой подход имеет важное положительное качество – возможность контроля ошибки численного решения путем надлежащего выбора шагов сетки. Однако отрицательные свойства применения сеточных методов также весьма существенны. Прежде всего, это экспоненциальный рост объема вычислений с ростом размерности. Далее, эволюция условной плотности требует использования адаптивной процедуры выбора локализации и шага сетки по пространственным переменным для обеспечения нужной точности аппроксимации. Наконец, указанные методы не всегда являются устойчивыми [2]: в некоторых случаях значение приближенного решения на некоторых узлах сетки становится отрицательным, что приводит к дальнейшему «взрыву» аппроксимации.

Проблема устойчивости данных уравнений решалась путем использования для них робастного преобразования Кларка, а также метода расщепления [7–10]. Преобразование Кларка позволяет перенормировать условную плотность так, чтобы описывающее ее уравнение было бы дифференциальным в частных производных со случайными коэффициентами и не содержало стохастические дифференциалы. Оператор, который позволяет вычислить «слой» – аппроксимацию условной плотности в следующий момент времени, раскладывается в композицию двух операторов. Первый строит прогноз в соответствии с решением уравнения Фоккера–Планка, второй – корректирует плотность в соответствии с поступившими наблюдениями.

Практически одновременно с разработкой сеточных методов был предложен метод, привлекающий аппарат марковских цепей [2, 6, 11]. Он основан на слабой аппроксимации исходной диффузионной системы наблюдения последовательностью марковских цепей с конечным множеством состояний. Как и метод расщепления, он обеспечивает устойчивость вычисления аппроксима-

ции условных распределений, но так же как и представленные выше методы чувствителен к высокой размерности систем наблюдения.

Частично эту проблему удается решить, вычисляя аппроксимации распределения как элемента параметрически заданного семейства (например экспоненциального) или проектируя распределение на некоторое функциональное подпространство. Проекционные и спектральные алгоритмы решения уравнений оптимальной нелинейной фильтрации [12–17] относятся к этому классу. Аппроксимации плотностей определяются решением стохастических дифференциальных систем (СДС), описывающих эволюцию параметров распределения. Действительно, они дают возможность несколько повысить размерность обрабатываемых систем наблюдения и при этом обладают свойством устойчивости. В то же время у подобных методов сложно контролировать обеспечиваемую ими точность.

Численное решение уравнений Кушнера–Стратоновича и Закаи в той или иной степени связано с операцией численного интегрирования, трудоемкость выполнения которой критически зависит от размерности области интегрирования. Существует метод, свободный от этой зависимости – метод Монте-Карло. Он служит основой алгоритма частиц для численного решения задач оптимальной фильтрации [10, 18–20]. Исходная непрерывная система наблюдения дискретизуется по времени, и для преобразованной системы выписываются рекуррентные интегральные соотношения, описывающие эволюцию условного распределения [21]. Оно определяется своей плотностью относительно специально сконструированного распределения значимости, порождаемого генерируемым пучком случайных частиц. Эти частицы одновременно выполняют роль случайной сетки, расположение которой “привязано” к искомому условному распределению, а также участвуют в вычислении интегралов в формулах пересчета распределений методом Монте–Карло. Проблема применения фильтров частиц кроется в сложности процедуры обновления пучка частиц при вырождении их весов, а также в проблеме определения точности аппроксимации соответствующих оценок фильтрации.

Методы машинного обучения последнее время широко используются для решения прикладных задач оптимальной нелинейной фильтрации [10, 20, 22]. Их привлечение также связано с проблемой проклятия размерности. Исходная СДС наблюдения обычно дискретизуется по времени, и для преобразованной системы строятся рекуррентные нейронные сети различных типов, направленные на оценивание полезных сигналов – функционалов от искомого распределения: среднего значения, дисперсий, квантилей и пр. В качестве обучающих выборок выступают сгенерированные траектории системы наблюдения. Действительно, собственно процесс обработки каждой траектории наблюдений уже обученной сетью, занимает незначительное время. Тем не менее у данного подхода существует ряд существенных недостатков. Во-первых, время обучения сети весьма значительно, требует большого числа ресурсов и зависит от вида системы наблюдения. Во-вторых, предложенный подход чувствителен к априорной неопределенности параметров системы

наблюдения. Сеть, обученная на траекториях номинальной системы, может доставлять оценки низкого качества в случае, если истинные значения параметров системы отличаются от номинальных. В-третьих, поиск условного распределения при данном подходе заменяется на оценивание некоторого конечномерного полезного сигнала. В-четвертых, точность оценок фильтрации, доставляемых нейросетевыми алгоритмами, не подтверждена доказанными формальными утверждениями.

Представленные выше методы численного решения уравнений оптимальной нелинейной фильтрации неприменимы для варианта рекуррентно связанных уравнений Кушнера–Стратоновича (15)–(17) из [1]. Проблема в том, что в этих уравнениях используются преобразования исходных наблюдений. В случае аппроксимации этого преобразования конечно-разностными методами ошибка становится чрезмерной и делает бесполезным дальнейшее использование этой аппроксимации [23]. Дело в том, что условное распределение в данной задаче сосредоточено на линейном многообразии, определенном значением интенсивности шумов. Помимо этого, скачки интенсивности связаны со скачками оцениваемого состояния и не могут быть точно определены допредельными аппроксимациями интенсивности.

Целью второй части работы является представление решения задачи оптимальной фильтрации состояния СМСП по наблюдениям, дискретизованным по времени. Она интересна как самостоятельная прикладная проблема, а также в качестве аппроксимации решения исходной задачи фильтрации по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Подобный подход был использован в [24, 25] для систем наблюдения с МСП с конечным множеством состояний.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена постановка задачи фильтрации по дискретизованным по времени наблюдениям. В разделе 3 дано решение данной задачи – интегральные рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию условной плотности. Эти формулы представляют частный случай решения задачи фильтрации состояний марковских систем наблюдения [21], а по сути – один из вариантов формулы Байеса. Весовые функции, используемые в них, являются сдиг-масштабными смесями гауссиан и имеют сложный вид, недоступный для их прямой численной реализации. Их возможно упростить, сделав предположение, что на отрезке дискретизации по времени оцениваемый СМСП терпит не более чем некоторое фиксированное число скачков. Таким образом, от точного решения задачи фильтрации возможно перейти к *аналитической аппроксимации*. Раздел 3 содержит утверждение, характеризующее потерю точности фильтрации при переходе от точного решения к его аналитической аппроксимации.

В разделе 4 представлено утверждение, описывающее связь оценки фильтрации по дисктеризованным наблюдениям и ее аналитической аппроксимации с оценкой фильтрации из [1]: при уменьшении шага временно́й дискретизации они сходятся к оценке фильтрации состояний СМСП по непрерывным

наблюдениям. По сути, предлагаемые оценки можно трактовать как аппроксимации решения рекуррентно связанных уравнений и интегральных соотношений (15)–(17) из [1].

Раздел 5 посвящен численным экспериментам. В подразделе 5.1 продемонстрировано качество оценок при решении прикладной задачи оценивания качественного состояния и характеристик сетевого канала. Влияние порядка аналитической аппроксимации на точность фильтрации в случае низкочастотных дискретизованных наблюдений продемонстрировано в подразделе 5.2. Подраздел 5.3 посвящен построению высокоточных оценок состояния в случае выполнений условий идентифицируемости [1] при последовательном уменьшении временно́го шага дискретизации наблюдений.

Раздел 6 содержит выводы по работе и заключительные замечания.

В работе используются следующие обозначения:

- $A^{1/2}$ – квадратный корень симметрической матрицы A;
- $\mathbf{1}$ – вектор-строка подходящей размерности, составленная из единиц;
- I – единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{I}(t)$ – единичная ступенчатая функция;
- $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{C}$;
- Λ – матрица интенсивности переходов (МИП) МСП со множеством состояний $\mathbb{S}^N = \{e_1, \ldots, e_N\}$ – набором ортов пространства $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\lambda} \triangleq \triangleq \operatorname{row}(\Lambda_{11}, \ldots, \Lambda_{NN})$ – строка, составленная из диагональных элементов матрицы Λ, а также $\overline{\Lambda} \triangleq \Lambda - \operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda}$; $\boldsymbol{\Lambda} \triangleq \max_{n=\overline{1,N}} |\Lambda_{nn}|$;
- любая функция $f(e, y)$: $\mathbb{S}^N \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(e, y) = \overline{f}(y)e$, где $\overline{f}(y) \triangleq \operatorname{row}(f(e_1, y), \ldots, f(e_N, y))$;
- $\mathsf{E}_f^n \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} f(e_n, y)\Pi^n(dy)$, $\qquad \mathsf{E}_f = \operatorname{col}(\mathsf{E}_f^1, \ldots, \mathsf{E}_f^N) = \int\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{diag}\overline{f}(y)\Pi(dy)$;
- $\mathcal{N}(y, m, K)$ – плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K, взятая в точке y.

2. Постановка задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям

На каноническом базисе с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ Винера–Пуассона [26] рассматривается система наблюдения

$$\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t) = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_0) + \int\limits_0^t [\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}^{\top}(Y_s)\operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda} + \Pi^{\top}(\mathcal{C})\overline{\Lambda}^{\top}]\theta_s du + M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(Z_s)ds + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h^{1/2}(Z_s)dw_s. \tag{2}$$

Здесь

– $Z_t = \mathrm{col}\,(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ – оцениваемое состояние системы – СМСП [1] с МИП Λ, начальным распределением p_0 компоненты θ_0, начальным распределением Π_0, характеризующим начальное состояние Y_0 и распределением Π, характеризующим значения Y_t после первого скачка; (1) представляет собой мартингальное разложение индикаторной функции $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t)$ от СМСП, в котором $M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}$ – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал,
– $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^K$ – дискретизованные по времени с шагом Δ_t диффузионные наблюдения, доступные в моменты времени $t_i = i\Delta_t$, $(i \in \mathbb{N})$, где $\Delta_t > 0$ – шаг по времени; в наблюдениях коэффициенты сноса $g(\cdot)$ и диффузии $h(\cdot)$ являются функциями состояния, а $w_t \in \mathbb{R}^K$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс.

Обозначим через $\mathfrak{O}_i \triangleq \sigma\{\boldsymbol{\xi}_j : \ 0 \leqslant j \leqslant i\}$ естественное семейство σ-алгебр, порожденных дискретизованными диффузионными наблюдениями $\boldsymbol{\xi}_j$.

Задача оптимальной фильтрации заключается в определении условного распределения состояния СМСП Z в моменты времени t_i по совокупности доступных наблюдений $\mathfrak{O}_i$.

Для вывода рекуррентных соотношений, описывающих изменение условного распределения СМСП, необходимо уточнить свойства системы (1), (2).

A. Компоненты распределений $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ абсолютно непрерывны по мере Лебега с плотностями $\pi_0(y) = \mathrm{col}\,(\pi_0^1(y), \ldots, \pi_0^N(y))$ и $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$. При этом носитель $\mathcal{D}$ распределений $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ ограничен и имеет диаметр $\overline{d} \triangleq \sup_{y',y'' \in \mathcal{D}} \|y' - y''\|_1$.

