Стохастические системы

© 2026 г. Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (ruslan.biryukov@itmm.unn.ru), Е.С. БУБНОВА (bubnova@itmm.unn.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ОБОБЩЕННОЕ $\mathcal{H}_2$-УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ НА КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ[1]

Для линейной дискретной нестационарной системы с марковскими переключениями вводится понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Для случаев детерминированных и стохастических возмущений получены точные формулы вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Для случая стохастических возмущений получены также формулы для вычисления верхней оценки нормы с помощью линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия существования субоптимальных регуляторов двух типов: зависящих и не зависящих от текущего состояния марковской цепи. Для каждого из этих типов приведены формулы синтеза.

Ключевые слова: обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма, линейные матричные неравенства, однородные цепи Маркова.

DOI: 10.7868/S2413977726120021

1. Введение

В последнее время все большее значение приобретают стохастические динамические системы, способные менять свою структуру в случайные дискретные моменты времени. Особый класс таких объектов образуют дискретные системы с марковскими переключениями [1–3], где чередование режимов подчиняется законам однородной цепи Маркова с дискретным временем. Иными словами, функционирование подобной системы может протекать в одном из конечного набора состояний, причем для каждого из них задана собственная система линейных разностных уравнений, описывающая эволюцию переменных от одного дискретного момента времени к следующему. Такие модели естественным образом возникают при цифровой реализации систем управления [4], в задачах обработки дискретных сигналов [5], а также при моделировании сетей связи с пакетной передачей данных [6], где изменения топологии или параметров происходят в синхронизированные тактовые интервалы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2026-0007) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Кроме того, данный класс моделей широко используется для описания синхронизации в сетях переменной топологии и в задачах многоагентного управления [7], например при случайных переключениях связей между агентами или при марковских изменениях структуры взаимодействия.

Впервые задача устойчивости систем со случайной структурой была рассмотрена в [8]. Позднее в [9–11] исследовались различные постановки задач управления подобными системами, в том числе решена задача линейно-квадратичного управления. Для количественной оценки переходных режимов в системах с марковскими переключениями предложены различные подходы. Наиболее распространенными среди них являются методы, основанные на введении $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм [1, 12, 13]. Однако во многих практических задачах требуется не столько усредненная оценка, сколько гарантия того, что максимальный выброс выходной переменной не превысит заданного порога. Иными словами, необходим инструмент для анализа наихудшего возможного отклонения целевого выхода системы.

Один из возможных подходов к решению такой задачи основан на использовании обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, отвечающее максимальному уклонению при внешнем возмущении ограниченной энергии и нулевых начальных условиях, было введено в [14]. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма характеризует коэффициент усиления системы, на вход которой поступает сигнал с ограниченной l_2-нормой, а выходной сигнал измеряется l_∞-нормой, которая есть максимальное по времени значение евклидовой нормы целевого выхода. Для линейной дискретной нестационарной системы в [15] было введено понятие максимального уклонения как естественное расширение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы на системы с ненулевым начальным состоянием и показан алгоритм вычисления.

В [16] для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на бесконечном горизонте вычислена оценка обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и решена задача обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации. Задачи робастной обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации для неопределенных дискретных систем, а также для систем с частично неизвестной матрицей вероятностей переходов исследованы соответственно в [17] и [18]. Задачи обобщенной $\mathcal{H}_2$-фильтрации и управления для линейных стационарных систем непрерывного времени с марковскими переключениями на бесконечном горизонте рассмотрены в [19, 20]. В [21] вычислена обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма и синтезировано субоптимальное обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление для нестационарных непрерывных марковских систем на конечном горизонте.

Модели с марковскими переключениями можно рассматривать как частный случай систем с мультипликативными шумами, если интерпретировать переключение режимов как специфическое мультипликативное воздействие на матрицы состояния и управления. Задачи управления системами с мультипликативными шумами, в том числе $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-подходы к синтезу управления и фильтрации, рассмотрены в монографии [22]. Кроме того, в [23] разрабо-

тан метод решения смешанной $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$-задачи, что важно для обеспечения компромисса между робастностью и оптимальностью.

