Стохастические системы

© 2026 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО НЕПРЕРЫВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ I: ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ[1]

Статья посвящена определению условного распределения специального марковского скачкообразного процесса по наблюдениям в реальном масштабе времени. Оцениваемый процесс может быть трактован как марковская цепь в непрерывном времени со значениями в пространстве случайных величин. Доступные наблюдения представляют собой диффузионные процессы, снос и диффузия в которых являются функциями оцениваемого состояния. Исследован случай линейной зависимости диффузии от состояния. Предложена эквивалентная трансформация, преобразующая исходный наблюдаемый процесс в совокупность диффузионного процесса с единичной диффузией и функции состояния, наблюдаемой без шума. Доказано, что условное распределение состояния сосредоточено на некоторых линейных многообразиях исходного пространства. Представлен набор мер, относительно которых условное распределение абсолютно непрерывно. Соответствующая плотность определена решением рекуррентно связанных интегро-дифференциальных уравнений типа Кушнера–Стратоновича и интегральных преобразований, выполняемых в моменты скачков бесшумовой компоненты преобразованных наблюдений. Исследована задача точного восстановления компонент оцениваемого процесса по имеющимся зашумленным наблюдениям и приведено ее частное решение.

Ключевые слова: наблюдения с мультипликативными шумами, специальный марковский скачкообразный процесс, задача оптимальной фильтрации, уравнение Кушнера–Стратоновича.

DOI: 10.7868/S2413977726120039

1. Введение

Решение задач оптимальной фильтрации состояний стохастических динамических систем с непрерывным временем по разнородной статистической информации весьма востребовано в различных прикладных областях [1–3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-21-00504). Численные эксперименты проводились с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

В большинстве случаев задача фильтрации связана с определением условного математического ожидания (УМО) полезного сигнала по имеющимся наблюдениям, однако «универсальным решением» является определение условного распределения состояния системы. Имея его, возможно найти оценку фильтрации любого полезного сигнала – функции от состояния системы, а также строить не только оценки фильтрации с минимальной среднеквадратичной ошибкой, но и оптимальные относительно произвольного критерия – ожидаемого значения функции ошибки оценки.

В настоящее время получен ряд важных результатов для систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Ито–Вольтерра [4–6], стохастическими уравнениями в частных производных [7–9], дифференциальными уравнениями с грубыми процессами в правой части [10], фрактальными стохастическими процессами [11] и пр.

В наибольшей степени теория оптимальной фильтрации развита для класса стохастических систем, описываемых семимартингалами. В [12] получена формула, описывающая эволюцию УМО семимартингала относительно наблюдаемого семимартингала. Формула имеет абстрактный вид, а для ее применения на практике она нуждается в спецификации для конкретного класса систем наблюдения.

Для численной реализации самыми простыми являются оптимальные фильтры, представимые в виде решения конечномерной замкнутой системы уравнений. К этому классу можно отнести линейные гауссовские системы [13], марковские скачкообразные процессы (МСП) с наблюдениями различного типа [14, 15], некоторые специальные нелинейные стохастические дифференциальные системы (СДС) [16]. К сожалению, класс подобных систем достаточно узок [17].

Решение задачи оптимальной фильтрации в форме описания условного распределения состояния более сложно как в теоретическом плане, так и в последующей численной реализации. Однако такой подход позволяет найти решение задачи для более широкого класса СДС. Для описания распределения обычно используются нормированная условная плотность [18], ее ненормированный вариант [19], а также условная характеристическая функция [20].

Уравнения Кушнера–Стратоновича и Закаи, описывающие эволюцию условной плотности, существенным образом опираются на гирсановскую замену вероятностной меры. Данный инструмент, в свою очередь, ограничивает класс систем наблюдения, для которых эти уравнения имеют место: интенсивность шумов в наблюдениях не может зависеть от оцениваемого состояния. Таким образом, обширный класс интересных для практики систем исключается из рассмотрения из-за технических ограничений. Задачи оптимальной фильтрации в системах с мультипликативными шумами (иначе, с шумами, зависящими от состояния) предпринимались различными авторами [21–24]. В случае, когда оцениваемый процесс представляет собой МСП с конечным множеством состояний, а непрерывные наблюдения содержат мультиплика-

тивные шумы, задача фильтрации была решена в [25, 26], а алгоритимы ее численного решения исследованы в [27].

Целью данной статьи является решение задачи оптимальной фильтрации состояний более широкого класса специальных марковских скачкообразных процессов (СМСП) [28, 29] по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами. Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен класс СМСП и его мартингальное разложение, необходимое для вывода уравнений оптимальной фильтрации. Раздел 3 содержит описание исследуемой стохастической системы наблюдения и постановку задачи оптимальной фильтрации. Сформулированы дополнительные ограничения, обеспечивающие корректность уравнений, характеризующих эволюцию условного распределения состояния. Одним из них является линейная зависимость диффузии от состояния.

В разделе 4 представлены ряд вспомогательных утверждений и решение частных задач, служащих выводу уравнений оптимальной фильтрации. Предложено эквивалентное преобразование, трансформирующее исходные наблюдения в совокупность диффузионного процесса с единичной диффузией и функции от оцениваемого состояния, наблюдаемой без шума. Получен вид условного распределения случайного вектора относительно его аффинной функции. Помимо этого, выведен вид условного распределения дискретной компоненты непрерывно-дискретного случайного вектора относительно его билинейной функции.

Раздел 5 является основным: в нем представлены утверждения, характеризующие эволюцию условного распределения СМСП относительно имеющихся наблюдений. Показано, что на промежутках постоянства интенсивности шумов наблюдений оно сосредоточено на некотором линейном многообразии, определяемом этой интенсивностью. Предложена конструкция мер, относительно которых условное распределение будет абсолютно непрерывным. Эволюция соответствующей условной плотности описывается рекуррентно связанной системой стохастических интегро-дифференциальных уравнений на промежутках постоянства бесшумовых наблюдений и интегральных преобразований – в моменты скачков этих наблюдений.

Наличие бесшумовых наблюдений дает возможность точного восстановления (идентификации) комбинации компонент или всего вектора состояния СМСП. Раздел 6 представляет термин идентифицируемости, саму ее возможность, а также два ее важных частных случая. В разделе 7 приведены заключительные замечания и выводы, а также анонсирована цель второй части работы – численное решение представленной задачи фильтрации.

2. Представление класса специальных марковских скачкообразных процессов

Класс СМСП, используемых в работе в качестве состояний стохастических систем наблюдения, был предложен в [29] и является обобщением про-

цессов из [28]. Рассмотрим процесс $Z_t = \operatorname{col}(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{R}^{N+M}$, содержащий две блочные компоненты. Первая компонента θ_t представляет собой МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \ldots, e_N\}$, матрицей интенсивностей переходов (МИП) $\Lambda(t) = \|\Lambda_{ij}(t)\|_{i,j=\overline{1,N}}$ и начальным распределением $p_0 = \operatorname{col}(p_0^1, \ldots, p_0^N)$.

Вторая компонента $Y_t \in \mathbb{R}^M$ также является процессом с кусочно-постоянными траекториями, терпящим скачки синхронно с θ_t. Если $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность моментов скачков θ_t, то при известной траектории θ_t последовательность $\{Y_{\tau_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ составлена из независимых случайных векторов, условное распределение которых определяется вектором $\Pi(\cdot) = \operatorname{col}(\Pi^1(\cdot), \ldots, \Pi^N(\cdot))$ известных вероятностных распределений на $\mathbb{R}^M$: $\mathsf{P}\{Y_{\tau_i} \in B \mid \theta_{\tau_i} = e_n\} = \Pi^n(B)$ для $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $n = \overline{1,N}$. Распределение начального условия Y_0 определяется с помощью $\Pi_0(\cdot) = \operatorname{col}(\Pi_0^1(\cdot), \ldots, \Pi_0^N(\cdot))$: $\mathsf{P}\{Y_0 \in B \mid \theta_0 = e_n\} = \Pi_0^n(B)$. Далее рассматривается последовательность скачков $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, где $\tau_0 \triangleq 0$.

В работе также используются следующие обозначения:

- $\operatorname{vec}(A) \triangleq \mathbb{R}^{N\times M} \to \mathbb{R}^{NM}$ – операция векторизации матрицы, ставящая в соответствие матрице A вектор-столбец – запись A по столбцам;
- $\operatorname{vec}^{-1}(a) \triangleq \mathbb{R}^{NM} \to \mathbb{R}^{N\times M}$ – операция, обратная векторизации, ставящая в соответствие NM-мерному вектору a матрицу A размерности $N \times M$;
- $A^{1/2}$ – квадратный корень симметрической матрицы A;
- I – единичная матрица подходящей размерности;
- $\mathbf{I}(t)$ – единичная ступенчатая функция;
- $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{C}$;
- $\boldsymbol{\lambda}(t) \triangleq \operatorname{row}(\Lambda_{11}(t), \ldots, \Lambda_{NN}(t))$ – строка, составленная из диагональных элементов матрицы $\Lambda(t)$, а также $\overline{\Lambda}(t) \triangleq \Lambda(t) - \operatorname{diag}\boldsymbol{\lambda}(t)$;
- любая функция $f(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(e,y) = \overline{f}(y)e$, где $\overline{f}(y) \triangleq \operatorname{row}(f(e_1,y), \ldots, f(e_N,y))$;
- $\mathsf{E}_f^n \triangleq \int\limits_{\mathbb{R}^M} f(e_n,y)\Pi^n(dy)$, $\quad \mathsf{E}_f = \operatorname{col}(\mathsf{E}_f^1, \ldots, \mathsf{E}_f^N) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \operatorname{diag}\overline{f}(y)\Pi(dy)$;
- $\lambda(dy)$, $\lambda^M(dy)$ – мера Лебега на $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ (верхний индекс используется, если необходимо подчеркнуть размерность пространства, на котором определена мера).