Б. Функция $g(e, y)$ непрерывна по второму аргументу, а также

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} g^{\top}(e_n, y) g(e_n, y) \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) dy < \infty.$$

B. Интенсивность шумов в наблюдениях равномерно не вырождена: существует такая $\alpha > 0$, что для $\forall\, y \in \mathcal{D}$ и $n = \overline{1, N}$

$$h(e_n, y) \geqslant \alpha I.$$

Помимо этого, верно неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \sum_{n=1}^{N} \|h(e_n, y)\|_2 \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) dy < \infty.$$

Ограничения *A*–*B* более мягкие, чем те, которые были предложены для системы наблюдения в непрерывном времени [1]. Они гарантируют существование плотности у искомого условного распределения.

3. Аналитическая аппроксимация оценки фильтрации

Выведем рекуррентные соотношения, описывающие изменение во времени условного распределения состояния системы. Заметим, что последовательность $\{(Z_{t_i}, \boldsymbol{\xi}_i)\}$ обладает марковским свойством относительно последовательности σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{t_i}\}_i$. Если $\widehat{\psi}_{i-1}(y) \triangleq \operatorname{col}(\widehat{\psi}^1_{i-1}(y), \ldots, \widehat{\psi}^N_{i-1}(y))$ – плотность условного распределения $Z_{t_{i-1}}$ относительно $\mathfrak{O}_{i-1}$, т.е. для $\forall\, n = \overline{1,N}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$ выполняется равенство

$$\mathsf{P}\left\{\theta_{t_{i-1}} = e_n, Y_{t_{i-1}} \in \mathcal{A} | \mathfrak{O}_{i-1}\right\} = \int\limits_{\mathcal{A}} \widehat{\psi}^n_{i-1}(y)dy,$$

то условное распределение состояния Z_t, $t \geqslant t_{i-1}$ относительно $\mathfrak{O}_{i-1}$ также имеет плотность $\overline{\psi}(t,y) \triangleq \operatorname{col}(\overline{\psi}^1(t,y), \ldots, \overline{\psi}^N(t,y))$, определяемую решением системы уравнений [27]:

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} \overline{\psi}'_t(t,y) = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})\overline{\psi}(t,y) + \operatorname{diag}(\pi(y))\overline{\Lambda}\int\limits_{\mathcal{D}} \overline{\psi}(t,u)du, & t > t_{i-1}, \\ \overline{\psi}(t_{i-1},y) = \widehat{\psi}_{i-1}(y). \end{cases}$$

Это значит, что для $\forall\, n = \overline{1,N}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $t \geqslant t_{i-1}$

$$\mathsf{P}\left\{\theta_t = e_n, Y_t \in \mathcal{A} | \mathfrak{O}_{i-1}\right\} = \int\limits_{\mathcal{A}} \overline{\psi}^n(t,y)dy.$$

Одновременно с этим наблюдение $\boldsymbol{\xi}_i$ имеет гауссовское распределение при фиксированной траектории СМСП $Z_{[t_{i-1},t_i)}$:

$$\text{(4)} \quad \mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \mathcal{F}^Z_{t_i}\right\} = \mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \mathcal{F}^Z_{[t_{i-1},t_i)}\right\} = \int\limits_{\mathcal{C}} \mathcal{N}\left(u, \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(Z_c)dc, \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h(Z_c)dc\right) du.$$

Отсюда можно заключить, что условное распределение $\boldsymbol{\xi}_i$ относительно Z_{t_i} представляет собой некоторую сдвиг-масштабную смесь гауссиан, а значит, имеет плотность распределения $\eta^n_i(x|u)$:

$$\mathsf{P}\left\{\boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C} | \theta_{t_{i-1}} = e_n,\, Y_{t_i} = u\right\} = \int\limits_{\mathcal{C}} \eta^n_i(x|u)dx.$$

Тогда согласно общей формуле фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21] условное распределение Z_{t_i} относительно $\mathfrak{O}_i$ имеет плотность, определяемую формулами

$$\text{(5)} \qquad \widehat{\psi}^n_i(y) = \frac{\eta^n_i(\boldsymbol{\xi}_i|y)\overline{\psi}^n(t_i,y)}{\sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{D}} \eta^j_i(\boldsymbol{\xi}_i|u)\overline{\psi}^j(t_i,u)du}, \qquad n = \overline{1,N}.$$

Тем не менее рекурсия (3)–(5) неприменима для решения прикладных задач, так как явный вид функций $\eta(\cdot)$ неизвестен.

Обозначим через $R_i = R_i(\omega)$ число скачков Z_t на интервале (t_{i-1}, t_i). В силу марковского свойства пары (Z_t, ξ_t) (ξ_t – исходные наблюдения в непрерывном времени) верно равенство

$$(6)\quad \mathsf{P}\{\theta_{t_i} = e_m, Y_{t_i} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{C}, R_i = r|\mathfrak{O}_{i-1}\} = \\ = \int\limits_{\mathcal{A}} \int\limits_{\mathcal{C}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(x) \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} \varrho^{nm}(y, x, r|u)\widehat{\psi}_{i-1}^{n}(u)dudxdy,$$

где $\varrho^{nm}(y, x, r|u)$ – плотность переходной вероятности, описывающая условное распределение тройки $(Z_{t_i}, \boldsymbol{\xi}_i, R_i)$ при условии $\theta_{t_{i-1}} = e_n$, $Y_{t_{i-1}} = u$.

Зная распределение переходов МСП θ_t и используя формулу полной вероятности, можно получить явный вид данных плотностей:

1) при $r = 0$

$$(7)\qquad \varrho^{nm}(y, x, 0|u) = \delta_{nm}\delta(u - y)e^{\Lambda_{nn}\Delta_t}\mathcal{N}(x, \Delta_t g(e_n, u), \Delta_t h(e_n, u)),$$

2) при $r = 1$

$$(8)\quad \varrho^{nm}(y, x, 1|u) = (1 - \delta_{nm})\pi^m(y) \int\limits_0^{\Delta_t} \Lambda_{nm}e^{\Lambda_{nn}c_1}e^{\Lambda_{mm}(\Delta_t - c_1)} \times \\ \times \mathcal{N}(x, c_1 g(e_n, u) + (\Delta_t - c_1)g(e_m, y), c_1 h(e_n, u) + (\Delta_t - c_1)h(e_m, y))dc_1,$$

3) при $r = 2$

$$(9)\quad \varrho^{nm}(y, x, 2|u) = \\ = \pi^m(y) \sum_{k:n\neq k\neq m} \int\limits_0^{\Delta_t} dc_1 \int\limits_0^{\Delta_t - c_1} dc_2 \Lambda_{nk}e^{\Lambda_{nn}c_1}\Lambda_{km}e^{\Lambda_{kk}c_2}e^{\Lambda_{mm}(\Delta_t - c_1 - c_2)} \times \\ \times \int\limits_{\mathcal{D}} \pi^k(v_1)\mathcal{N}\Big(x, c_1 g(e_n, u) + c_2 g(e_k, v_1) + \\ + (\Delta_t - c_1 - c_2)g(e_m, y), c_1 h(e_n, u) + c_2 h(e_k, v_1) + (\Delta_t - c_1 - c_2)h(e_m, y)\Big)dv_1,$$

4) случай произвольного $r \geqslant 2$. Обозначим через

– $\mathcal{I}_r^{nm}$ – множество таких мультииндексов $\overline{i}_r \triangleq (i_0, i_1, \ldots, i_r)$ длины $r+1$, что $i_0 = n$, $i_r = m$ и для всех $j = \overline{1, r}$ выполнено неравенство $i_{j-1} \neq i_j$,
– $\mathbf{\Pi}_r \triangleq \{\overline{c}_r = \mathrm{col}\,(c_0, \ldots, c_r) : c_j \geqslant 0, j = \overline{0, r}, \sum_{j=0}^{r} c_j = \Delta_t\}$, $\overline{v}_r = \mathrm{col}\,(v_0, \ldots, v_r)$,
– $G(\overline{i}_r, \overline{c}_r, \overline{v}_r) \triangleq \sum_{j=0}^{r} g(e_{i_j}, v_j)c_j$, $\qquad H(\overline{i}_r, \overline{c}_r, \overline{v}_r) \triangleq \sum_{j=0}^{r} g(e_{i_j}, v_j)c_j$.

В этом случае

$$(10)\quad \varrho^{nm}(v_r,x,r|v_0)=\sum_{\overline{i}_r\in\mathcal{I}_r^{nm}}\int\limits_{\mathbf{\Pi}_r} d\overline{c}_r\prod_{j=1}^{r}\Lambda_{i_{j-1},i_j}e^{\sum_{j=0}^{r}\Lambda_{i_{j-1},i_{j-1}}c_{j-1}}\int\limits_{\mathcal{D}^{r-1}}\prod_{j=1}^{r}\pi^j(v_j)\times$$
$$\times\,\mathcal{N}\Big(x,G(\overline{i}_r,\overline{c}_r,\overline{v}_r),H(\overline{i}_r,\overline{c}_r,\overline{v}_r)\Big)dv_1\ldots dv_{r-1}.$$

Из (6) и общей формулы фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21] следует

Теорема 1. Условная плотность распределения Z_{t_i} относительно $\mathfrak{O}_i$ определяется рекуррентным соотношением

$$(11)\qquad \widehat{\psi}_i^m(y)=\frac{\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{nm}(y,\boldsymbol{\xi}_i,r|u)\widehat{\psi}_{i-1}^n(u)du}{\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k,j=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{kj}(q,\boldsymbol{\xi}_i,\ell|p)\widehat{\psi}_{i-1}^k(p)dpdq},\qquad m=\overline{1,N},$$

с начальным условием

$$(12)\qquad \widehat{\psi}_0^m(y)=p_0^m\pi_0^m(y),\qquad m=\overline{1,N}.$$

Очевидно, что рекурсия (11) не может быть непосредственно реализована в виде вычислительной процедуры из-за наличия бесконечных сумм в числителе и знаменателе. Оценка, вычисленная по формуле

$$(13)\quad \overline{\psi}_i^m(y,s)=\frac{\sum_{r=0}^{s}\sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{nm}(y,\boldsymbol{\xi}_i,r|u)\overline{\psi}_{i-1}^n(u,s)du}{\sum_{\ell=0}^{s}\sum_{k,j=1}^{N}\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}}\varrho^{kj}(q,\boldsymbol{\xi}_i,\ell|p)\overline{\psi}_{i-1}^k(p,s)dpdq},\qquad m=\overline{1,N},$$

называется *аналитической аппроксимацией условной плотности порядка s.*

В качестве показателя локальной точности аппроксимации – точности аппроксимации оценки фильтрации на одном шаге – используется величина

$$(14)\qquad \sigma(s)\triangleq\sup_{p_0,\pi_0}\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_1-\overline{Z}_1(s)\|_1\right\},$$

где супремум берется по всем возможным дискретным вероятностным распределениям $p_0=(p_0^1,\ldots,p_0^N)$ на $\mathbb{S}^N$ и всем непрерывным распределениям $\pi_0(y)=\operatorname{col}(\pi_0^1(y),\ldots,\pi_0^N(y))$ с носителем $\mathcal{D}$. Данная величина представляет верхнюю границу $\mathcal{L}_1$-отклонения аппроксимации от оптимальной оценки, которое образуется на одном шаге рекурсии при старте из одного и того же начального условия.