В настоящей работе рассматривается понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на конечном горизонте, а системы в каждом режиме функционирования предполагаются в общем случае нестационарными. Исследуются два типа внешних возмущений: детерминированные сигналы конечной энергии и стохастические возмущения. Для каждого случая получены явные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислить обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы.

Вторая часть работы посвящена задаче синтеза регуляторов по состоянию, минимизирующих полученную оценку нормы замкнутой системы. Рассматриваются два практически важных случая: когда регулятор имеет доступ к информации о текущем режиме марковской цепи (и может перестраиваться) и когда такая информация отсутствует (используется единая для всех режимов матрица обратной связи). Для каждого случая получены достаточные условия существования субоптимальных регуляторов. Отдельно обсуждается консерватизм предложенных условий и проводится сравнение двух альтернативных подходов к синтезу регулятора, не зависящего от режима марковской цепи.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы для линейных дискретных систем с марковскими переключениями на конечном горизонте, приводятся алгоритмы ее вычисления. Раздел 3 содержит решение задачи синтеза субоптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления в случаях доступного и недоступного для регулятора состояния марковской цепи. Численные эксперименты, демонстрирующие полученные результаты, описаны в разделе 4.

В статье используются следующие обозначения. $\mathbb{R}^n$ – пространство n-мерных вещественных векторов; квадрат нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ определяется как $|x|_2^2 = x^\top x$. Единичная матрица размера $n \times n$ обозначается как I_n. Символ $*$ используется для указания симметричных блоков в симметричной матрице. Через $\lambda_{\max}(M)$ и $e_{\max}(M)$ обозначены максимальное собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы M. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^N$, символ $\mathbb{E}\{\cdot\}$ обозначает оператор математического ожидания, через $l_2^\Omega([0,N],\mathbb{R}^{n_w})$ обозначено пространство $\mathcal{F}_k$-согласованных процессов $w = \{w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, k = 0,\dots,N\}$ таких, что

$$\mathbb{E}\big\{\|w\|_2^2\big\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{N} |w(k)|_2^2\right\} < \infty,$$

а через $l_\infty^\Omega([0,N],\mathbb{R}^{n_z})$ обозначено пространство $\mathcal{F}_k$-согласованных процессов $z = \{z(k) \in \mathbb{R}^{n_w}, k = 0,\dots,N\}$ таких, что $\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\Big\{|z(k)|_2^2\Big\} < \infty$.

2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_k\}_{k=0}^N$ рассмотрим дискретную линейную систему со случайной структурой, меняющейся в соответствии с эволюцией стационарной марковской цепи:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_{\theta(k)}(k)x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \qquad x(0) = x_0, \\
z(k) &= C_{\theta(k)}(k)x(k), \qquad k = 0, \dots, N,
\end{aligned} \tag{1}
$$

здесь $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $w \in l_2^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_w})$ – внешнее возмущение, $z \in l_\infty^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_z})$ – целевой выход, $\theta(k)$ – скалярная однородная марковская цепь с известной матрицей вероятностей $P = (p_{ij})$ переходов из одного состояния в другое в произвольный момент времени k, элементами которой являются условные вероятности

$$
p_{ij} = \mathsf{P}\{\theta(k+1) = j | \theta(k) = i\}, \qquad \sum_{j=1}^{S} p_{ij} = 1, \qquad i, j \in \{1, \dots, S\}.
$$

Начальное состояние марковского процесса $\theta(0)$ – случайная величина с известным законом распределения $\mathsf{P}\{\theta(0) = j\} = \pi_j$, $j \in \{1, \dots, S\}$.

Система (1) порождает линейный оператор, отображающий начальные условия и внешнее возмущение в целевой выход $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_x} \times l_2^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_w}) \to$ $\to l_\infty^\Omega([0,N], \mathbb{R}^{n_z}) : (x_0, w) \mapsto z$. Определим обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы (1) как норму оператора $\mathcal{S}$ следующим образом:

$$
\|\mathcal{S}\|_s = \max_{(x_0,w)\neq 0} \left(\frac{\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\mathbb{E}\|w\|_2^2 + x_0^\top R x_0} \right)^{1/2}, \tag{2}
$$

где $R = R^\top \succ 0$ – заданная весовая матрица, отражающая относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешних возмущений.