Процесс Z_t является марковским [29].

Если $f = f(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, у которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^M} |\overline{f}^{\top}(y)|(\Pi(dy) + \Pi_0(dy)) < \infty, \tag{1}$$

то функция от СМСП $f(Z_t) = f(\theta_t, Y_t)$ допускает единственное разложение

$$f(\theta_t, Y_t) = f(\theta_0, Y_0) + \int_0^t [\overline{f}(Y_u)\mathrm{diag}\,\boldsymbol{\lambda}(u) + E_f^\top \overline{\Lambda}^\top(u)]\theta_u du + M_t^f, \tag{2}$$

где M_t^f – некоторый мартингал.

3. Постановка задачи фильтрации

На каноническом базисе с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ Винера–Пуассона [30] рассматривается система наблюдения, содержащая

- СМСП $Z_t = \mathrm{col}\,(\theta_t, Y_t) \in \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M$ – скрытое состояние системы,
- наблюдаемый процесс $\xi_t \in \mathbb{R}^K$ с почти наверное (п.н.) непрерывными траекториями.

В качестве оцениваемого полезного сигнала выступает индикаторная функция $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t)$ множества $\mathcal{C} \in 2^{\mathbb{S}^N} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$. Заметим, что $\mathcal{C}$ представимо в виде

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{C}^n, \tag{3}$$

где $\mathcal{C}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ имеет смысл «сечения» множества $\mathcal{C}$ «плоскостью» $e = e_n$.

Исследуемая стохастическая система наблюдения имеет вид

$$\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_t) = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Z_0) + \int_0^t [\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}^\top(Y_u)\mathrm{diag}\,\boldsymbol{\lambda}(u) + \Pi^\top(\mathcal{C})\overline{\Lambda}^\top(u)]\theta_u du + M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}, \tag{4}$$

$$\xi_t = \int_0^t g(Z_s)ds + \int_0^t h^{1/2}(Z_s)dw_s. \tag{5}$$

Уравнение (4) является частным случаем разложения (2): в нем $\overline{\mathbf{I}}_{\mathcal{C}}(y) \triangleq \triangleq \mathrm{row}(\mathbf{I}_{\mathcal{C}^1}(y), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{C}^N}(y))$, $\Pi(\mathcal{C}) \triangleq \mathrm{col}\,(\Pi^1(\mathcal{C}^1), \ldots, \Pi^N(\mathcal{C}^N))$, а $M_t^{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}$ – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал.

В наблюдениях (5) $g(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^K$ – вектор-функция, определяющая снос, $h(e, y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{K\times K}$ – матричнозначная функция со значениями во множестве симметрических неотрицательно определенных матриц задает интенсивность шумов в наблюдениях, а $w_t \in \mathbb{R}^K$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс.

Пусть $\mathsf{O}_t \triangleq \{\xi_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ – естественный поток σ-алгебр, порожденный доступными наблюдениями, а $\mathcal{O}_t \triangleq \mathsf{O}_{t+} \triangleq \bigcap_{s:\, t<s} \mathsf{O}_s$ – его замыкание справа.

Задача оптимальной фильтрации состояния СМСП Z_t заключается в нахождении его условного распределения относительно потока $\mathcal{O}_t$.

Исходный поток $\{\mathsf{O}_t\}$ не обладает свойством непрерывности справа [26, 31], поэтому оценивание предлагается проводить относительно замыкания справа $\mathcal{O}_t$ этого потока [12]. С теоретической точки зрения подобное замыкание

носит чисто технический характер, обеспечивая легитимность использования математического аппарата стохастического анализа. На практике в зависимости от схемы поступления наблюдений и процедуры их использования это замыкание означает трансформацию исходной задачи фильтрации либо в сглаживание с фиксированным малым запаздыванием, либо в прогнозирование на малый фиксированный шаг. В то же время при наличии наблюдений (5), дискретизованных по времени с шагом Δ_t, их оптимальная обработка позволяет в пределе при $\Delta_t \to 0$ получить условное распределение Z_t относительно исходного потока $\{\mathsf{O}_t\}$ [32].

Второе слагаемое в (5) в разных источниках именуется мультипликативным шумом (*multiplicative noise*) [25, 33, 34], шумом, зависящим от состояния (*state-dependent noise*) [22] или шумом, зависящим от сигнала (*signal-dependent noise*) [24]. Первый термин выглядит предпочтительнее по следующей причине. С инженерной точки зрения в (5) присутствуют *два* полезных сигнала, содержащих информацию об оцениваемом состоянии – это функции $g(Z_t)$ и $h^{1/2}(Z_t)$. Первый сигнал интегрируется без искажений, а второй в процессе интегрирования искажается путем *умножения* на белый шум. Наличие мультипликативных шумов в непрерывных наблюдениях, с одной стороны, значительно усложняет процедуру оптимального оценивания, с другой – позволяет коренным образом повысить ее точность.

Компонента θ_t и весь СМСП Z_t могут быть в эквивалентной форме описаны в виде мультивариантного точечного процесса (МТП) $\Theta = \{(\tau_i, \boldsymbol{\theta}_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$, где $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ – последовательность моментов скачков θ_t, а $\boldsymbol{\theta}_i \triangleq \theta_{\tau_i}$ – значение процесса θ_t в момент i-го скачка. Пусть $\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \sigma\{(\boldsymbol{\theta}_j, \tau_j),\ 0 \leqslant j \leqslant i\}$ – естественное семейство σ-алгебр, порожденное МТП Θ. Известно [35] соотношение между потоком $\{\mathcal{F}_t^{\theta}\}_{t\geqslant 0}$ и семейством $\{\mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$: $\mathcal{F}_{\tau_i}^{\theta} \equiv \mathcal{F}_i^{\boldsymbol{\theta}}$. Пусть $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ – последовательность $M \times N$-мерных независимых случайных матриц, компоненты которых также независимы и имеют распределения Π_0 при $i = 0$ и Π при $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathsf{P}\{\mathbf{Y}_0 e_n \in \mathcal{C}\} = \Pi_0^n(\mathcal{C}), \quad \mathsf{P}\{\mathbf{Y}_i e_n \in \mathcal{C}\} = \Pi^n(\mathcal{C}) \quad \forall\, i \in \mathbb{N},\ \mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M).$$

Для последующего корректного вывода уравнений, характеризующих эволюцию условного распределения СМСП, необходимо уточнить свойства системы (4) и (5).

А. В рассматриваемом пространстве Винера–Пуассона компонента Y_t процесса Z_t связана с последовательностью $\mathbf{Y}$ соотношением $Y_{\tau_i} = \mathbf{Y}_i\boldsymbol{\theta}_i$.

Б. Компоненты МИП $\Lambda(t)$ представляют собой кусочно-непрерывные функции.

В. Меры $\Pi_0^n(\cdot)$ и $\Pi^n(\cdot)$ абсолютно непрерывны по мере Лебега с плотностями $\pi_0^n(\cdot)$ и $\pi^n(\cdot)$; ниже используются обозначения $\pi_0(y) = \mathrm{col}\,(\pi_0^1(y), \ldots, \pi_0^N(y))$ и $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$. При этом носитель $\mathcal{D}$ распределения Y_t – ограниченное множество.

Г. Функция $g(e,y)$ непрерывна по второму аргументу, а также

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} g^\top(e_n,y) g(e_n,y) \left(\pi_0^n(y) + \pi^n(y)\right) \lambda(dy) < \infty.$$

Д. Интенсивность шумов в наблюдениях линейна по компоненте y, т.е. функция $h(e,y) : \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^{K\times K}$ такова, что

$$\operatorname{vec}\left(h(e,y)\right) \triangleq H(e,y) = \sum_{n=1}^{N} e^\top e_n \left(\Gamma_n y + \gamma_n\right), \tag{6}$$

где $\{\Gamma_n\}_{n=\overline{1,N}}$ – известные неслучайные матрицы размерности $K^2 \times M$, а $\{\gamma_n\}_{n=\overline{1,N}}$ – K^2-мерные вектор-столбцы.

Е. Интенсивность шумов в наблюдениях равномерно невырождена: существует такая $\alpha > 0$, что для $\forall\, y \in \mathcal{D}$ и $n = \overline{1,N}$

$$h(e_n,y) \geqslant \alpha I.$$

Условие А гарантирует зависимость распределения Y_{τ_i} только от значения θ_{τ_i} и условную независимость различных сечений последовательности $\{Y_{\tau_i}\}$ при фиксированной траектории $\{\theta_{\tau_i}\}$. Подобное требование вполне естественно для скрытых марковских моделей [15]. Условие Б обеспечивает представление матрицы переходных вероятностей компоненты θ_t с помощью решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, а также справедливость мартингального разложения (4). Условие В гарантирует существование плотности распределения компоненты Y_t. Ограниченность носителя распределения $\mathcal{D}$ связана с обеспечением отделимости от нуля интенсивности шумов в непрерывных наблюдениях. Если $\mathcal{D}$ ограничен, то это позволяет проще построить функцию $h(e,y)$, обладающую свойством неотрицательной неопределенности. Условие Г обеспечивает конечность второго момента наблюдений. Это в свою очередь гарантирует корректность СДУ, описывающего эволюцию условного математического ожидания (УМО) произвольного оцениваемого процесса. Условие Д упрощает структуру носителя условного распределения состояния Z_t. Условие Е – равномерная невырожденность шумов – также стандартно в задачах фильтрации [32].