В качестве показателя глобальной точности – точности аппроксимации на q шагах – используется величина

$$(15)\qquad \Sigma_q(s)\triangleq\sup_{p_0,\pi_0}\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_q-\overline{Z}_q(s)\|_1\right\}.$$

Она представляет верхнюю границу $\mathcal{L}_1$-отклонения аппроксимации от оптимальной оценки, которое образуется за q шагов рекурсии при старте из одного и того же начального условия.

Теорема 2. Для показателей точности верны следующие оценки:

$$\sigma(s) \leqslant (2+\overline{d})C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}, \tag{16}$$

$$\Sigma_q(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^q\right), \tag{17}$$

где $0 < C_1 = C_1(\mathbf{\Lambda}\Delta_t, s) \in (0,1)$ *– некоторый параметр.*

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 1. Исследуем предельное поведение правой части неравенства (17). Прежде всего зафиксируем момент времени T и рассмотрим поведение верхней границы точности при $\Delta_t \downarrow 0$. В этом случае $q = \frac{T}{\Delta_t}$. Используя неравенство Бернулли, можно получить консервативную оценку сверху для $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$, более простую для анализа:

$$\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^{\frac{T}{\Delta_t}}\right) \leqslant \underbrace{\frac{(2+\overline{d})C_1\mathbf{\Lambda}^{s+1}}{(s+1)!}T}_{\triangleq C_2(T,s)} \times \Delta_t^s. \tag{18}$$

Неравенство (18) по смыслу сродни оценкам точности методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), например метода Эйлера–Маруямы [28]: глобальная ошибка метода численного интегрирования СДУ также характеризуется степенью шага временно́й дискретизации Δ_t.

Далее, зафиксируем шаг Δ_t и рассмотрим поведение верхней границы для $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$ при $T \to \infty$:

$$\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s) \leqslant (2+\overline{d})\left(1-\left(1-C_1\frac{(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^{\frac{T}{\Delta_t}}\right) \to (2+\overline{d}), \tag{19}$$

причем эта сходимость показательная. Снизить скорость роста верхней границы возможно, увеличивая степень s аналитической аппроксимации. При этом снижение будет происходить не только за счет повышения степени сомножителя $(\mathbf{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}$, но и за счет факториала $(s+1)!$ в знаменателе, а также за счет того, что функция $C_1 = C_1(\mathbf{\Lambda}\Delta_t, s)$ убывает по s (см. явный вид $C_1(\cdot)$ в доказательстве теоремы 1).

Замечание 2. В качестве полезного сигнала, характеризующего точность аналитической аппроксимации, используется состояние Z_t. При этом константа $2+\overline{d}$ в неравенствах (16) и (17) представляет собой диаметр множества $\mathbb{S}^n \times \mathcal{D}$ возможных значений Z_t. На практике интерес может представлять оценивание произвольной функции $f(Z_t)$ состояния. В этом случае неравенства (16) и (17) будут иметь аналогичный вид, но вместо $2+\overline{d}$ должен

использоваться $\overline{d}^f$ – диаметр множества возможных значений функции $f(\cdot)$:

$$\overline{d}^f \triangleq \sup_{\substack{e',e''\in\mathbb{S}^n,\\ y',y''\in\mathcal{D}}} \|f(e',y') - f(e'',y'')\|_1.$$

Замечание 3. Ошибка аналитической аппроксимации, возникающая из-за ограниченности сумм в (13), не единственная. Собственно, термин *«аналитическая»* подчеркивает то, что одна формула заменена другой. Получение интегралов в числителе и знаменателе (13) с помощью тех или иных схем численного интегрирования порождает дополнительные ошибки. Нахождение оценки связано с вычислением не только интегралов в числителе и знаменателе (13), что является традиционным для фильтрации частично наблюдаемых марковских последовательностей [21], но и интегралов, определяющих переходные ядра $\varrho(y,x,r|u)$. Влияние использования различных схем интегрирования при вычислении $\varrho(y,x,r|u)$ на общую ошибку в случае фильтрации состояний МСП с конечным множеством состояний исследовано в [25]; соответствующие результаты могут быть распространены и на случай СМСП. Для приближенных оценок, вычисляемых с помощью той или иной схемы численного интегрирования, в [25] предложен термин «численная аппроксимация».

Характеризация ошибок, возникающих при вычислительной реализации формулы (13), является нетривиальной задачей. Дело в том, что сама по себе рекурсия подразумевает единообразное вычислительное представление условной плотности $\widehat{\psi}_i(y)$ для разных моментов времени t_i. С одной стороны, оно должно быть достаточно простым, чтобы позволять эффективно выполнять операции в (13), с другой – описывать широкий класс быстроменяющихся функций. Одним из вариантов является представление $\widehat{\psi}_i(y)$ как элемента экспоненциального семейства плотностей с последующим использованием аппарата проекционных фильтров [15, 29]. Недостатком данного подхода является его алгоритмическая сложность: помимо операций в (13) на каждой итерации необходимо «проецировать» полученную оценку на экспоненциальное семейство. Другой вариант заключается в сеточном представлении $\widehat{\psi}_i(y)$. Он легко реализуется, однако требует большого количества памяти для хранения значения плотности. Помимо этого, при практической реализации алгоритма с фиксированной сеткой возникают эффекты вырождения аппроксимации плотности: она сосредотачивается в областях, сравнимых с шагом дискретизации по пространству. Такая ситуация является типичной в случае, если система наблюдения допускает высокую точность построения оценок состояния. Выходом из такой ситуации является либо разработка устойчивых методов вычисления плотностей, либо адаптация шага сетки. Точность интегрирования функций, определенных на сетке, зависит от их гладкости, т.е. поведения старших производных. Плотность распределения может обладать осциллирующим характером, т.е. иметь производные с большими абсолютными значениями. Требование высокой точности ведет к

значительному усложнению схем численного интегрирования [30, 31]. Характеризация влияния конкретных схем интегрирования на итоговую точность оценок фильтрации, определенных формулой (13), является целью перспективных исследований и в данной работе не рассматривается.

Замечание 4. Аналитические аппроксимации (13) являются *устойчивыми*: с вероятностью 1 они неотрицательны и удовлетворяют условию нормировки.

4. Связь с решением задачи фильтрации СМСП по непрерывным наблюдениям

Оценка фильтрации $\widehat{\psi}_i^m(\cdot)$ (11) и ее аналитические аппроксимации $\overline{\psi}_i^m(\cdot)$ (13) имеют тесную связь с представленным в [1] решением задачи оптимальной фильтрации состояний СМСП по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами.

Рассмотрим СМСП Z_t (1) и непрерывные наблюдения

$$\xi_t = \int\limits_0^t g(Z_s)ds + \int\limits_0^t h^{1/2}(Z_s)dw_s, \tag{20}$$

которые являются основой для дискретизованных наблюдений $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$. Зафиксируем момент времени $T > 0$ и построим последовательность вложенных двоичных разбиений отрезка $[0;T]$: $\{t_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$: $t_i^j \triangleq i\frac{T}{2^j}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ шаг разбиения равен $\Delta_t^j = \frac{T}{2^j}$. Построим по (20) последовательности дискретизованных наблюдений $\{\boldsymbol{\xi}_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$, используя (2). Обозначим:

- $\mathsf{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – естественная фильтрация, порожденная непрерывными наблюдениями (20);
- $\mathcal{O}_t \triangleq \mathsf{O}_{t+}$, $0 \leqslant t \leqslant T$ – замыкание справа фильтрации O_t;
- $\{\mathfrak{O}_i^j\}_{i=\overline{0,2^j}}^{j\in\mathbb{N}}$: $\mathfrak{O}_i^j \triangleq \sigma\{\boldsymbol{\xi}_k^j,\ 0 \leqslant k \leqslant i\}$ – семейство σ-алгебр, порожденных дискретизованными наблюдениями с шагом Δ_t^j, полученными до момента времени t_i^j;
- $\widehat{Z}_T \triangleq \mathsf{E}\{Z_T|\mathcal{O}_T\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T по непрерывным наблюдениям (20), вычисляемая с помощью решения определенной в [1] системы (15)–(17) и начальным условием (12);
- $\widetilde{Z}_T \triangleq \mathsf{E}\{Z_T|\mathsf{O}_T\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T относительно исходной фильтрации O_T, не замкнутой справа;
- $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j \triangleq \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathfrak{O}_{2^j}^j\right\}$ – оптимальная оценка фильтрации Z_T, построенная по наблюдениям, дискретизованным с шагом Δ_t^j и вычисленная покомпонент-

но по формулам

$$\widehat{\theta}_T^n = \int\limits_{\mathcal{D}} \widehat{\psi}_{2^j}^n(y)dy, \quad n = \overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\widehat{Y}_T^m = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} y^m \widehat{\psi}_{2^j}^n(y)dy, \quad m = \overline{1,M}, \tag{22}$$

а функции $\widehat{\psi}_i^n(y)$ определяется формулой (11);

– $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j(s)$ – аналитическая аппроксимация порядка s состояния Z_T, вычисленная покомпонентно по формулам

$$\overline{\theta}_T^n(s) = \int\limits_{\mathcal{D}} \overline{\psi}_{2^j}^n(y,s)dy, \quad n = \overline{1,N}, \tag{23}$$

$$\overline{Y}_T^m(s) = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathcal{D}} y^m \overline{\psi}_{2^j}^n(y,s)dy, \quad m = \overline{1,M}, \tag{24}$$

а функции $\overline{\psi}_i^n(y,s)$ определяются формулой (13).

Теорема 3. При $j \to \infty$ верны следующие пределы для $s \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_T - \widehat{\mathsf{Z}}_T^j\|\right\} = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_T - \overline{\mathsf{Z}}_T^j(s)\|\right\} = 0. \tag{26}$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Замечание 5. Равенство (26) говорит о том, что предложенные аналитические аппроксимации любого порядка s определяют численные алгоритмы решения задачи фильтрации, поставленной и теоретически решенной в [1], и соответствующие приближенные оценки будут сходиться к теоретическому решению. Выполнение условия A гарантирует не только $\mathcal{L}_1$-, но и $\mathcal{L}_2$-сходимость в пределах (25) и (26): данная норма более привычна в задачах оптимальной фильтрации.