В частном случае, когда внешнее возмущение w является детерминированным, обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) определяется соотношением

$$
\|\mathcal{S}\|_d = \max_{(x_0,w)\neq 0} \left(\frac{\max\limits_{k=0,\dots,N} \mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\|w\|_2^2 + x_0^\top R x_0} \right)^{1/2}. \tag{3}
$$

В числителе сохранен оператор математического ожидания, несмотря на детерминированность w, так как случайность сохраняется в марковской цепи $\theta(k)$, управляющей переключениями, а значит, целевой выход $z(k)$ остается случайным.

Отметим, что поскольку в (3) максимум берется по меньшему множеству (только детерминированные w), чем в (2), справедлива оценка $\|\mathcal{S}\|_d \leqslant \|\mathcal{S}\|_s$. В отличие от марковских систем непрерывного времени [21] для дискретных систем обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму можно вычислить как в случае случайных, так и в случае детерминированных внешних возмущений.

Сначала рассмотрим случай детерминированного внешнего возмущения. Будем предполагать, что все подсистемы, соответствующие состояниям марковской цепи, являются стационарными – т.е. матрицы A_j, B_j, C_j не зависят от времени k. Для этого случая справедлива следующая

Теорема 1. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *может быть вычислена как*

$$\|\mathcal{S}\|_d = \max_{k=0,\dots,N} \lambda_{\max}^{1/2} \left\{ R_k^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k) \right\}, \tag{4}$$
$$R_k = \operatorname{diag}(R,\, I_{kn_w}),$$

где матрицы $Y_j(k)$, $j = 1, \dots, S$, определяются соотношениями

$$Y_j(k) = \sum_{s=1}^{S} p_{js} L_{j,k}^{\top} Y_s(k-1) L_{j,k}, \qquad Y_j(0) = C_j^{\top} C_j, \qquad k = 1, \dots, N, \tag{5}$$
$$L_{j,1} = \begin{bmatrix} A_j & B_j \end{bmatrix}, \qquad L_{j,k} = \operatorname{diag}(L_{j,1},\, I_{(k-1)n_w}), \qquad k = 2, \dots, N.$$

Пусть максимум достигается в момент времени $k = k^*$, тогда наихудшие внешние возмущения и начальные условия имеют вид:

$$\begin{bmatrix} x^*(0) \\ w^*(0) \\ \vdots \\ w^*(k-1) \end{bmatrix} = e_{\max} \left(R_k^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k^*) \right); \tag{6}$$
$$w(j) = 0, \quad j = k^*, \dots, N-1.$$

Далее рассмотрим случай, когда внешнее возмущение является стохастическим, а подсистемы, соответствующие состояниям марковской цепи, нестационарными.

Теорема 2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *может быть вычислена как*

$$\|\mathcal{S}\|_s = \max_{n=0,\dots,N} \gamma_n, \tag{7}$$

где для каждого $n = 0, \dots, N$ *значение* γ_n *находится из системы условий*

$$
\begin{aligned}
X_i(n) &= C_i^\top(n) C_i(n), \\
X_i(k) &= A_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) A_i(k) + A_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k) \times \\
&\quad \times \left(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k)\right)^{-1} B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) A_i(k), \\
\mathcal{E}_i(k+1) &= \sum_{s=1}^{S} p_{is} X_s(k+1), \\
\gamma_n^2 I &\succ B_i^\top(k) \mathcal{E}_i(k+1) B_i(k), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad i = 1, \dots, S, \\
\gamma_n^2 R &\succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0), \\
\gamma_n^2 &= \lambda_{\max} \left(R^{-1} \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0) \right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

На практике вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы согласно приведенной теореме требует выполнения следующей итерационной процедуры. Для каждого фиксированного $n = 0, \dots, N$ необходимо решить систему рекуррентных матричных соотношений обратным ходом по времени $k = n-1, \dots, 0$. Значение γ_n входит как параметр в эти соотношения, но одновременно должно удовлетворять заключительному равенству, что делает задачу нелинейной. Следовательно, для каждого n требуется найти корень нелинейного уравнения относительно γ_n, что обычно делается с помощью методов одномерного поиска с проверкой на каждом шаге всех условий. После того как найдены γ_n для всех n, итоговая норма определяется как $\max\limits_{n=0,\dots,N} \gamma_n$.