В целом условия А–Е не представляются чрезмерно обременительными и не сокращают значительно круг практических задач оценивания, которые могут быть решены с помощью представляемых результатов.

4. Вспомогательные задачи и утверждения

Предварим основные результаты работы утверждениями, позволяющими получить уравнения условного распределения состояния СМСП относительно имеющихся наблюдений.

Рассмотрим преобразование наблюдений $\xi \to (\varkappa, \varpi)$:

$$\varkappa_t \triangleq \operatorname{vec}\left(\frac{d\langle \xi, \xi\rangle_u}{du}\Big|_{u=t+}\right) = \operatorname{vec}(h(Z_t)) = \sum_{n=1}^{N} e_n^{\top}\theta_t\left(\Gamma_n Y_t + \gamma_n\right), \tag{7}$$

$$\varpi_t \triangleq \int_0^t \left(\operatorname{vec}^{-1}(\varkappa_s)\right)^{-1/2} d\xi_s = \int_0^t \underbrace{h^{-1/2}(Z_s)g(Z_s)}_{\triangleq G(Z_s)}\, ds + W_t, \tag{8}$$

где W_t – некоторый $\mathcal{F}_t$-согласованный винеровский процесс [32].

Лемма 1. Для любого $t \geqslant 0$ имеет место равенство σ-алгебр, порожденных исходными и преобразованными наблюдениями: $\sigma\{\varkappa_s, \varpi_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\} = \mathcal{O}_t$.

Истинность леммы следует из того, что можно представить трансформации исходных наблюдений в преобразованные (см. (7) и (8)), а также обратное преобразование $\xi_t = \int_0^t \left(\operatorname{vec}^{-1}(\varkappa_s)\right)^{1/2} d\varpi_s$.

Замечание 1. Условное распределение относительно естественной фильтрации $\{\mathsf{O}_t\}$, порожденной процессом наблюдений, может быть построено как предел некоторых аппроксимаций. Они будут представлены во второй части работы. Явный вид такого условного распределения, равно как и уравнения типа Закаи или Кушнера–Стратоновича, описывающих его эволюцию, в настоящее время не получены. Фильтрация $\{\mathsf{O}_t\}$ незамкнута справа, что не дает возможности использования для вывода уравнений оптимальной нелинейной фильтрации эффективного математического аппарата теории мартингалов. Требование замкнутости справа фильтрации, порожденной наблюдениями, стандартно для задач оптимальной фильтрации [12, с. 243].

Замечание 2. Разница между σ-алгебрами O_t и $\mathcal{O}_t$ хорошо видна при $t = 0$. Действительно, $\mathsf{O}_t = \sigma\{\xi_0\} = \{\Omega, \varnothing\}$ – тривиальная σ-алгебра, в то время как $\mathcal{O}_0 = \sigma\{\varpi_0, \varkappa_0\} = \sigma\{\varkappa_0\} \neq \{\Omega, \varnothing\}$. Из этого следует, что результаты условного осреднения относительно O_0 и $\mathcal{O}_0$ не совпадают.

Преобразование, переводящее исходные наблюдения с мультипликативными шумами в совокупность бесшумовых наблюдений и наблюдений со стандартными винеровским процессом в качестве аддитивного шума, впервые было предложено в [22]. Предлагаемый в данной работе вариант трансформации (7) и (8) имеет существенное отличие: компонента новых наблюдений $\varkappa_t$, не содержащая шума, вычисляется путем взятия *производной справа* от квадратической характеристики исходных наблюдений. Этим обеспечивается возможность получить значение функции от текущего состояния $\varkappa(Z_t)$, а не его предел слева $\varkappa(Z_{t-})$.

Решим далее две вспомогательные задачи, необходимые для оптимальной обработки бесшумовых наблюдений $\varkappa$ при вычислении оценки оптимальной фильтрации.

Задача 1. Пусть $Y(\omega) \in \mathbb{R}^M$ – случайный вектор с плотностью распределения $\pi(y)$. Необходимо найти условное распределение Y относительно наблюдаемой аффинной функции Y, т.е. относительно $\varkappa(\omega) = \Gamma Y(\omega) + \gamma$, где Γ и γ – известные матрица размерности $K^2 \times M$ и K^2-мерный столбец.

При решении данной задачи используются следующие обозначения:

– $M' \triangleq \mathrm{rk}(\Gamma)$,

– $P = [P'\ P'']$ – ортогональная матрица размерности $M \times M$, в которой подматрица P' размерности $M \times M'$ составлена из единичных базисных векторов подпространства $\mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$, а подматрица P'' размерности $M \times M''$ – из аналогичных векторов подпространства $\mathrm{Ker}\,(\Gamma)$,

– $v \triangleq \left[\begin{smallmatrix} v' \\ v'' \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^M$ – вектор, содержащий M'-мерную блочную компоненту v' и M''-мерную блочную компоненту v'',

– $\mathcal{K} \triangleq \{\kappa \in \mathbb{R}^{K^2} : \exists\, y \in \mathbb{R}^M,\ \Gamma y + \gamma = \kappa\}$ – образ $\mathbb{R}^M$ при преобразовании $y \to \Gamma y + \gamma$,

– $\mathcal{Y}_\kappa \triangleq \{y \in \mathbb{R}^M : \Gamma y + \gamma = \kappa\}$ – полный прообраз κ,

– $\rho(v') \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } M' = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv''), & \text{если } 0 < M' < M, \\ \pi(v'), & \text{если } M' = M, \end{cases}$

– на $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ определяется семейство мер, параметризованное $\kappa \in \in \mathbb{R}^{K^2}$ – возможной реализацией наблюдения $\varkappa$:

$$\mu_{Y|\varkappa}(dy|\kappa) = \begin{cases} \lambda(dy)\text{– мера Лебега на } \mathbb{R}^M, & \text{если } M' = 0, \\ \Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa)\text{– мера Лебега } \lambda^{M''}(\cdot), \text{ сосредоточенная на } \mathcal{Y}_\kappa, & \\ & \text{если } 0 < M' < M, \\ \delta_{\Gamma^+(\kappa-\gamma)}(dy)\text{– мера Дирака, сосредоточенная} & \\ \text{в точке } \Gamma^+(\kappa - \gamma), & \text{если } M' = M. \end{cases}$$

Лемма 2. Условное распределение $\mathsf{P}_{Y|\varkappa}$ вектора Y относительно $\varkappa$ абсолютно непрерывно по мере $\mu_{Y|\varkappa}$ и определяется производной Радона–Никодима

$$\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa) = \tag{9}$$

$$= \begin{cases} \pi(y), & \textit{если } M' = 0, \\ \pi(y)\rho^+((P')^\top(\Gamma^+(\varkappa - \gamma))\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y), & \textit{если } 0 < M' < M, \quad \mathsf{P}\textit{-п.н.} \\ 1, & \textit{если } M' = M, \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Задача 2. Имеется блочный случайный вектор $Z(\omega) = \mathrm{col}\,(\theta(\omega), Y(\omega))$: $\theta(\omega) \in \mathbb{S}^N$, $Y(\omega) \in \mathbb{R}^M$. Распределение Z определяется соотношением

$$\mathsf{P}\{\theta = e_n, Y \in \mathcal{C}\} = p^n \int_{\mathcal{C}} \pi^n(y)\lambda(dy) \quad \text{для } \forall\ n = \overline{1, N},\ \mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M),$$

где $p \triangleq \mathrm{col}\,(p^1, \ldots, p^N)$ – вектор дискретного распределения, $\pi(y) = \mathrm{col}\,(\pi^1(y), \ldots, \pi^N(y))$ – вектор, составленный из плотностей вероятности.

Имеется наблюдение $\varkappa(\omega) = \sum_{n=1}^N e_n^\top \theta(\omega)(\Gamma_n Y(\omega) + \gamma_n)$. Необходимо найти условное распределение θ относительно $\varkappa$.

Как и в предыдущей задаче, для всех $n = \overline{1,N}$ определим

- M_n', M_n'', P_n, v_n, $\mathcal{K}^n$, $\mathcal{Y}_\varkappa^n$, $\mu_{Y|\varkappa}^n(\cdot)$, $\rho_n(\cdot)$ – объекты, аналогичные используемым в задаче 1 и соответствующие разным парам (Γ_n, γ_n), $n = \overline{1,N}$,
- $\mathcal{N}' \triangleq \{n = \overline{1,N} :\ M_n' = 0\}$, $\mathcal{N}'' \triangleq \{1, \ldots, N\} \backslash \mathcal{N}'$,
- набор мер $\mu_\varkappa^n(\cdot)$, $n = \overline{1,N}$ на $(\mathbb{R}^{K^2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2}))$:

$$\mu_\varkappa^n(d\kappa) \triangleq$$
$$\triangleq \begin{cases} \delta_{\gamma_n}(d\kappa) \text{ – мера Дирака, сосредоточенная в точке } \gamma_n, & \text{если } n \in \mathcal{N}', \\ \Lambda_\varkappa^n(d\kappa) \text{ – мера Лебега } \lambda^{M''}(\cdot), \text{сосредоточенная на } \mathcal{K}^n, & \text{если } n \in \mathcal{N}'', \end{cases}$$

а также суммарную меру $\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) \triangleq \sum_{n=1}^n \mu_\varkappa^n(d\kappa)$.