Замечание 6. В доказательстве теоремы 3 показано, что выполняются сходимости $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j \to \widetilde{Z}_T$ и $\widehat{\mathsf{Z}}_T^j(s) \to \widetilde{Z}_T$, т.е. оценка по дискретизованным наблюдениям и ее аналитические аппроксимации любого порядка сходятся к УМО состояния относительно естественной фильтрации O_t, не обладающей свойством непрерывности справа. Имеет место включение $\mathsf{O}_t \subset \mathcal{O}_t$: исходная фильтрация вложена в свое замыкание справа. Из этого следует, что в общем случае $\mathsf{P}\left\{\widetilde{Z}_T \neq \widehat{Z}_T\right\} > 0$. В исследуемой задаче фильтрации это нарушение имеет место при $T = 0$: $\widetilde{Z}_0 = p_0$, в то время как $\widehat{Z}_0$ вычисляется по формуле (12) из [1]. Исследуемая система наблюдения носит частный характер: коэффициенты сноса и диффузии в модели наблюдений (2) не зависят от времени. Это свойство гарантирует [32], что несмотря на несовпадение фильтраций

для $T > 0$, имеет место равенство $\widetilde{Z}_T = \widehat{Z}_T$ P-п.н., т.е. оценки относительно замкнутой и незамкнутой фильтрации совпадают. В случае зависимости коэффициента диффузии в наблюдениях это равенство нарушается в моменты времени t изменения ранга матрицы диффузии $h(t, Z_t)$ [33].

5. Численные примеры

В данном разделе представлены результаты комплекса численных экспериментов. Он составлен для достижения следующих целей. Во-первых, продемонстрировано, что предложенные алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации состояний СМСП могут быть эффективно применены для решения прикладной задачи мониторинга качественного состояния и числовых характеристик сетевого канала. Результаты этих расчетов представлены в подразделе 5.1.

Во-вторых, показано влияние выбора порядка аналитической аппроксимации на итоговое качество оценок фильтрации. Результаты соответствующих расчетов приведены в подразделе 5.2.

В-третьих, продемонстрировано влияние выполнения условий идентифицируемости состояний СМСП на возможность построения высокоточных оценок этих состояний. В [1] было показано, что условия идентифицируемости гарантируют точное восстановление состояний СМСП или некоторых функций от них по имеющимся зашумленным наблюдениям. Данный теоретический результат получен в предположении, что обрабатываются наблюдения в непрерывном времени. В подразделе 5.3 дана численная иллюстрация этого факта: с уменьшением шага временно́й дискретизации точность оценок фильтрации увеличивается.

Подтверждение теоретических результатов, приводимое в подразделах 5.2 и 5.3, требует специального подбора параметров численных экспериментов. Дело в том, что демонстрация влияния порядка аппроксимации и условий идентифицируемости на точность оценивания является нетривиальной задачей. Среднеквадратическое отклонение (СКО) оценки фильтрации и ее аналитических аппроксимаций не может быть вычислено точно, а только приближенно с помощью метода Монте-Карло. Поэтому дополнительные ошибки, вносимые этим методом, могут нивелировать те эффекты, которые должны быть проиллюстрированы предлагаемым численным примером. В то же время пучок траекторий, по которому рассчитываются оценки СКО, должен иметь обозримый объем, чтобы вычисления можно было провести за разумное время. Указанные причины объясняют то, что системы наблюдения в подразделах 5.2 и 5.3 носят модельный характер. С другой стороны, выбор параметров в них дает дополнительную информацию об использовании алгоритмов фильтрации на практике: когда следует использовать аппроксимации высоких порядков и при каких масштабах временно́й дискретизации при выполнении условий идентифицируемости можно получить высокоточные оценки состояний СМСП.

5.1. Фильтрация состояний СМСП с нелинейной зависимостью от состояния интенсивности шумов наблюдений

В [1] теоретическое решение задачи фильтрации было получено в случае, когда интенсивность шумов в наблюдениях линейно зависела от состояний СМСП. В случае фильтрации по дискретизованным наблюдениям это требование можно ослабить.

Рассмотрим систему наблюдения, близкую к рассмотренной в [34]. Состояние, подлежащее оцениванию, представляет собой СМСП $Z_t = \operatorname{col}(\theta_t, Y_t)$ – качественное состояние и числовые характеристики сетевого канала. Качественное состояние θ_t может принимать следующие значения:

– e_1 – канал функционирует штатно, «бутылочное горло» пусто,

– e_2 – состояние, предшествующее перегрузке: «бутылочное горло» непусто,

– e_3 – перегрузка канала, «бутылочное горло» полно,

– e_4 – потеря сигнала на беспроводном участке канала.

Числовые характеристики канала $Y_t = \operatorname{col}(Y_t^1, Y_t^2)$ включают в себя текущие временные задержки и долю потерянных пакетов. Система наблюдения (1) и (2) в данной задаче имеет следующие параметры: $N = 4$, $M = 2$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}45 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & -0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0 & -0{,}6 & 0{,}05 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}47 \\ 0{,}06 \\ 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Распределения $\Pi_0(\cdot)$ и $\Pi(\cdot)$ совпадают. Плотности $\pi^i(\cdot)$ имеют вид $\pi^i(y^1, y^2) = \pi_1^i(y^1)\pi_2^i(y^2|y^1)$, где

$$\pi_1^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}01)}{9!} 2000^{10} (y^1 - 0{,}01)^9 e^{-2000(y^1 - 0{,}01)},$$

$$\pi_2^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}015)}{14!} 2000^{15} (y^1 - 0{,}015)^{14} e^{-2000(y^1 - 0{,}015)},$$

$$\pi_3^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}02)}{19!} 2000^{20} (y^1 - 0{,}02)^{19} e^{-2000(y^1 - 0{,}02)},$$

$$\pi_4^1(y^1) = \frac{\mathbf{I}(y^1 - 0{,}022)}{21!} 1000^{22} (y^1 - 0{,}022)^{21} e^{-1000(y^1 - 0{,}022)}$$

и

$$\pi_2^i(y^2|y^1) = \frac{\mathbf{I}_{[a_i, b_i]}(y^2)}{b_i - a_i} \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y^1) \left(y^2 - \frac{a_i + b_i}{2} \right) + 1 \right],$$

$$a_1 = 0{,}002, \quad b_1 = 0{,}03, \quad a_2 = 0{,}01, \quad b_2 = 0{,}05,$$

$$a_3 = 0{,}04, \quad b_3 = 0{,}08, \quad a_4 = 0{,}06, \quad b_4 = 0{,}1.$$

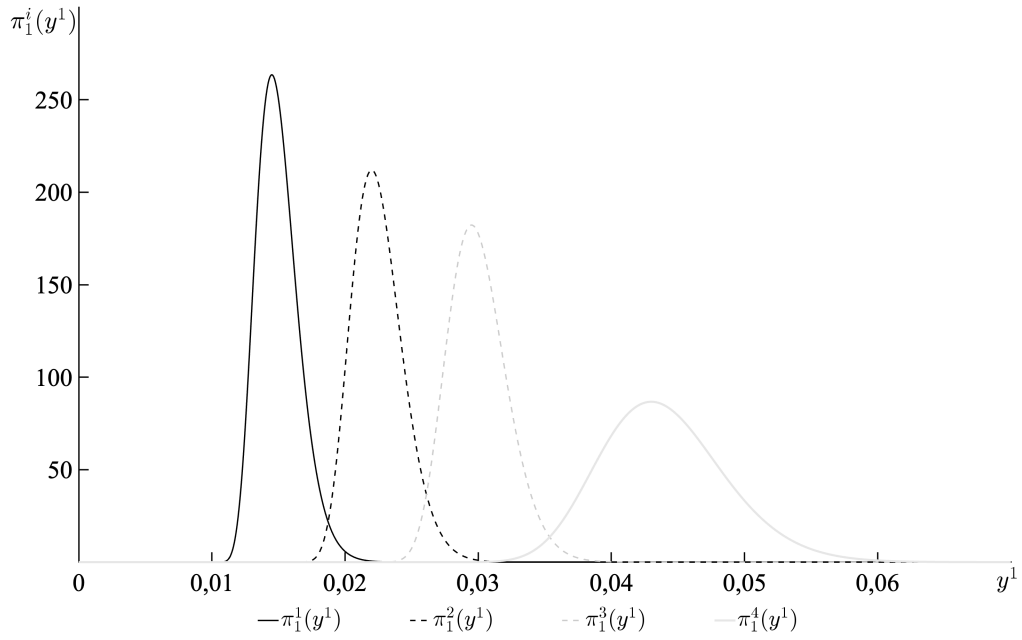


Рис. 1. Вид плотностей распределения $\pi_1^i(y^1)$, $i = \overline{1,4}$.

Плотности $\pi_1^i(y^1)$ представлены на рис. 1. Они относятся к классу гамма-распределений со сдвигом, достаточно широко применяющихся при описании времени передачи/приема/обработки пакетов в телекоммуникационных системах [35, 36]. Их можно трактовать следующим образом.

1) $\pi_1^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по каналу, содержащему 10 сетевых устройств в предположении, что их очереди пусты, а полное время распространения пакета по каналу до очередного устройства и его передачи через него представляет собой экспоненциальную случайную величину с параметром $\lambda = 2000$, сдвинутую на 0,001. Этот вариант соответствует ненагруженному (штатному) функционированию канала, когда буфер его «бутылочного горла» пуст.

2) $\pi_2^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по тому же маршруту в предположении, что буфер «бутылочного горла» канала уже заполнен пятью пакетами, что приводит к дополнительным задержкам. Этот вариант соответствует загруженному функционированию канала, когда буфер его «бутылочного горла» непуст, но не перегружен.

3) $\pi_3^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по тому же маршруту в предположении, что буфер «бутылочного горла» канала заполнен десятью пакетами, что соответствует варианту перегрузки канала.

4) $\pi_4^1(y^1)$ описывает время прохождения пакета по каналу, содержащему 10 сетевых устройств, причем в буфере «бутылочного горла» присутствует 1 пакет. Полное время распространения пакета по каналу до очередного

устройства и передачи пакета этим устройством представляет собой экспоненциальную случайную величину с параметром $\lambda = 1000$, сдвинутую на 0,001. Данный вариант соответствует случаю общей перегрузки канала, связанной, например, с проблемами передачи по беспроводным участкам канала.

Условные распределения $\pi_2^i(y^2|y^1)$ имеют конечные носители, плотности при фиксированном y^1 представляют собой линейные функции. Такое поведение соответствует тому, что время задержки имеет положительную корреляцию с долей потерянных пакетов [37].

Плотность начального распределения СМСП равна $\pi_0(y) = \mathrm{diag}\,(p_0)\pi(y)$. Следует отметить, что носители распределений $\pi^i(y)$ пересекаются.

С шагом $\Delta_t = 0{,}01$ наблюдаются зашумленные значения задержки передачи пакетов

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_t^1 dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} 0{,}1\sqrt{Y_t^1} dw_t^1$$

и число потерянных пакетов, представленное в форме диффузионной аппроксимации

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} 1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1} dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}} dw_t^2.$$

В имеющихся наблюдениях w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы.

Вид функций сноса связан со спецификой постановки прикладной телекоммуникационной задачи, а также диффузионной аппроксимации наблюдений, используемой в данном случае [34].