Следствие 1. Пусть максимум $\gamma = \max\limits_{n=0,\dots,N} \gamma_n$ *достигается в момент времени* $n = k^*$. *Тогда наихудшие внешние возмущения и начальные условия определяются формулами:*

$$
\begin{aligned}
x^*(0) &= e_{\max} \left(R^{-1} \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0) \right), \\
w^*(k) &= \\
&= \left(\gamma^2 I - B_{\theta(k)}^\top(k) \mathcal{E}_{\theta(k)}(k+1) B_{\theta(k)}(k)\right)^{-1} B_{\theta(k)}^\top(k) \mathcal{E}_{\theta(k)}(k+1) A_{\theta(k)}(k) x(k), \\
&\qquad k = 0, \dots, k^* - 1, \\
w^*(k) &= 0, \quad k = k^*, \dots, N-1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где матрицы $X_j(k)$, $\mathcal{E}_j(k)$, $j = 1, \dots, S$, *вычислены для* $n = k^*$ *по рекуррентным уравнениям из теоремы 2.*

Прямое вычисление обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы сопряжено с решением матричных уравнений Риккати. Основная вычислительная сложность связана с необходимостью многократного решения рекуррентных матричных соотношений в процессе одномерного поиска для каждого n. С помощью замен переменных и леммы о дополнении Шура эти условия можно преобразовать в линейные матричные неравенства. Тем самым задача сводится к задаче полуопределенного программирования, допускающей эффективное решение численными методами [24].

Вместе с тем для систем большой размерности, а также при длинном интервале времени точное вычисление нормы остается вычислительно затратным. В связи с этим дальнейшие преобразования направлены на получение верхней оценки γ обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Задача поиска такой оценки также формулируется в терминах LMI, но требует меньших вычислительных ресурсов.

Теорема 3. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathcal{S}\|_s \leqslant \gamma, \tag{10}$$

где γ есть решение следующей задачи полуопределенного программирования относительно неизвестных матриц $Y_1(k), \dots, Y_S(k)$, $\mathcal{M}_1(k), \dots, \mathcal{M}_S(k)$:

$$\inf \gamma :$$

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^S\big) = \begin{bmatrix} \gamma^2 R & \pi_1 I & \dots & \pi_S I \\ \pi_1 I & \pi_1 Y_1(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_S I & 0 & \dots & \pi_S Y_S(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\big) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k) & p_{i1}\mathcal{M}_i(k) & \dots & p_{iS}\mathcal{M}_i(k) \\ p_{i1}\mathcal{M}_i(k) & p_{i1}Y_1(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{iS}\mathcal{M}_i(k) & 0 & \dots & p_{iS}Y_S(k) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{11}$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^\top(k) \\ C_i(k)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad k = 0, \dots, n; \qquad i = 1, \dots, S.$$

Отметим также, что формулировка через матрицы Y_i и $\mathcal{M}_i$ в форме достаточных условий (теорема 3) в дальнейшем будет удобна для синтеза ре-