Заметим, что $\mu_\varkappa^n \ll \mu_\varkappa^\Sigma$ для всех $n = \overline{1,N}$.

Лемма 3. Условное распределение θ относительно $\varkappa$ определяется формулой

$$\mathsf{P}\{\theta = e_n \mid \varkappa\} = \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\varkappa - \gamma_n)) \dfrac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\varkappa)}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_\varkappa^\ell}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\varkappa)}, \qquad \mathsf{P}\text{-}n.н. \tag{10}$$

Доказательство леммы 3 дано в Приложении.

5. Уравнения оптимальной фильтрации

Для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ обозначим $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}} \triangleq \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}}^n$ – множества полных прообразов бесшумовых наблюдений $\varkappa_t$ в моменты их скачков σ_i, а также семейство мер $\mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_{\sigma_i}) \triangleq \sum_{n=1}^N \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_{\sigma_i})$.

Следующее утверждение определяет условное распределение Z_0 относительно $\mathcal{O}_0$ – оценку фильтрации в начальный момент времени.

Теорема 1. Условное распределение состояния $Z_0 = \mathrm{col}\,(\theta_0, Y_0)$ относительно $\mathcal{O}_0$ сосредоточено на множестве $\mathfrak{Y}_{\varkappa_0}$ и абсолютно непрерывно относительно меры $\mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(\cdot|\varkappa_0)$. Распределение описывается функцией $\widehat{\psi}(0,y) = \mathrm{col}\,(\widehat{\psi}^1(0,y), \ldots, \widehat{\psi}^N(0,y))$:

$$\mathsf{P}\{\theta_0 = e_n,\ Y_0 \in \mathcal{C}\} = \int_{\mathcal{C}} \widehat{\psi}^n(0,y) \mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_0), \quad \mathsf{P}\text{-}n.н., \tag{11}$$

где

$$\widehat{\psi}^n(0,y)=\mathbf{I}_{\mathcal{Y}^n_{\varkappa_0}}(y)\frac{p^n\pi^n_0(y)\rho_n((P'_n)^\top\Gamma^+_n(\varkappa_0-\gamma_n))\dfrac{d\mu^n_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(\varkappa_0)\dfrac{d\mu^n_{Y|\varkappa}}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}p^\ell\pi^\ell_0(y)\rho_\ell((P'_\ell)^\top\Gamma^+_\ell(\varkappa_0-\gamma_\ell))\dfrac{d\mu^\ell_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(y|\varkappa_0)},\quad n=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Пересчет условного распределения состояния СМСП в момент σ_i, $i\in\mathbb{N}$ выполняется по аналогичной формуле.

Теорема 2. Для любого $i\in\mathbb{N}$ условное распределение состояния $Z_{\sigma_i}=\operatorname{col}(\theta_{\sigma_i},Y_{\sigma_i})$ относительно $\mathcal{O}_{\sigma_i}$ сосредоточено на множестве $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_i}}$ и абсолютно непрерывно относительно меры $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot|\varkappa_{\sigma_i})$. Распределение описывается функцией $\widehat{\psi}(\sigma_i,y)=\operatorname{col}(\widehat{\psi}^1(\sigma_i,y),\dots,\widehat{\psi}^N(\sigma_i,y))$:

$$\mathsf{P}\{\theta_{\sigma_i}=e_n,\ Y_{\sigma_i}\in\mathcal{C}\}=\int\limits_{\mathcal{C}}\widehat{\psi}^n(\sigma_i,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_i}),\quad \mathsf{P}\text{-}п.н., \tag{13}$$

где

$$\widehat{\psi}^n(\sigma_i,y)=\mathbf{I}_{\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_i}}}(y)\frac{\widehat{\theta}^n_{\sigma_i-}\pi^n(y)\dfrac{d\mu^n_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(\varkappa_{\sigma_i})\dfrac{d\mu^n_{Y|\varkappa}}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_i})}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\widehat{\theta}^\ell_{\sigma_i-}\pi^\ell(y)\rho_\ell((P'_\ell)^\top\Gamma^+_\ell(\varkappa_{\sigma_i}-\gamma_\ell))\dfrac{d\mu^\ell_\varkappa}{d\mu^\Sigma_\varkappa}(y|\varkappa_{\sigma_i})},\quad n=\overline{1,N}, \tag{14}$$

и $\widehat{\theta}^n_{\sigma_i-}\triangleq\mathsf{E}\left\{e_n^\top\theta_{\sigma_i}|\mathcal{O}_{\sigma_i-}\right\}=\mathsf{E}\left\{e_n^\top\theta_{\sigma_i}|\mathsf{O}_{\sigma_i}\right\}$.

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Замечание 3. Формулы (12) в теореме 1 и (14) в теореме 2 выглядят сходными. Это сходство может быть неформально объяснено марковским свойством составного процесса $\operatorname{col}(Z_t,\xi_t)$. Тем не менее смысл их и способ доказательства совершенно различен. Формула (12) представляет вид условного распределения начального условия Z_0 относительно конечномерного случайного вектора $\varkappa_0$, в то время как (14) задает условное распределение состояния Z_{σ_i} в момент i-го скачка процесса $\varkappa$ относительно наблюдений траекторий $\operatorname{col}(\varpi_t,\varkappa_t)$ до момента σ_i. Несмотря на сходство формул, техника их доказательства различна.

Следующее утверждение представляет решение поставленной задачи оптимальной фильтрации.

Теорема 3. На интервалах постоянства $[\sigma_{i-1},\sigma_i)$ $(i\in\mathbb{N})$ *бесшумовых наблюдений* $\varkappa_t$ *условное распределение СМСП* Z_t *сосредоточено на множествах* $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$ *(см. теоремы 1 и 2), абсолютно непрерывно относительно меры* $\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})$ *и определяется плотностью* $\widehat{\psi}(t,y)=$ $=\operatorname{col}(\widehat{\psi}^1(t,y),\dots,\widehat{\psi}^N(t,y))$*: для* $\forall\ n=\overline{1,N}$, $\mathcal{C}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$

$$\mathsf{P}\left\{\theta_t=e_n,Y_t\in\mathcal{C}|\mathcal{O}_t\right\}=\int\limits_{\mathcal{C}}\widehat{\psi}^n(t,y)\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}),\quad \mathsf{P}\text{-}n.н.$$

Здесь

$$\widehat{\psi}^n(t,y)=\frac{\widetilde{\psi}^n(t,y)}{\sum\limits_{\ell=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\widetilde{\psi}^{\ell}(t,v)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}})},\quad n=\overline{1,N},\tag{15}$$

а функция ненормированной плотности $\widetilde{\psi}(t,y)\triangleq\operatorname{col}(\widetilde{\psi}^1(t,y),\dots,\widetilde{\psi}^N(t,y))$, $t\in[\sigma_{i-1},\sigma_i)$ *представляет собой решение системы уравнений*

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(t,y)=\widetilde{\psi}(\sigma_{i-1},y)+\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\Bigg[&\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s))\widetilde{\psi}(s,y)+\\&+\frac{d\lambda^M}{d\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))\operatorname{diag}(\pi(y))\overline{\Lambda}^{\top}(s)\widetilde{V}_s\Bigg]ds+\\&+\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\operatorname{diag}(\widetilde{\psi}(s,y))\left[\overline{G}(y)-\widetilde{G}_s\mathbf{1}\right]^{\top}(d\varpi_s-\widetilde{G}_sds),\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$\overline{G}(y)\triangleq\begin{bmatrix}G^1(e_1,y)&\dots&G^1(e_N,y)\\\dots&\dots&\dots\\G^K(e_1,y)&\dots&G^K(e_N,y)\end{bmatrix},\qquad\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\triangleq\begin{bmatrix}\Pi^1(\mathcal{Y}^1_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\\\dots\\\Pi^N(\mathcal{Y}^N_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_t&\triangleq\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\begin{bmatrix}G^1(e_n,v)\\\dots\\G^K(e_n,v)\end{bmatrix}\widetilde{\psi}^n(t,v))\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}}),\\\widetilde{V}_t&\triangleq\sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M}e_n\widetilde{\psi}^n(t,y))\mu^{\Sigma}_{\varkappa}(dv|\varkappa_{\sigma_{i-1}}).\end{aligned}\tag{17}$$

Начальная плотность $\widehat{\psi}(0,y)$ *определяется формулой* (12)*, а пересчет плотности* $\widehat{\psi}(\sigma_i,y)$ *в момент* σ_i *скачка бесшумового наблюдения производится по формуле* (14)*.*

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

Замечание 4. Теорема 3 совместно с теоремами 1 и 2 описывает эволюцию плотности условного распределения $\widehat{\psi}(t,y)$ СМСП Z_t. Начальное распределение вычисляется с помощью интегральной формулы (12) (см. теорему 1). При этом носитель распределения – линейное многообразие $\mathfrak{Y}_{\varkappa_0}$ также полностью определяется бесшумовым наблюдением $\varkappa_0$ в начальный момент времени. Этот носитель распределения сохраняется до момента σ_1 следующего скачка $\varkappa$. На интервале времени $[0;\sigma_1)$ плотность $\widehat{\psi}(t,y)$ определяется решением системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений (16), (17) и условием нормировки (15). В правой части (16) присутствует обновляющий процесс со стохастическим дифференциалом $d\varpi_t - \widetilde{G}_t dt$. В момент σ_1 согласно теореме 2 по наблюдению $\varkappa_{\sigma_1}$ происходит определение линейного многообразия $\mathfrak{Y}_{\varkappa_1}$ – носителя условного распределения на полуинтервале $[\sigma_1;\sigma_2)$. Условная плотность распределения $\widehat{\psi}(\sigma_1,y)$ в этот момент вычисляется по интегральной формуле (14). Далее описанная последовательность решения интегро-дифференциальных уравнений и вычисления интегральных соотношений производится в цикле, соответствующем интервалам $[\sigma_{i-1};\sigma_i)$.