Задача фильтрации заключается в оценивании в реальном масштабе времени компонент θ_t и Y_t по нарастающему объему наблюдений.

Для вычислений был выбран порядок аналитической аппроксимации $s = 1$, интеграл в (8) вычислялся по формуле прямоугольников [38, с. 71]. Условные плотности $\overline{\psi}_t^n(y)$ определялись для разных значений n на отрезках $[a_n^m, b_n^m]$ с шагами $\Delta_{y^m}^n$. Информация об этой сетке сведена в табл. 1. Интегралы в (13) также вычислялись по формуле прямоугольников.

Таблица 1. Сводная таблица областей интегрирования и шага сетки для вычисления оценок плотностей $\overline{\psi}_i^n(y)$

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Отрезок $[a_n^1, b_n^1]$	$[0{,}01; 0{,}02]$	$[0{,}015; 0{,}025]$	$[0{,}02; 0{,}03]$	$[0{,}022; 0{,}052]$
Шаг $\Delta_{y^1}^n$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}15873 \times 10^{-5}$	$0{,}47619 \times 10^{-5}$
Отрезок $[a_n^2, b_n^2]$	$[0{,}002; 0{,}03]$	$[0{,}01; 0{,}05]$	$[0{,}04; 0{,}08]$	$[0{,}06; 0{,}1]$
Шаг $\Delta_{y^2}^n$	$0{,}46032 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$	$0{,}63492 \times 10^{-4}$

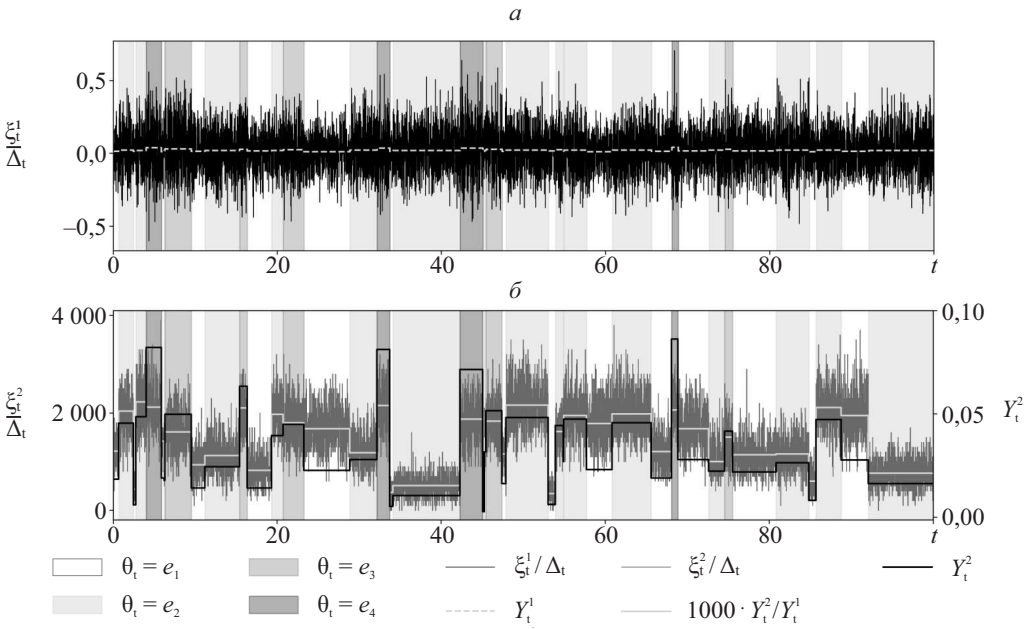


Рис. 2. Результаты моделирования состояний СМСП и измерений.

Система наблюдения в данном примере отличается от представленной в [34] наличием мультипликативных шумов. Заметим, что и снос, и диффузия в наблюдениях нелинейно зависят от Y_t. При этом ни снос, ни диффузия не зависят от компоненты θ_t. Носители распределений $\pi^i(\cdot)$ пересекаются, и это означает, что даже знание компоненты Y_t не позволит точно восстановить компоненту θ_t. В то же время, квадратическая характеристика исходных непрерывных наблюдений ξ такова, что

$$\frac{d\langle \xi^1 \rangle_{t+}}{dt} = 0{,}01 Y_t^1, \qquad \frac{d\langle \xi^2 \rangle_{t+}}{dt} = 1000 \frac{Y_t^2}{Y_t^1}.$$

Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно (Y_t^1, Y_t^2) очевидно, что она разрешима.

Отсюда можно сделать вывод, что компонента θ_t будет оцениваться с умеренной точностью, так как она недоступна прямому наблюдению, а компонента Y_t не позволяет однозначным образом идентифицировать θ_t. В то же время можно ожидать достаточную точность оценки компоненты Y_t.

Рисунок 2 содержит результаты моделирования:

- компоненты θ_t (отмечены фоном),
- компоненты Y_t^1,
- компоненты Y_t^2 (ось ординат на рисунке *б* справа),
- отношения $1000 \frac{Y_t^2}{Y_t^1}$,
- наблюдения $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$,
- наблюдения $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$.

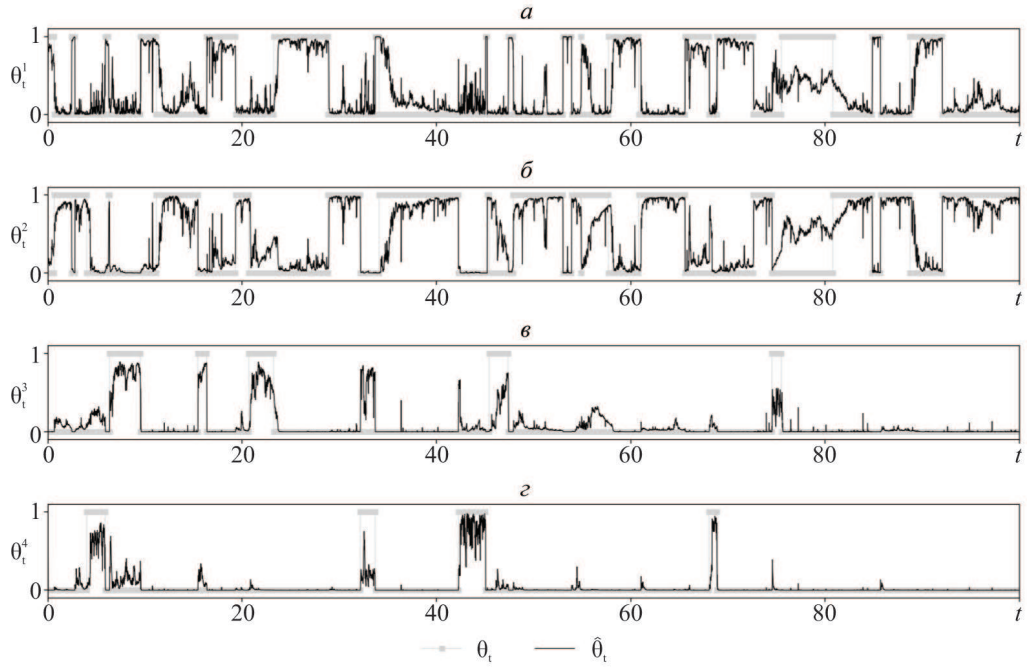


Рис. 3. Результаты оценивания компоненты θ_t.

Данный рисунок приведен для того, чтобы можно было *визуально* сравнить истинные значения оцениваемых компонент СМСП Z_t и доступных наблюдений $\boldsymbol{\xi}_t$. Из него можно сделать следующие заключения.

1. Согласно рис. 2,*а* отношение «сигнал/шум» в наблюдениях $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$ мало и не позволяет визуально идентифицировать изменение значения компоненты Y_t^1. Изменение компонеты θ_t по наблюдениям $\boldsymbol{\xi}^1/\Delta_t$ отследить нельзя.
2. По рис. 2,*б* зрительно можно локализовать моменты некоторых скачков Z_t, а значит и компоненты θ_t, однако визуально значение θ_t определить невозможно. Более того, некоторые моменты скачков Z_t визуально определить затруднительно из-за малой разницы в изменении значения $1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}$. Такая ситуация наблюдается, например, на [2,6; 6,1]: момент скачка Z_t на этом отрезке сложно различим по зашумленным наблюдениям $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$.
3. По рис. 2,*б* путем скользящего осреднения наблюдений $\boldsymbol{\xi}^2/\Delta_t$ можно построить некоторую оценку процесса $1000\frac{Y_t^2}{Y_t^1}$. Тем не менее, построить по ним оценку компоненты Y_t^2, имеющую приемлемую точность, не удается.

Оценки компонент $\widehat{\theta}_t^n$ $(n = \overline{1,4})$ и $\widehat{Y}_t^m$, $(m = 1, 2)$ выражаются через $\overline{\psi}_t^n(y)$ формулами (23) и (24).

На рис. 3 представлены результаты покомпонентной фильтрации вектора θ_t:

– точное значение компоненты θ_t^n, $n = \overline{1,4}$,

– оценка фильтрации $\widehat{\theta}_t^n$, $n = \overline{1,4}$.

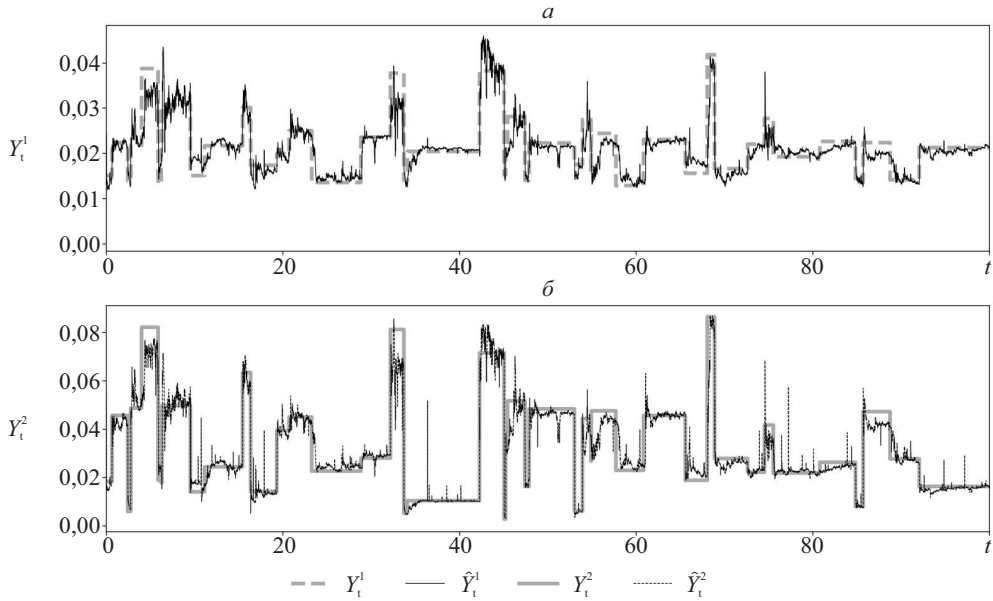


Рис. 4. Результаты оценивания компоненты Y_t.

На рис. 4 представлены результаты покомпонентной фильтрации вектора Y_t:

– точное значение Y_t^m, $m = 1, 2$,

– оценка фильтрации $\widehat{Y}_t^m$, $m = 1, 2$.

Полученные результаты расчетов вполне соответствуют ожиданиям. В целом, оценки фильтрации компонент θ_t и Y_t демонстрируют высокую точность. Тем не менее, из-за того, что носители распределения компоненты Y_t пересекаются, в случае попадания значения Y_t в области пересечения компонента θ_t оценивается посредственно, так как функции сноса и диффузии в наблюдениях не зависят от θ_t. Примером этого служит фрагмент графиков истинных значений компонент θ_t и их оценок фильтрации на промежутке [73; 82] на рис. 3: алгоритм «исключил» для θ_t значения e_3 и e_4, но не смог правильно выбрать e_1 или e_2.

5.2. Влияние порядка аналитической аппроксимации на точность фильтрации

Данный численный пример демонстрирует степень влияния порядка s аналитической аппроксимации на итоговую точность оценок фильтрации.

Система наблюдения (1), (2) имеет следующие параметры: $N = 2$, $M = 1$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $\Delta_t = 4$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \pi^1(y) = \mathbf{I}_{[1;\,2]}(y), \\ \pi^2(y) = \mathbf{I}_{[10001;\,10002]}(y), \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} Y_t dw_t,$$

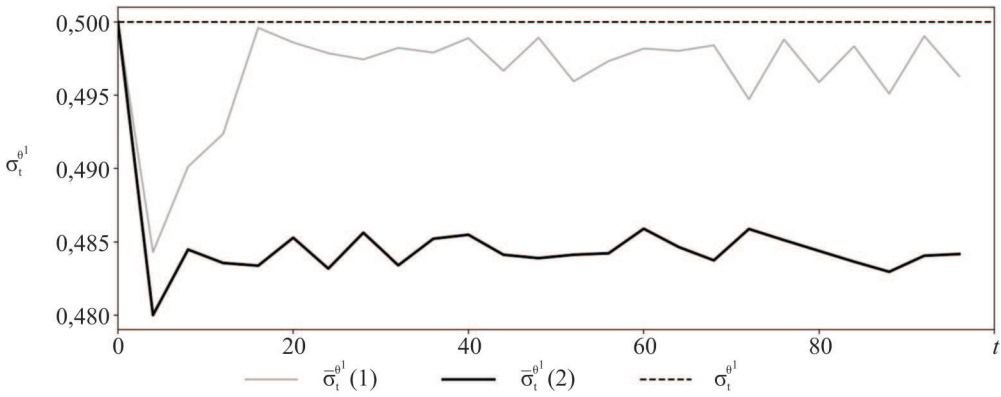


Рис. 5. Сравнение СКО ошибок аналитических аппроксимаций различного порядка: компонента θ_t^1.

где w_t – винеровский процесс. Как и в прошлом примере, оценке подлежат все компоненты СМСП Z_t. Шаг сетки по пространственной переменной $\Delta_y = 0{,}01$.

Параметры системы наблюдения и численных схем были выбраны из следующих соображений. Во-первых, МИП Λ обеспечивает наихудшее с точки зрения неопределенности стационарное распределение – равномерное. Во-вторых, нулевой снос в наблюдениях также затрудняет оценивание – вся статистическая информация сосредоточена в интенсивности шума. В-третьих, носители распределений $\pi^1(y)$ и $\pi^2(y)$ выбраны далеко отстоящими друг от друга: при наличии высокочастотных наблюдений все компоненты Z_t могут быть оценены с высокой точностью. Однако в данной задаче шаг Δ_t зафиксирован, и является достаточно большим: скачок процесса происходит в среднем за полшага дискретизации. Вероятности того, что на шаге дискретизации произойдет 0, 1 или 2 скачка, равны соответственно 0,135, 0,271 и 0,271, в то время, как бóльшее число скачков происходит с вероятностью 0,323. Среднее число скачков на шаге $\Delta_t = 4$ равно 2, и резонно ожидать, что использование аналитической аппроксимации второго порядка обеспечит значимое приращение точности по сравнению с аналитической аппроксимацией первого порядка.

Сравнивалась:

– аналитическая аппроксимация первого порядка: формула (8) вычислялась по формуле прямоугольников, формула (13) – по формуле прямоугольников с шагом Δ_y,
– аналитическая аппроксимация второго порядка: формулы (8) и (9) вычислялись с помощью формулы прямоугольников, формула (13) – по формуле прямоугольников с шагом Δ_y.

Вычисления были проведены на пучке траекторий объемом 10 000.

Результаты оценивания θ_t представлены на рис. 5: для компоненты θ_t^1 вычислены

– СКО σ^θ компоненты θ_t^1;

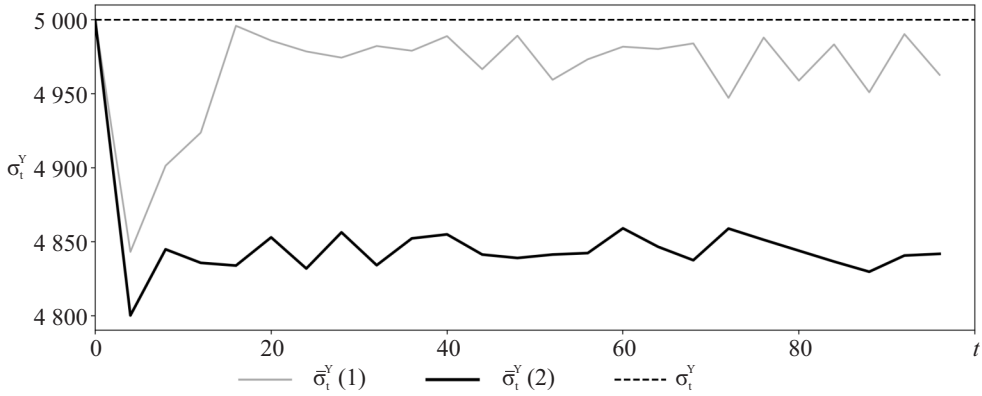


Рис. 6. Сравнение СКО ошибок аналитических аппроксимаций различного порядка: компонента Y_t.

– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^{\theta}(1)$ аналитической аппроксимации первого порядка,
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^{\theta}(2)$ аналитической аппроксимации второго порядка.

Поведение характеристик точности аппроксимаций оценок компоненты θ_t^2 аналогично.

Сравнительные результаты для компоненты Y_t представлены на рис. 6:
– СКО σ^Y компоненты Y_t;
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^Y(1)$ аналитической аппроксимации первого порядка,
– выборочное СКО $\overline{\sigma}_t^Y(2)$ аналитической аппроксимации второго порядка.

Пример демонстрирует ситуацию, когда использование аналитических аппроксимаций порядка, выше первого, приводит к значимому повышению качества оценивания. В данной системе каждое наблюдение несет много информации о состоянии Z_t т.к. носители условного распределения Y_t относительно значений компоненты θ_t разнесены далеко друг от друга. В то же время, наблюдения поступают с такими большими интервалами, что вероятность возникновения на этих отрезках двух и более скачков практически равна 0,6. Предложенные оценки вообще дают незначительный выигрыш по отношению к тривиальной оценке – безусловному математическому ожиданию – именно из-за очень редких наблюдений, и предложенные оценки следует использовать в тех практических случаях, когда любое повышение точности является критичным вне зависимости от роста объема вычислений. На рисунках также видно явление накопления ошибки: выборочные СКО ошибок обеих аппроксимаций на первом шаге ниже, чем на последующих. Это связано с высокой вероятностью того, что за время Δ_t произойдет два и более скачков состояния. Использование аппроксимации порядка 2 в значительной степени парирует этот недостаток.

5.3. Идентифицируемость компонент СМСП

В [1] были приведены частные случаи систем наблюдений, которые гарантируют точное восстановление отдельных компонент или всего состояния си-

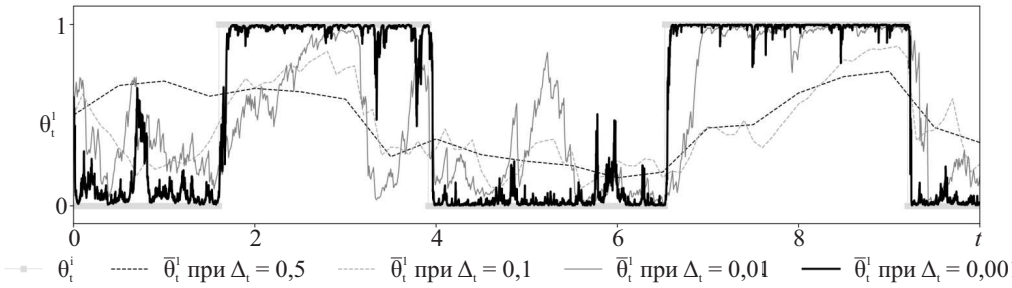


Рис. 7. Результаты оценивания компоненты θ_t^1: условия идентифицируемости № 1.

стемы. Данные результаты носят теоретический характер, однако позволяют надеяться на разработку приближенных методов, обеспечивающих высокую точность оценивания. Данный подраздел демонстрирует, что предлагаемый класс фильтров обладает этим свойством: при выполнении условий идентифицируемости аналитические аппроксимации стремятся к оцениваемому состоянию при $\Delta_t \to 0$.

Первый вариант системы наблюдения (1), (2) имеет следующие параметры: $N = 2$, $M = 2$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $t \in [0; 10]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \pi^1(y^1, y^2) &= \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \\ \pi^2(y^1, y^2) &= \mathbf{I}_{[2;3]\times[4;5]}(y^1, y^2), \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{Y_t^1}\, dw_t^1,$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{Y_t^2}\, dw_t^2,$$

где w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы. Задача фильтрации заключается в оценивании всего вектора состояния Z_t.

Условия идентифицируемости в данном примере выполнены потому, что носители распределений $\pi^1(\cdot)$ и $\pi^2(\cdot)$ не пересекаются.

В эксперименте использовалась аналитическая аппроксимация порядка 1, интегралы вычислялись по формуле прямоугольников, а шаг пространственной сетки равнялся $\Delta_{y^1} = \Delta_{y^2} = 0{,}01$. Вычисления производились для различных шагов дискретизации по времени: $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$. Результаты оценивания компоненты θ_t^1 приведены на рис. 7 (оценка θ_t^2 следует из условия нормировки):

– точное значение компоненты θ_t^1,
– оценки $\overline{Y}_t^n$ для $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$.