6. Об идентифицируемости состояний

Возможность трансформации исходных наблюдений (7), в результате которой возникают бесшумовые компоненты $\varkappa_t$, позволяет решить задачу точного восстановления всего состояния СМСП Z_t или некоторых комбинаций его компонент.

Определение 1. Случайный процесс

$$\beta_t = \beta(Z_t) = \alpha\theta_t + AY_t \tag{18}$$

– линейная функция от СМСП Z_t – называется точно идентифицируемым по наблюдениям ξ_t, если $\mathsf{E}\{\beta_t|\mathcal{O}_t\} = \beta_t$, P*-п.н.*

Именно наличие мультипликативных шумов в наблюдениях позволяет точно восстанавливать состояния и компоненты, изначально имея лишь зашумленные наблюдения. Условия, обеспечивающие идентифицируемость β_t, определяются совокупностью следующих вероятностных и алгебраических характеристик:

- взаимного расположения носителей частных распределений $\pi_0^n(\cdot)$ и $\pi^n(\cdot)$ для различных $n = \overline{1,N}$,
- локальных матриц наблюдений Γ_n и γ_n в бесшумовых наблюдениях (7),
- матриц выхода α и A в идентифицируемом процессе β_t (18).

Представляется затруднительным сформулировать универсальные условия идентифицируемости, но ее возможность может быть исследована индивидуально в каждом конкретном случае. Для иллюстрации этого факта рассмотрим два частных случая.

Задача 3. По наблюдениям (7) необходимо идентифицировать компоненту θ_t вектора Z_t. В данном случае это означает, что в процессе β_t параметры равны: $\alpha = I$ и $A = 0$. Напомним, что $\mathcal{K}^n = \{\kappa \in \mathbb{R}^{K^2} : \exists y \in \mathbb{R}^M, \Gamma^n y + \gamma^n = \kappa\}$. Если для (7) выполнено условие

$$\sum_{i,j:i\neq j} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{K}^i}(\Gamma^i y + \gamma^i)\mathbf{I}_{\mathcal{K}^j}(\Gamma^j y + \gamma^j)(\pi_0^i(y) + \pi^i(y))dy = 0, \tag{19}$$

то компонента θ_t идентифицируема.

В качестве функции-идентификатора может выступить

$$\widehat{\theta}_t \triangleq \operatorname{col}\left(\mathbf{I}_{\mathcal{K}^1}(\varkappa_t), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{K}^N}(\varkappa_t)\right).$$

Действительно, множество допустимых значений $\varkappa_t$ представляет собой объединение линейных многообразий $\mathcal{K}^n$. Если $\Pi^n(\mathcal{K}^n \cap \mathcal{K}^i) = \Pi_0^n(\mathcal{K}^n \cap \mathcal{K}^i) \equiv 0$, то пребывание $\varkappa_t$ в данный момент времени в конкретном многообразии $\mathcal{K}^n$ с вероятностью 1 гарантирует, что $\theta_t = e_n$.

Задача 4. По наблюдениям (7) необходимо одновременно идентифицировать компоненту θ_t и линейную комбинацию AY_t компоненты Y_t (здесь A – известная матрица размерности $S \times M$). В этом случае процесс β_t имеет вид

$$\beta_t = \begin{bmatrix} I_{N\times N} \\ 0_{S\times N} \end{bmatrix} \theta_t + \begin{bmatrix} 0_{S\times N} \\ A \end{bmatrix} Y_t. \tag{20}$$

Если для (7) выполнено условие (19) совместно с условием

$$A(\Gamma^n)^+\Gamma^n = A \quad \forall\, n = \overline{1, N}, \tag{21}$$

то процесс β_t (20) идентифицируем. В качестве функции-идентификатора может выступить

$$\widehat{\beta}_t = \operatorname{col}\left(\mathbf{I}_{\mathcal{K}^1}(\varkappa_t), \ldots, \mathbf{I}_{\mathcal{K}^N}(\varkappa_t), \sum_{n=1}^{N} \mathbf{I}_{\mathcal{K}^n}(\varkappa_t) A(\Gamma^n)^+(\varkappa_t - \gamma^n)\right).$$

Действительно, условие (19) позволяет идентифицировать компоненту θ_t. В этом случае сумма в (7) превращается лишь в одно слагаемое. Условие (19) гарантирует [37] разрешимость системы $\varkappa_t = \Gamma^n Y_t + \gamma^n$ относительно AY_t.

Замечание 5. Достаточные условия идентифицируемости, представленные в задачах 3 и 4, следуют из леммы 1.

Замечание 6. Между условиями идентифицируемости и теоремой 3 имеется следующая связь. Пусть $\widehat{\psi}(t, y)$ – условное распределение процесса Z_t, определяемое решением рекуррентной системы (12), (14)–(17). Если выполнено условие (19) или комбинация (19) и (21), то P-п.н. верно равенство

$$\widehat{\beta}_t = \mathsf{E}\left\{\beta(Z_t)|\mathcal{O}_t\right\} = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} (\alpha e_n + Ay)\widehat{\psi}^n(t, y)\mu_{\varkappa}^{\Sigma}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) =$$

$$= \alpha\theta_t + AY_t = \beta(Z_t) = \beta_t.$$

Таким образом, $\widehat{\psi}(t,y)$ позволяет точно восстановить полезный сигнал β_t – линейную комбинацию состояния Z_t. С вычислительной точки зрения это означает, что можно построить такую поледовательность аппроксимаций условного распределения, что соответствующие им оценки сигнала β_t будут сколь условно близки к его истинному значению в метрике $\mathcal{L}_1$ или $\mathcal{L}_2$. Пример такого поведения оценок при выполнении условий идентифицируемости будет приведен во второй части статьи.

7. Заключение

Решена задача оптимальной фильтрации состояний класса СМСП по наблюдениям с мультипликативными шумами. Решение получено в форме условного распределения состояний относительно имеющихся наблюдений. Доказано, что данное распределение сосредоточено на меняющихся со временем линейных многообразиях. Предложен алгоритм построения специальных мер, относительно которых искомое условное распределение абсолютно непрерывно. Соответствующие плотности описываются совокупностью рекуррентно связанных стохастических интегро-дифференциальных уравнений и интегральных преобразований.

Полученные теоретические результаты в области оптимальной фильтрации могут быть применены для решения класса задач оптимального стохастического управления МСП по неполной информации. В [38, 39] представлено решение задачи управления, где в качестве доступных наблюдений выступает значение МСП, получаемое без дополнительного шума, но с известной временно́й задержкой. Рассмотрим другую задачу управления, где в качестве наблюдений выступают диффузионные процессы с мультипликативными шумами, подобные рассмотренным в данной статье, также доступные с временно́й задержкой. При выполнении условий идентифицируемости по этим наблюдениям состояние может быть восстановлено точно. Наличие задержки легитимизирует процедуру замыкания справа естественной фильтрации, порожденной наблюдениями. Возможность точного восстановления значения управляемого состояния МСП означает, что в предлагаемой задаче управления по неполной информации возможно доказать теорему разделения.

Несмотря на то, что теоретическое решение задачи фильтрации получено и для (16) существуют эффективные «послойные» алгоритмы, их итоговая численная реализация является нетривиальной задачей. Основная проблема заключается в преобразовании исходных наблюдений (7), (8). Оно предполагает последовательное выполнение двух предельных переходов. Первый заключается в вычислении квадратической характеристики семимартингала, второй – в нахождении ее производной. Аппроксимация производной от квадратической вариации, вычисленная по дискретизованным наблюдениям, обладает низкой точностью [22]. Помимо этого, для решения уравнений (16) необходимо знание носителя распределения, что невозможно из-за фактического отсутствия бесшумовых наблюдений. Тем не менее решение системы

(12), (14)–(17) может служить теоретической основой для разработки эффективных алгоритмов ее численного решения.

Во второй части работы для численного решения поставленной задачи фильтрации предлагается использовать иной подход. Его можно проиллюстрировать на примере классической задачи оптимальной фильтрации состояний линейных гауссовских дифференциальных систем. Известно, что ее решение доставляет фильтр Калмана–Бьюси [13], представляющий собой линейную СДС и систему уравнений Риккати. Обе системы в общем случае не имеют аналитического решения. Реализация фильтра Калмана–Бьюси предполагает временну́ю дискретизацию обеих систем и их последующее пошаговое численное решение. С теоретической точки зрения матричнозначная функция – решение системы Риккати всегда обладает свойствами симметричности и неотрицательной определенности. Однако в случае, когда система Риккати относится к классу жестких, ошибки численных методов ее решения нарушает эти свойства, это приводит к тому, что итоговая численная реализация фильтра Калмана–Бьюси демонстрирует недопустимо большие ошибки или вовсе разваливается. Поэтому численное решение ищется не с помощью непосредственной аппроксимации фильтра, а путем замены исходной задачи в непрерывном времени последовательностью аппроксимационных задач в дискретном времени. Для исходной системы наблюдения методом Эйлера–Маруямы строится дискретная система, для которой решение задачи оптимальной фильтрации определяется фильтром Калмана [40], имеющим гораздо больше средств контроля и управления симметричностью и неотрицательной определенностью решения системы Риккати в дискретном времени.

В [26] для численного решения задачи оптимальной фильтрации МСП с конечным множеством состояний по наблюдениям с мультипликативными шумами был предложен аналогичный подход. Он основан на построении оптимальной оценки по уже дискретизованным наблюдениям. Представлены различные численные схемы и получены характеристики точности предложенных аппроксимаций в зависимости от шага дескретизации. Эту идею предлагается использовать во второй части статьи: предложенные в ней оценки фильтрации по дискретизованным наблюдениям помимо собственной прикладной ценности являются аппроксимациями решения системы (12), (14)–(17).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Первый и третий варианты в (9) очевидны. В случае $M' = 0$ наблюдение $\varkappa(\omega) \equiv \gamma$ превращается в детерминированный вектор, и относительно такого вырожденного наблюдения условное распределение $Y(\omega)$ совпадает с безусловным. В случае $M' = M$ случайный вектор $Y(\omega)$ может быть выражен через $\varkappa(\omega)$: $Y(\omega) = \Gamma^{+}(\varkappa(\omega) - \gamma)$, поэтому условное распределение Y относительно $\varkappa$ является одноточечным и описывается соответствующей дельта-функцией Дирака. Обра-

тимся к случаю $0 < M' < M$. Из-за того что $|\det P| = 1$, следует, что $\overline{\pi}(v', v'') \triangleq \pi(P'v' + P''v'')$ представляет собой плотность распределения случайного вектора $V(\omega) = P^\top Y(\omega)$. По теореме Фубини

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma y + \gamma)\pi(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma(P'v' + P''v'') + \gamma)\pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv'')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \underbrace{\left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \overline{\pi}(v', v'')\lambda^{M''}(dv'')\right]}_{=\rho(v')} \lambda^{M'}(dv')$$

и $\rho(v')$ – частная плотность распределения подвектора $V'(\omega)$.

Из определения $\varkappa(\omega)$ следует, что его распределение сосредоточено на $\mathcal{K}$. Свойства Γ и P гарантируют, что множества $\mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$ и $\mathcal{K}$ связаны между собой взаимно однозначным соответствием: $\forall\ y \in \mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)\ \kappa = \Gamma y + \gamma \in \mathcal{K}$, и $\forall\ \kappa \in \mathcal{K}\ y = \Gamma^+(\kappa - \gamma) \in \mathrm{Ker}^{\perp}(\Gamma)$.

От интегрирования в $(\mathbb{R}^{M'}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M'}))$ по мере Лебега можно перейти к интегрированию в $(\mathbb{R}^{K^2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2}))$ по мере $\Lambda_\varkappa(\cdot)$:

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(P'v' + P''v'')\lambda^{M''}(dv'')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\mathbf{I}_{\mathcal{K}}(\kappa)\rho((P')^\top\Gamma^+(\kappa - \gamma))\Lambda_\varkappa(d\kappa).$$

Распределение вектора $\varkappa$ абсолютно непрерывно относительно $\Lambda_\varkappa(\cdot)$ и имеет плотность $\frac{d\mathsf{P}_\varkappa}{d\Lambda_\varkappa}(\kappa) = \mathbf{I}_{\mathcal{K}}(\kappa)\rho((P')^\top\Gamma^+(\kappa - \gamma))$. Построим условное распределение Y относительно $\varkappa$. В силу определения $\rho(v')$ выполняется тождество $\overline{\pi}(v', v'') \equiv \overline{\pi}(v', v'')\rho^+(v')\rho(v')$. Для произвольного $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A},\ Y \in \mathcal{C}\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\lambda(dy)\delta_{\Gamma y+\gamma}(d\kappa) = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma y + \gamma)\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(P'v' + P''v'')\overline{\pi}(v', v'')\lambda^{M''}(dv'')\right] \lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma P'v' + \gamma) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(P'v' + P''v'')\overline{\pi}(v', v'')\rho^+(v')\lambda^{M''}(dv'')\right] \rho(v')\lambda^{M'}(dv') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\pi(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\lambda^{M''}(dv'') \right] \times$$

$$\times \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\Lambda_{\varkappa}}(\kappa)\Lambda_{\varkappa}(d\kappa).$$

Внутренний интеграл в последнем выражении – интеграл по мере Лебега в $(\mathbb{R}^{M''}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{M''}))$. В то же время подынтегральное выражение является функцией от аргумента $\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v''$, сосредоточенного на M''-мерном линейном многообразии $\mathcal{Y}_\kappa$ пространства $\mathbb{R}^M$ – полном прообразе значения κ. На $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}(\mathbb{R}^M))$ представим меру $\Lambda_{Y|\varkappa}(\cdot)$, сосредоточенную на $\mathcal{Y}_\kappa$ и совпадающую с лебеговой мерой $\lambda^{M''}(\cdot)$, определенной на $\mathbb{R}^{M''}$: $\Lambda_{Y|\varkappa}(\mathcal{C}|\kappa) = \lambda^{M''}(\mathcal{C}\cap\mathcal{Y}_\kappa)$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\pi(\Gamma^+(\kappa-\gamma)+P''v'')\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\lambda^{M''}(dv'') =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa).$$

Таким образом,

$$\text{(П.1)} \quad \mathsf{P}\{\varkappa\in\mathcal{A},\ Y\in\mathcal{C}\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\kappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\kappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\kappa) \right] \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\Lambda_{\varkappa}}(\kappa)\Lambda_{\varkappa}(d\kappa).$$

Из (П.1) и определения УМО следует, что

$$\mathsf{E}\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y) \mid \varkappa\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y)\mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\varkappa-\gamma))\Lambda_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa).$$

Условное распределение абсолютно непрерывно относительно $\Lambda_{Y|\varkappa}$ с плотностью

$$\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\Lambda_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa) = \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y)\rho^+((P')^\top\Gamma^+(\varkappa-\gamma)) =$$

$$= \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_\varkappa}(y)\pi(y) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi(\Gamma^+(\varkappa-\gamma)+P''v'')dv'' \right)^+.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Из доказательства леммы 2 и определения функций $\rho_n(\cdot)$ следует, что

$$\mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A}\} = \sum_{n=1}^{N} \mathsf{P}\{\varkappa \in \mathcal{A} \mid \theta = e_n\}\,\mathsf{P}\{\theta = e_n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n y + \gamma_n)\pi^n(y)\lambda(dy) = \sum_{n\in\mathcal{N}'} p^n \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\gamma_n) +$$

$$+ \sum_{n\in\mathcal{N}''} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^{M'}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n P_n' v_n' + \gamma_n) \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{M''}} \pi^n(P_n' v_n' + P_n'' v_n'')\lambda^{M''}(dv_n'') \right] \lambda^{M'}(dv_n') =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} p^n \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa)\rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n))\mu_\varkappa^n(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{K^2}} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \sum_{n=1}^{N} p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa).$$

Таким образом, распределение $\varkappa$ абсолютно непрерывно относительно меры $\mu_\varkappa^\Sigma$ и имеет плотность

$$\frac{d\mathsf{P}_\varkappa}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa) = \sum_{n=1}^{N} p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa).$$

Проверим, что условное распределение θ относительно $\varkappa$ действительно определяется формулой (10). Для $\forall\, \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ выполняется следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta\, \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa)\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M} p^n \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n y + \gamma_n)\pi^n(y)\lambda(dy) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \dfrac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)}{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{N} p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\kappa - \gamma_\ell)) \dfrac{d\mu_\varkappa^\ell}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} p^j \rho_j((P_j')^\top \Gamma_j^+(\kappa - \gamma_j)) \frac{d\mu_\varkappa^n}{d\mu_\varkappa^\Sigma}(\kappa)\mu_\varkappa^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\kappa) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\kappa - \gamma_n)) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa)}{\sum\limits_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\kappa - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa)} \frac{d\mathsf{P}_{\varkappa}}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\kappa) \mu_{\varkappa}^\Sigma(d\kappa) =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta \mid \varkappa\right\} \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa)\right\}.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что $\mathcal{O}_0 = \mathcal{F}^{\varkappa_0}$. В силу лемм 2, 3, определения функций $\frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(\cdot)$ и $\rho_n(\cdot)$ для произвольных $n = \overline{1,N}$ и $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \mathcal{O}_0\right\} = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \mathcal{F}^{\theta_0} \vee \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_0) | \theta_0\right\} | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 \sum_{\ell=1}^N e_\ell^\top \theta_0 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^\ell}(y|\varkappa_0) \mu_{Y|\varkappa}^\ell(dy|\varkappa_0) \Big| \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(y|\varkappa_0) \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_0 | \mathcal{F}^{\varkappa_0}\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{d\mathsf{P}_{Y|\varkappa}}{d\mu_{Y|\varkappa}^n}(y|\varkappa_0) \frac{p^n \rho_n((P_n')^\top \Gamma_n^+(\varkappa_0 - \gamma_n)) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^N p^\ell \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{p^n \pi_0^n(y) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^n p^\ell \pi_0^\ell(y) \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^n(dy|\varkappa_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathbf{I}_{\mathcal{Y}_{\varkappa_0}^n}(y) \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(y) \frac{p^n \pi_0^n(y) \frac{d\mu_{\varkappa}^n}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0) \frac{d\mu_{Y|\varkappa}^n}{d\mu_{Y\varkappa}^\Sigma}(y|\varkappa_0)}{\sum\limits_{\ell=1}^n p^\ell \pi_0^\ell(y) \rho_\ell((P_\ell')^\top \Gamma_\ell^+(\varkappa_0 - \gamma_\ell)) \frac{d\mu_{\varkappa}^\ell}{d\mu_{\varkappa}^\Sigma}(\varkappa_0)} \mu_{Y|\varkappa}^\Sigma(dy|\varkappa_0),$$