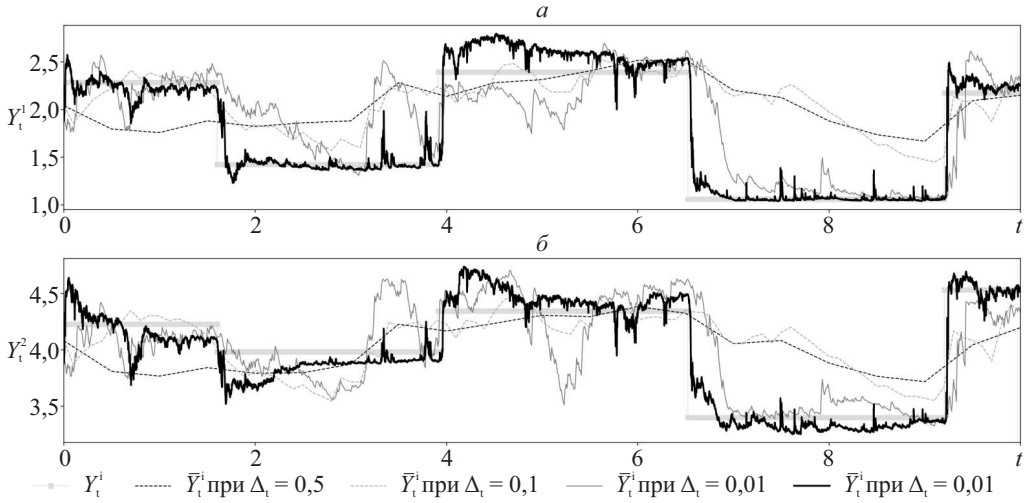


Рис. 8. Результаты оценивания компонент Y_t: условия идентифицируемости № 1.

Результаты оценивания компонент Y_t приведены на рис. 8:

– точные значения компонент Y_t^n $(n = 1, 2)$,

– оценки $\widehat{Y}_t^n$ для $\Delta_t = 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}01$ и $0{,}001$.

Второй вариант системы наблюдения (1), (2) имеет параметры $N = 2$, $M = 2$, $\pi(y) = \pi_0(y)$, $t \in [0; 100]$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \pi^1(y^1, y^2) = \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \\ \pi^2(y^1, y^2) = \mathbf{I}_{[1;2]\times[3;4]}(y^1, y^2), \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^1 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\theta_t^1 \sqrt{Y_t^1} + 2\theta_t^2 \sqrt{Y_t^1} \right) dw_t^1,$$

$$\boldsymbol{\xi}_i^2 = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(2\theta_t^1 \sqrt{Y_t^2} + \theta_t^2 \sqrt{Y_t^2} \right) dw_t^2,$$

где w_t^1 и w_t^2 – независимые винеровские процессы. Задача фильтрации заключается в оценивании всего вектора состояния Z_t.

В данном примере распределения $\pi^1(\cdot)$ и $\pi^2(\cdot)$ совпадают, однако условия идентифицируемости выполнены из-за разницы интенсивностей шумов в наблюдениях при различных значениях компоненты θ_t.

Вычисления выполнялись с той же пространственной сеткой и теми же шагами дискретизации по времени, что и в предыдущем примере. На рис. 9 и 10 представлены результаты оценивания компонент θ_t и Y_t.

Результаты данных примеров соответствуют теоретическим выводам [1]: при выполнении условий идентифицируемости оптимальная оценка фильтрации совпадает с оцениваемым состоянием Z_t, а на практике это означает воз-

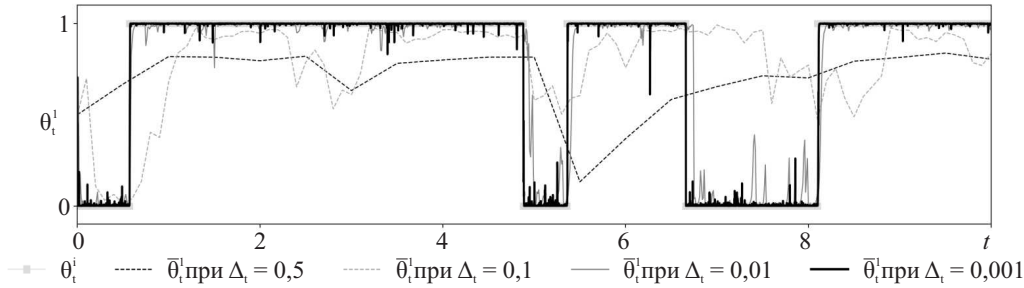


Рис. 9. Результаты оценивания компоненты θ_t^1: условия идентифицируемости № 2.

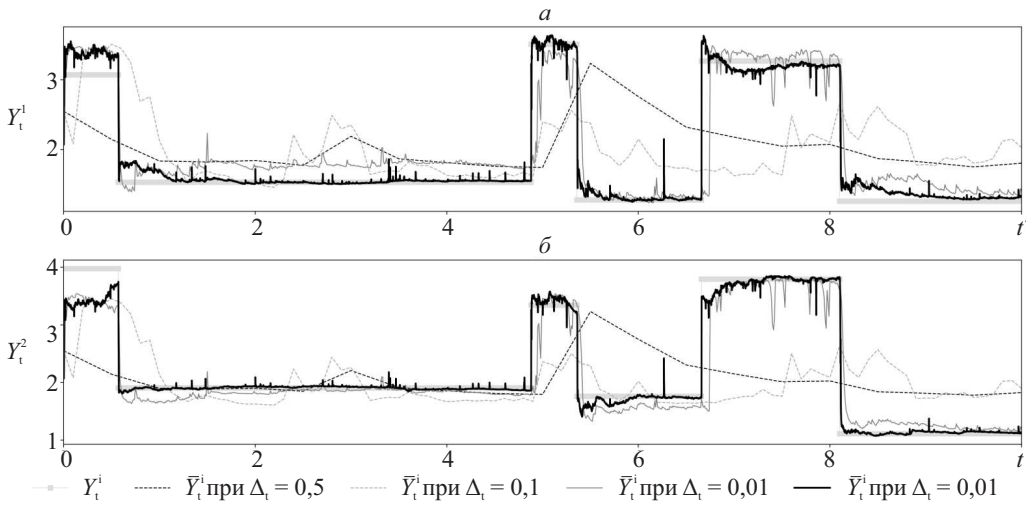


Рис. 10. Результаты оценивания компонент Y_t: условия идентифицируемости № 2.

можность конструирования высокоточных алгоритмов фильтрации при условии произвольного уменьшения шага временно́й дискретизации наблюдений.

6. Заключение

Вторая часть цикла посвящена алгоритмическому аспекту решения задачи оптимальной фильтрации состояния СМСП по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Вместо разработки методов численного решения предложенного в [1] аналога уравнения Кушнера–Стратоновича, включая предварительное преобразование исходных наблюдений, в качестве аппроксимации предлагается использовать решение задачи фильтрации состояния непрерывно-дискретной системы наблюдения. В ней состояние представляет собой СМСП с непрерывным временем, а наблюдения – временна́я дискретизация исходных наблюдений. Для преобразованной задачи предложены аналитические аппроксимации, а также исследованы характеристики их точности в зависимости от порядка. По сути во второй части представлен

алгоритм численного решения задач фильтрации непрерывной и непрерывно-дискретной систем наблюдения. Следует также отметить, что непрерывно-дискретная система наблюдения не эквивалентна никакой системе с дискретным временем: дискретизованные наблюдения $\boldsymbol{\xi}_i$ зависят не только от значений оцениваемого состояния в моменты t_{i-1} и t_i, но и от всей траектории СМСП Z_t на всем отрезке $[t_{i-1};\, t_i]$.

Помимо построения оценок состояния систем в различных прикладных задачах, возможно дальнейшее теоретическое и алгоритмическое развитие представленных результатов. Во-первых, формулы (8)–(10) и (13), реализующие алгоритм фильтрации, содержат операции интегрирования по временно́й и пространственным переменным, которые не могут быть реализованы аналитически. Необходимы исследования, количественно характеризующие дополнительные погрешности, возникающие в результате численного интегрирования, а также направленные на оптимизацию величин шагов интегрирования. Во-вторых, говоря о сеточных методах, следует указать их основной недостаток – экспоненциальный рост объема вычислений и затрачиваемой памяти с ростом размерности системы наблюдения. Возможными вариантами сокращения объема вычислений является переход к другому виду представления условных плотностей: использование модификаций сигма-точечного представления полимодальных распределений, сплайн-аппроксимации, проекционных представлений и пр. Еще одним вариантом, позволяющим снизить объем вычислений, представляется применение дополнительных преобразований к дискретизованным наблюдениям, и последующее использование субоптимальных нелинейных фильтров калмановской структуры: ценой приемлемой потери точности оценивания возможно создать алгоритмы, трудоемкость которых с ростом размерности растет не столь драматично.

Еще одно возможное направление дальнейших исследований связано с неравенством (17) и его обсуждением в замечании 1. Согласно этому неравенству верхняя оценка показателя точности $\Sigma_{\frac{T}{\Delta_t}}(s)$ аналитической аппроксимации порядка s показательным образом стремится к максимально возможному пределу $2 + \overline{d}$. Это связано с тем, что предлагаемые оценки учитывают возможность возникновении на интервале дискретизации Δ_t не более s скачков. Возможная потеря точности в соответствии с (17) призывает быть осторожным при встраивании предлагаемого алгоритма фильтрации в реальные системы наблюдения, в которых время фильтрации значительно. Однако в пользу применения этих алгоритмов имеются следующие аргументы. Во-первых, в зависимости от конкретной практической задачи потерю точности вследствие накопления ошибки можно потенциально снизить, увеличивая порядок аппроксимации s, уменьшая шаг Δ_t или применяя комбинацию этих мер. Во-вторых, оценка (17) является очень консервативной, перестраховочной: она говорит о некоторой верхней границе ошибки, в то время как истинная ошибка остается умеренной. Этот факт иллюстрируется расчетами, приведенными в подразделе 5.2: выборочное СКО ошибки оценки, построенное по значительному пучку траекторий, не растет со временем. Таким образом, для

решения вопроса о включении предлагаемых аппроксимаций в контур стационарной фильтрации в реальных прикладных задачах необходимо проводить комплекс дополнительных вычислительных экспериментов, чтобы получить оценку реального СКО ошибки предлагаемой оценки. В-третьих, оценка точности, определяемая неравенством (17), является слишком консервативной, и дальнейшие исследования могут быть направлены на ее уточнение.