из чего следует истинность формулы (11). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что $\mathcal{O}_{\sigma_i} = \mathsf{O}_{\sigma_i} \vee \vee \mathcal{F}^{\varkappa_{\sigma_i}}$ и $\mathsf{O}_{\sigma_i} = \mathcal{O}_{\sigma_i -}$. Имеет место вложение последовательностей $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} \subseteq \subseteq \{\tau_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$, поэтому рассмотрим случайное отображение $j(\omega) \to i(\omega)$: $j = j(i,\omega) = j \in \mathbb{Z}_+ : \tau_j = \sigma_i$, указывающее, какой номер скачка СМСП Z_t соответствует i-му скачку процесса наблюдений $\varkappa_t$. Имеет место следующее

включение σ-алгебр $\mathsf{O}_{\sigma_i} \subseteq \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}$. В силу свойств УМО и условия А верна цепочка равенств

$$\mathsf{P}\{\theta_{\sigma_i} = e_n,\ Y_{\sigma_i} \in \mathcal{C},\ \varkappa_{\sigma_i} \in \mathcal{A} \mid \mathcal{O}_{\sigma_i -}\} = \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_{\sigma_i}) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_i}) \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(Y_{\sigma_i}) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_i}) \mid \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}\right\} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n) \mid \mathcal{F}^{\boldsymbol{\theta}}_{j(i)} \vee \mathcal{F}^{\mathbf{Y}}_{j(i)-1} \vee \mathcal{F}^{w}_{\sigma_i}\right\} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{e_n^\top \theta_{\sigma_i} \mid \mathsf{O}_{\sigma_i}\right\} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n)\right\} =$$

$$= \widehat{\theta}^n_{\sigma_i -} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}(\mathbf{Y}_{j(i)} e_n) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\Gamma_n \mathbf{Y}_{j(i)} e_n + \gamma_n)\right\}.$$

Последнее распределение соответствует уже изученной схеме наблюдения $\varkappa = \sum_{n=1}^N e_n^\top \theta(\Gamma_n Y + \gamma_n)$, где безусловное распределение p вектора θ заменено условным распределением $\widehat{\theta}_{\sigma_i -}$. Дальнейшее доказательство истинности формул (13) и (14) аналогично доказательству формул (11) и (12) в теореме 1.

Доказательство теоремы 3. Значение бесшумовых наблюдений $\varkappa_{\sigma_{i-1}}$ в момент их $(i-1)$-го скачка ограничивает носитель распределения всего состояния Z_t не только в этот момент, но и на всем полуинтервале $[\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ до наступления следующего скачка $\varkappa$. Этим носителем является множество $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$. Само состояние Z_t на указанном промежутке может изменяться, но при этом не покидает $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$, сохраняя неизменным значение бесшумового наблюдения $\varkappa$. Для вывода уравнений эволюции условного распределения Z_t на $[\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ рассмотрим на полуоси $[\sigma_{i-1}, +\infty)$ процессы

$$V_t \triangleq \theta_t \mathbf{I}_{\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}}(Z_t) \mathbf{I}_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i)}(t), \qquad Q^{\mathcal{B}}_t \triangleq \theta_t \mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Z_t) \mathbf{I}_{[\sigma_{i-1}, \sigma_i)}(t) \tag{П.2}$$

для произвольного множества $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^N \{e_n\} \times \mathcal{B}_n \subseteq \mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$. Сам процесс Z_t и пара (Z_t, ξ_t) обладают марковским свойством и имеют càdlàg-траектории, поэтому с помощью обобщенного правила Ито [12] можно построить разложения

$$V_t = V_{\sigma_{i-1}} + \int_{\sigma_{i-1}}^t \left[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) + \operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))\overline{\Lambda}^\top(s)\right] V_s ds + M^V_t, \tag{П.3}$$

$$Q^{\mathcal{B}}_t = Q^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} + \int_{\sigma_{i-1}}^t \left[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) Q^{\mathcal{B}}_s + \operatorname{diag}(\Pi(\mathcal{B}))\overline{\Lambda}^\top(s)\right] V_s ds + M^{Q^{\mathcal{B}}}_t, \tag{П.4}$$

в которых M^V_t и $M^{Q^{\mathcal{B}}}_t$, $t \geqslant \sigma_{i-1}$, представляют собой некоторые $\mathcal{F}_t$-согласованные мартингалы.

Обозначим:

$$\widetilde{V}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{V_t | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1}, t)}\right\} = \mathsf{E}\left\{V_t | \mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_t\right\},$$

$$\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_t | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1}, t)}\right\} = \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_t | \mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}.$$

Эти процессы описываются уравнениями Фуджисаки–Каллианпура–Куниты [41]

$$\text{(П.5)}\qquad \widetilde{V}_t = \widehat{\theta}_{\sigma_{i-1}} + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda}(s)) + \operatorname{diag}(\Pi(\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}})\overline{\Lambda}^{\top}(s))\Big]\widetilde{V}_s ds + \\ + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\widetilde{V_s G_s^{\top}} - \widetilde{V}_s \widetilde{G}_s^{\top}\Big](d\varpi_s - \widetilde{G}_s ds),$$

$$\text{(П.6)}\quad \widetilde{Q}_t^{\mathcal{B}} = \widehat{Q}_{\sigma_{i-1}}^{\mathcal{B}} + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\operatorname{diag}(\boldsymbol{\lambda})\widetilde{Q}_s^{\mathcal{B}} + \operatorname{diag}(\Pi(\mathcal{B}))\overline{\Lambda}^{\top})\widetilde{V}_s\Big] ds + \\ + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \Big[\widetilde{Q_s^{\mathcal{B}} G_s^{\top}} - \widetilde{Q}_s^{\mathcal{B}} \widetilde{G}_s^{\top}\Big](d\varpi_s - \widetilde{G}_s ds),$$

в которых начальные условия $\widehat{V}_{\sigma_{i-1}}$ и $\widehat{Q}^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}}$ вычислены по формулам (12) или (14),

$$\widehat{\theta}_{\sigma_{i-1}} = \mathsf{E}\left\{\theta_{\sigma_{i-1}} | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}}\right\} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \widehat{\psi}^1(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}), \\ \cdots \\ \int\limits_{\mathbb{R}^M} \widehat{\psi}^N(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix},$$

$$\widehat{Q}^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} = \mathsf{E}\left\{Q^{\mathcal{B}}_{\sigma_{i-1}} | \mathcal{O}_{\sigma_{i-1}}\right\} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}_1} \widehat{\psi}^1(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}), \\ \cdots \\ \int\limits_{\mathcal{B}_N} \widehat{\psi}^N(\sigma_{i-1}, y)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix},$$

а для других интегрируемых функций $f(Z_t)$, встречающихся в (П.5) и (П.6), $\widetilde{f}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{f(Z_t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}} \vee \mathcal{F}^{\varpi}_{[\sigma_{i-1},t)}\right\}$.

Все сечения $\mathcal{Y}^n_{\sigma_{i-1}}$ множества $\mathfrak{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}$ – либо одноточечные, либо изоморфны евклидовым пространствам размерности M'', не большей M. Первый вариант соответствует случаю точной оценки вектора $e_n^{\top}\theta_{\sigma_{i-1}}Y_{\sigma_{i-1}}$ по бесшумовым наблюдениям $\varkappa_{\sigma_{i-1}}$, второй – решению задачи оптимальной фильтрации компоненты СМСП размерности M'' по непрерывным наблюдениям со стандартным винеровским процессом в роли шума. Во втором случае плотность условного распределения относительно меры Лебега существует и обладает определенными свойствами регулярности [42, 43]. Условия A–E из раздела 3 гарантируют выполнение условий [42, 43], поэтому для каждого процесса $e_n^{\top}\theta_t Y_t$

условное распределение – либо одноточечное, либо сосредоточено на линейном многообразии и абсолютно непрерывно относительно соответствующей меры Лебега. Чтобы объединить эти случаи используются меры $\mu^n_{Y|\varkappa}(\cdot)$ и суммарная мера $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$. Из этого следует, что условное распределение Z_t на промежутке $[\varkappa_{\sigma_{i-1}}, \varkappa_{\sigma_i})$ абсолютно непрерывно относительно меры $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$.

Выведем уравнение условной плотности относительно $\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(\cdot)$, но предварительно рассмотрим вектор $\Pi(\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) = \mathrm{col}\,(\Pi^1(\mathcal{Y}^1_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}), \dots, \Pi^N(\mathcal{Y}^N_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}))$. Из-за линейности наблюдений $\varkappa$ по Y и непрерывности распределений Π^n следует, что все компоненты $\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\sigma_{i-1}})$ принимают значение 0 или 1:

$$\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{rk}(\Gamma_n) > 0, \\ 1, & \text{если } \mathrm{rk}(\Gamma_n) = 0. \end{cases}$$

Если $\Pi^n(\mathcal{Y}^n_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}) \equiv 0$, то все носители мер $\mu^n_{Y|\varkappa}$ имеют размерность, сторого меньшую M, и поэтому $\frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}$ существует и равна 0. В противном случае хотя бы для одного номера n выполняется равенство $\mu^n_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) = \lambda^M(dy)$. Из этого можно сделать вывод, что в любом случае выполняется $\lambda^M \ll \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}$ и определена производная Радона-Никодима $\frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(\cdot)$.

Запишем уравнение (П.6), воспользовавшись теоремой Фубини и интегральным представлением УМО функций от Z_t:

$$\begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \widetilde{\psi}^1(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \widetilde{\psi}^N(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \widehat{\psi}^1(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \widehat{\psi}^N(t,y)\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \int\limits_{\mathcal{B}^1} \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \left(\Lambda_{11}\widetilde{\psi}^1(t,y) + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}} \pi^1(u)du \sum\limits_{j:j\neq 1} \Lambda_{j1}\widetilde{V}^j_s \pi^1(y) \frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \right) ds\, \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \\ \dots \\ \int\limits_{\mathcal{B}^N} \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t} \left(\Lambda_{NN}\widetilde{\psi}^N(t,y) + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathcal{Y}_{\varkappa_{\sigma_{i-1}}}} \pi^N(u)du \sum\limits_{j:j\neq N} \Lambda_{jN}\widetilde{V}^j_s \pi^N(y) \frac{d\lambda^M}{d\mu^\Sigma_{Y|\varkappa}}(y|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \right) ds\, \mu^\Sigma_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}}) \end{bmatrix} +$$

$$+\left[\begin{array}{c}\int\limits_{\mathcal{B}^1}\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\widetilde{\psi}^1(s,y)\sum\limits_{k=1}^{K}(G^k(e_1,y)-\widetilde{G}^k_s)(d\varpi^k_s-\widetilde{G}^k_s ds)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\\ \cdots\\ \int\limits_{\mathcal{B}^N}\int\limits_{\sigma_{i-1}}^{t}\widetilde{\psi}^N(s,y)\sum\limits_{k=1}^{K}(G^k(e_N,y)-\widetilde{G}^k_s)(d\varpi^k_s-\widetilde{G}^k_s ds)\mu^{\Sigma}_{Y|\varkappa}(dy|\varkappa_{\sigma_{i-1}})\end{array}\right].$$

Из произвольности множества $\mathcal{B}$ следует, что последнее равенство будет выполняться P-п.н. для почти всех $t\in[\sigma_{i-1},\sigma_i)$, если выполнено равенство (16).

Согласно лемме 1 выполняется равенство $\mathcal{O}_t=\mathcal{F}^{\varkappa}_t\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t$. Скачкообразному процессу соответствует стохастическая целочисленная мера ϕ, определенная на $\Big([0,+\infty)\times\mathbb{R}^{K^2},\mathcal{B}([0,+\infty))\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})\Big)$: $\phi(dt,d\omega)=$ $=\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\delta_{(\sigma_i(\omega),\varkappa_{\sigma_i(\omega)}(\omega))}(dt,d\kappa)$. В [35] доказано, что $\sigma\{\phi([a,b)\times\mathcal{A}):\ [a,b)\subset$ $\subset[0,+\infty),\ \mathcal{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})\}\equiv\mathcal{F}^{\varkappa}_t$ для всех $t\geqslant 0$.

Заметим, что $\mathbf{1}^{\top}\widetilde{Q}^{\mathbb{R}^M}_t=\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t=\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}$.

Так как базу σ-алгебры $\mathcal{B}([0,+\infty))\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ составляют множества вида $[a,b)\times\mathcal{A}$, то для доказательства того, что функция $\widehat{\psi}(t,y)$ действительно определяет условное распределение относительно $\mathcal{O}_t$, используя теорему о монотонных классах, достаточно проверить выполнение равенства $\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\phi([a,b)\times\mathcal{A})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=0$ для всех $t\geqslant 0$, $\mathcal{B}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$, $[a,b)\subset[0,+\infty)$, $\mathcal{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{K^2})$ и $\mathcal{U}\in\mathcal{F}^{\varpi}_t$. Действительно,

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\phi([a,b)\times\mathcal{A})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=$$

$$=\mathsf{E}\left\{\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\left((\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\mathbf{I}_{[\sigma_{j-1},\sigma_j)}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=$$

$$=\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\Big\{\mathsf{E}\Big\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\left((\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t-\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)\right)\times$$

$$\times\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\Big\}\Big\}=$$

$$=\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\left\{\underbrace{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}}_{=\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t}(\mathbf{1}^{\top}\widetilde{V}_t)^{-1}\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}-$$

$$-\mathbf{I}_{[a,b)}(t)\sum_{i\in\mathbb{Z}_+}\mathsf{E}\left\{\underbrace{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\sigma_{i-1},\sigma_i)}(t)\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{B}}(Y_t)|\mathcal{F}^{\varkappa}_{\sigma_{i-1}}\vee\mathcal{F}^{\varpi}_t\right\}}_{=\widetilde{Q}^{\mathcal{B}}_t}\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\varkappa_{\sigma_{j-1}})\mathbf{I}_{\mathcal{U}}(\omega)\right\}=0.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Crisan D., Rozovskii B.* (eds). The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering. Oxford University Press, 2011.
2. *Setoodeh P., Habibi S., Haykin S.* Nonlinear Filters: Theory and Applications. N.Y.: John Wiley & Sons, 2022.
3. *Yau S., Chen X., Jiau X., et al.* Principles of Nonlinear Filtering Theory. Cham: Springer, 2024.
4. *Колмановский В.В., Шайхет Л.Е.* Об оценивании решений линейных стохастических интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 775–778.
5. *Shaikhet L.* On an optimal control problem of partly observable stochastic Volterra's process // Problems of Control and Information Theory. 1987. V. 16. No. 4. P. 251–262.
6. *Basin M.* On filtering over Îto-Volterra observations // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2000. V. 13. No. 4. P. 347–364.
7. *Curtain R., Pritchard A.* Infinite Dimensional Linear Systems Theory. Berlin: Springer, 1978.
8. *Øksendal B.* Optimal Control of Stochastic Partial Differential Equations // Stochastic Analysis and Applications. 2005. V. 23. No. 1. P. 165–179.
9. *Rozovsky B., Lototsky S.* Stochastic Evolution Systems. Cham: Springer, 2018.
10. *Bugini F., Friz P., Lê K., Zhang H.* Rough stochastic filtering. https://arxiv.org/html/2509.11825v1#S3. 2025.
11. *Ahmed N., Charalambous C.* Filtering for linear systems driven by fractional Brownian motion // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 41. No. 1. P. 313–330.
12. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. V. 83. No. 1. P. 95–108.
14. *Wonham W.* Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // SIAM J. Contr. 1964. V. 2. No. 3. P. 347–369.
15. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
16. *Björk T.* Finite dimensional optimal filters for a class of Itô-processes with jumping parameters // Stochastics. 1980. V. 4. No. 2. P. 167–183.
17. *Tam L.-F., Wong W., Yau S.* On a necessary and sufficient condition for finite dimensionality of estimation algebras // SIAM J. Control Optim. 1990. V. 28. No. 1. P. 173–185.

18. *Кушнер Г.Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.
19. *Zakai M.* On the optimal filtering of diffusion processes // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1969. V. 11. P. 230–243.
20. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Высшая школа, 1990.
21. *McLane P.* Optimal Linear Filtering for Linear Systems with State-Dependent Noise// Int. J. Control. 1969. V. 10. No. 1. P. 41–51.
22. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. V. 21. P. 303 – 313.
23. *Joannides M., LeGland F.* Nonlinear Filtering with Continuous Time Perfect Observations and Noninformative Quadratic Variation // Proc. 36th IEEE CDC. 1997. P. 1645–1650.
24. *Crisan D., Kouritzin M., Xiong, J.* Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // Electron. J. Probab. 2009. V. 14. P. 1863–1883.
25. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // АиТ. 2018. № 1. С. 52–65.
26. *Borisov A., Sokolov, I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics. 2020. V. 8. No. 4. Art. 506.
27. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // АиТ. 2020. № 12. С. 24–49.
28. *Борисов А.В.* Анализ и оценивание состояний специальных марковских скачкообразных процессов I // АиТ. 2004. № 1. С. 50–65.
29. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н., Смелянский Р.Л.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информ. и её примен. 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37.
30. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // Stochastic Processes and Their Applications, 2006. V. 116. No. 12. P. 1743–1769.
31. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2012.
32. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
33. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* $\mathcal{H}_\infty$ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise // Automatica. 2001. V. 37. No. 3. P. 409–417.
34. *Won M., Ranade G.* Control of systems with multiplicative observation noise // Proc. 62nd IEEE CDC. 2023. P. 3950–3955.
35. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. V. 31. P. 235–253.
36. *Wong E., Hajek B.* Stochastic Processes in Engineering Systems. N.Y.: Springer, 1985.
37. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
38. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Оптимальное управление марковскими скачкообразными процессами по бесшумовым наблюдениям с задержками II // Информ. и её примен. 2026. Т. 20. Вып. 4. в печати.

39. *Борисов А.В., Куринов Ю.Н.* Компенсирующее управление марковским скачкообразным процессом по запаздывающим наблюдениям состояния // Известия РАН. Теория и системы управления. 2026. Вып. 5. в печати.

40. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems. // Journal of Basic Engineering. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.

41. *Fujisaki M., Kallianpur G., Kunita H.* Stochastic differential equations for the non linear filtering problem // Osaka J. Math. 1972. V. 9. No. 1. P. 19–40.

42. *Davie A., Germ F., Gyöngy I.* On partially observed jump diffusions II: the filtering density // Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. 2024. V. 12. P. 1628–1698.

43. *Davie A., Germ F., Gyöngy I.* On partially observed jump diffusions III: regularity of the filtering density // Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. 2025. V. 13. P. 531–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 17.02.2026

После доработки 19.07.2026

Принята к публикации 03.08.2026