В [39, 40] представлено решение задачи оптимального управления МСП по бесшумовым наблюдениям, поступающим с запаздыванием. В этих статьях возможность прямого наблюдения вектора состояния является ключевым. В то же время выполнение условий идентифицируемости [1] всего вектора состояния МСП позволит точно восстановить процесс Z_t по косвенным зашумленным наблюдениям. Использование комбинации решения задачи оптимальной фильтрации и задачи оптимального управления по наблюдениям с запаздыванием можно трактовать как решение задачи оптимального стохастического управления по неполной информации с помощью теоремы разделения. Предложенные в данной части цикла аналитические аппроксимации оценок оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям вполне пригодны для построения высокоточных оценок состояния управляемого МСП с последующим синтезом управления на их основе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Введем следующие обозначения:

$$\gamma^{nm}(y,x|u) \triangleq \sum_{r=0}^{s} \varrho^{nm}(y,x,r|u), \qquad \gamma(y,x|u) \triangleq \|\gamma^{nm}(y,x|u)\|_{n,m=\overline{1,N}},$$

$$\zeta^{nm}(y,x|u) \triangleq \sum_{r=s+1}^{\infty} \varrho^{nm}(y,x,r|u), \qquad \zeta(y,x|u) \triangleq \|\zeta^{nm}(y,x|u)\|_{n,m=\overline{1,N}},$$

$$\varrho(y,x|u) \triangleq \gamma(y,x|u) + \zeta(y,x|u),$$

$$c_{\varrho}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\varrho^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx]\}}{dx},$$

$$c_{\gamma}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\gamma^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx],\ R \leqslant s\}}{dx},$$

$$c_{\zeta}(x) \triangleq \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{1}\zeta^{\top}(y,x|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu = \frac{\mathsf{P}\{\boldsymbol{\xi}_1 \in [x,x+dx],\ R > s\}}{dx}.$$

С использованием этих обозначений разность оценки и ее аппроксимации $\widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1$ может быть преобразована следующим образом:

$$\text{(П.1)} \qquad \widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1(s) = c_\varrho^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1) \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} \varrho^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}\varrho^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} -$$

$$-c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1) \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} \gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u)\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{c_\zeta(\boldsymbol{\xi}_1)}{c_\gamma(\boldsymbol{\xi}_1)+c_\zeta(\boldsymbol{\xi}_1)} \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} (c_\zeta^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\zeta^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u) - c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u))\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \\ \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}} y\mathbf{1}(c_\zeta^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\zeta^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u) - c_\gamma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_1)\gamma^\top(y, \boldsymbol{\xi}_1|u))\mathrm{diag}\,(p_0)\pi_0(u)dydu \end{bmatrix} =$$

$$= \mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\} \underbrace{\left(\frac{1}{\mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R>s\}}(\omega)\theta_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \\ \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R>s\}}(\omega)Y_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \end{bmatrix} - \frac{1}{\mathsf{P}\{R \leqslant s|\boldsymbol{\xi}_1\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R\leqslant s\}}(\omega)\theta_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \\ \mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\{R\leqslant s\}}(\omega)Y_{\Delta_t}|\boldsymbol{\xi}_1\} \end{bmatrix} \right)}_{\triangleq F(\boldsymbol{\xi}_1)}.$$

Из свойств компонент θ и Y, а также условия А следует, что $\|F(x)\|_1 \leqslant 2 + \overline{d}$. Тогда

$$\sigma(s) = \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_1 - \overline{Z}_1\|_1\right\} \leqslant (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{E}\{\mathsf{P}\{R > s|\boldsymbol{\xi}_1\}\} =$$

$$= (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{P}\{R > s\} \leqslant (2+\overline{d}) e^{-\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^k}{k!} =$$

$$= (2+\overline{d}) \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!} \underbrace{e^{-\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+1)!(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^k}{(k+s+1)!}}_{\triangleq C_1 = C_1(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t, s)},$$

причем $0 < C_1 < 1$. Истинность неравенства (16) доказана.

Рассмотрим q итераций (11) и (13). Обозначим случайные величины $R_i(\omega)$, $i = \overline{1,q}$ – число скачков Z_t на отрезках $[t_{i-1}, t_i]$, а также событие $A_q(\omega) \triangleq \{\omega \in \Omega : \max_{i=\overline{1,q}} R_i(\omega) \leqslant s\}$. Выполняя те же преобразования, что и в (П.1), можно получить выражение для $\mathsf{E}\left\{\|\widehat{Z}_q - \overline{Z}_q(s)\|_1\right\}$:

$$\mathsf{E}\left\{\left\|\widehat{Z}_q - \overline{Z}_q(s)\right\|_1\right\} = \mathsf{E}\left[\left\| \mathsf{P}\left\{\overline{A}_q|\mathfrak{O}_q\right\} \left(\frac{1}{\mathsf{P}\left\{\overline{A}_q|\mathfrak{O}_q\right\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\overline{A}_q}(\omega)\theta_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \\ \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\overline{A}_q}(\omega)Y_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \end{bmatrix} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{\mathsf{P}\{A_q|\mathfrak{O}_q\}} \begin{bmatrix} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_q}(\omega)\theta_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \\ \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_q}(\omega)Y_{t_q}|\mathfrak{O}_q\right\} \end{bmatrix} \right) \right\|_1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant (2+\overline{d}) \sup_{p_0,\pi_0} \mathsf{P}\left\{\overline{A}_q\right\} \leqslant (2+\overline{d}) \left(1 - \left(1 - C_1 \frac{(\boldsymbol{\Lambda}\Delta_t)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^q\right).$$

Истинность неравенства (17) и теоремы 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Последовательность σ-алгебр $\mathfrak{O}^j_{2^j}$ – вложенная, т.е. $\mathfrak{O}^j_{2^j} \in \mathfrak{O}^{j+1}_{2^j}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Траектории наблюдений $\{\xi_t\}_{t\in[0;T]}$ – непрерывные функции времени, поэтому процесс ξ_t является сепарабельным [41], и $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathfrak{O}^j_{2^j} = \mathsf{O}_T$. В силу теоремы Леви о мартингале имеем $\widehat{\mathsf{Z}}^j_T \triangleq \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathfrak{O}^j_{2^j}\right\} \to \mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_t\right\}$ P-п.н. при $j \to \infty$. Условие A гарантирует не только сильную сходимость последовательности оценок, но и сходимость в пространстве $\mathcal{L}_1$: $\lim_{j\to\infty} \mathsf{E}\left\{\|\mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_T\right\} - \widehat{\mathsf{Z}}^j_T\|\right\} = 0$. Снос и диффузия в наблюдениях (2) не зависят от времени, поэтому согласно [32] для $T > 0$ имеем $\mathsf{E}\left\{Z_T|\mathsf{O}_T\right\} = \widehat{Z}_T$ P-п.н., из чего следует равенство (25). Истинность (26) следует из (25) и неравенства (18).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В.* Оптимальная фильтрация состояний специальных марковских скачкообразных процессов по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами I: теоретическое решение // АиТ. 2026. № 12. С. 39–65.
2. *Кушнер Г.Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.
3. *Zakai M.* On the optimal filtering of diffusion processes // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1969. V. 11. P. 230–243.
4. *Chow P., Jiang J.* Almost Sure Convergence of Some Approximate Solutions for Random Parabolic Equations, Random Partial Differential Equations. Basel, Birkhüser: 1991. P. 45–54.
5. *Ahmed N.* Linear and nonlinear filtering for scientists and engineers. Singapore: World Scientific, 1999.
6. *Kushner H., Dupuis P.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. N. Y.: Springer, 2001.
7. *Bensoussan A., Glowinski R., Rascanu A.* Approximation of the Zakai equation by the splitting up method // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28(6). P. 1420–1431.
8. *Gyöngy I., Krylov N.* On the splitting-up method and stochastic partial differential equations // The Annals of Probability. 2003. V. 31(2). P. 564–591.
9. *Clark J., Crisan D.* On a robust version of the integral representation formula of nonlinear filtering // Probab. Theory Relat. Fields. 2005. V. 133. P. 43–56.
10. *Yau S., Chen X., Jiao X., et al.* Principles of Nonlinear Filtering Theory. Cham: Springer, 2024.
11. *Kouritzin M., Long H., Sun W.* Markov chain approximations to filtering equations for reflecting diffusion signals // Stochastic Processes and their Applications. 2004. V. 110(2). P. 275–298.
12. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Высшая школа, 1990.
13. *Ahmed N., Radaideh S.* A Powerful Numerical Technique Solving Zakai Equation for Nonlinear Filtering // Dynamics and Control. 1997. V. 7. P. 293–308.

14. *Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.* Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. V. 35(2). P. 435–461.
15. *Brigo D., Hanzon B., Le Gland F.* Approximate nonlinear filtering by projection on exponential manifolds of densities // Bernoulli. 1999. V. 5(3). P. 495–534.
16. *Armstrong J., Brigo D.* Nonlinear filtering via stochastic PDE projection on mixture manifolds in direct metric // Math. Control Signals Syst. 2016. V. 28. Art. 5.
17. *Emzir M., Zhao Z., Särkkä, S.* Multidimensional projection filters via automatic differentiation and sparse-grid integration // Signal Processing. 2023. V. 204. Art. 108832.
18. *Bain A., Crisan D.* Fundamentals of Stochastic Filtering. N.Y.: Springer, 2009.
19. *Crisan D., Rozovskii B.* (eds). The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. Oxford University Press, 2011.
20. *Setoodeh P., Habibi S., Haykin S.* Nonlinear filters: Theory and Applications. N. Y.: John Wiley & Sons, 2022.
21. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.
22. *Beck C., Becker S., Cheridito P., et al.* Deep learning based numerical approximation algorithms for stochastic partial differential equations. https://arxiv.org/pdf/2012.01194v2. 2025
23. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. V. 21. P. 303–313.
24. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I // АиТ. 2020. Вып. 11. С. 11–31.
25. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // АиТ. 2020. Вып. 12. С. 24–49.
26. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener–Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stochastic Processes and Their Applications. 2006. V. 116(12). P. 1743–1769.
27. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н., Смелянский Р.Л.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информатика и ее применения. 2024. Том 18. Вып. 3. С. 30–37.
28. *Kloeden P., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
29. *Armstrong J., Brigo D., Hanzon B.* Optimal projection filters with information geometry // Information Geometry. 2024. No. 7. P. 525–540.
30. *Diethelm K.* Error Bounds for the Numerical Integration of Functions with Limited Smoothness // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2014. V. 52(2). P. 877–879.
31. *Temlyakov V.* Numerical Integration and Discrepancy Under Smoothness Assumption and Without It // Constructive Approximation. 2022. V. 55. P. 743–771.
32. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
33. *Borisov A., Sokolov, I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics. 2020. V. 8(4). Art. 506.
34. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Численный анализ робастности оценки фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 2. С. 85–96.

35. *Chen D., Fu X., Ding W., et al.* Shifted gamma distribution and long-range prediction of Round Trip Timedelay for Internet-based teleoperation // 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. Bangkok. 2009. P. 1261–1266.
36. *Yasuda S., Yoshida H.* Prediction of round trip delay for wireless networks by a two-state model // 2018 IEEE Wireless Communications and Networking Conference. 2018. P. 1–6.
37. *Strowes S.* Passively measuring TCP round-trip times: A close look at RTT measurements with TCP // ACM Queue. 2013. V. 11(10). P. 20–30.
38. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
39. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Оптимальное управление марковскими скачкообразными процессами по бесшумовым наблюдениям с задержками II: задача минимизации издержек // Информатика и ее применения. 2026. Том 20. Вып. 4, в печати.
40. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Компенсирующее управление марковским скачкообразным процессом по запаздывающим наблюдениям состояния // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 5.
41. *Дуб Дж.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 17.02.2026

После доработки 19.07.2026

Принята к публикации 03.08.2026