гуляторов в виде линейной обратной связи по состоянию системы с учетом информации о состоянии марковского процесса.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы. Покажем, что можно работать непосредственно с переменными $\mathcal{E}_i(k)$, которые имеют смысл стохастических функций Ляпунова. Исключая вспомогательные переменные $X_i(k)$ из первых двух условий (8), приходим к стохастическому матричному уравнению Риккати (12) для $\mathcal{E}_j(k)$, $j = 1, \ldots, S$:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_j(n) = \sum_{i=1}^{S} p_{ji} C_i^\top(n) C_i(n),\\
&\mathcal{E}_j(k) = \sum_{i=1}^{S} p_{ji} \Big(A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k) + A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k) \times\\
&\qquad \times \big(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\big)^{-1} B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k)\Big),\\
&\mathcal{E}_j(0) = \sum_{i=1}^{S} \pi_i \Big(A_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)A_i(0) + A_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)B_i(0) \times\\
&\qquad \times \big(\gamma_n^2 I - B_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)B_i(0)\big)^{-1} B_i^\top(0)\mathcal{E}_i(1)A_i(0)\Big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Для вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы соотношения (12) необходимо дополнить оставшимися соотношениями (8), при этом пятое соотношение, записанное через переменные $\mathcal{E}_j(0)$, принимает вид $\gamma_n^2 R \succcurlyeq \mathcal{E}_j(0)$. Поскольку явное решение получившейся задачи затруднительно, целесообразно перейти к формулировке в терминах линейных матричных неравенств. Используя монотонность решений стохастических уравнений Риккати [1], сформулируем эквивалентную задачу: найти $\inf \gamma$ при условии, что второе уравнение (12) выполняется в смысле матричного неравенства. После применения леммы о дополнении Шура это неравенство записывается как:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(k+1), \mathcal{E}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) =\\
&= \begin{bmatrix}
\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & \widehat{\mathcal{E}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{A}}(k) & \widehat{\mathcal{E}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{B}}(k)\\
\widehat{\mathcal{A}}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & \mathcal{E}_j(k) & 0\\
\widehat{\mathcal{B}}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_j\widehat{\mathcal{E}}(k+1) & 0 & \gamma^2\widehat{\mathcal{P}}_j
\end{bmatrix} \succcurlyeq 0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{E}}(k) &= \operatorname{diag}\left(\mathcal{E}_1(k),\, \mathcal{E}_2(k), \ldots, \mathcal{E}_S(k)\right),\\
\widehat{\mathcal{B}}(k) &= \operatorname{diag}\left(B_1(k),\, B_2(k), \ldots, B_S(k)\right),\\
\widehat{\mathcal{A}}^\top(k) &= \begin{bmatrix} A_1^\top(k) & A_2^\top(k) & \ldots & A_S^\top(k)\end{bmatrix},\\
\widehat{\mathcal{P}}_j &= \operatorname{diag}\left(p_{j1}I,\, p_{j2}I, \ldots, p_{jS}I\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Аналогичными преобразованиями третье уравнение (12) приводится к виду $\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(1), \mathcal{E}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0$, где $\widehat{\Pi} = \operatorname{diag}(\pi_1 I, \pi_2 I, \ldots, \pi_S I)$. Тогда условия (8) эквивалентны задаче оптимизации $\gamma_n = \inf \gamma$ при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_j(n) = \sum_{i=0}^{S} p_{ji} C_i^\top(n) C_i(n), \quad \mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(k+1), \mathcal{E}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\
&\mathcal{L}_2(\widehat{\mathcal{E}}(1), \mathcal{E}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad \gamma^2 R \succcurlyeq \mathcal{E}_j(0), \qquad j = 1, \ldots, S.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Для построения регуляторов в виде линейной обратной связи по состоянию системы удобнее использовать линейные матричные неравенства относительно матриц $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{E}_i^{-1}(k)$ и $\widehat{\mathcal{M}}(k) = \widehat{\mathcal{E}}^{-1}(k)$, тогда задача оптимизации, эквивалентная условиям (8), примет следующий вид (второе и третье неравенства (15) домножили слева и справа на $\operatorname{diag}(\widehat{\mathcal{M}}(k), \mathcal{M}_i(k), I)$, а для первого и последнего применили лемму Шура):

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{P}}_j \mathcal{M}_j(n) & \mathcal{M}_j(n) \widehat{\mathcal{C}}^\top(n) \widehat{\mathcal{P}}_j \\ \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{C}}(n) \mathcal{M}_j(n) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \begin{bmatrix} \gamma_n^2 R & I \\ I & \mathcal{M}(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\
&\qquad \mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) \succcurlyeq 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \\
&\qquad \mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(1), \mathcal{M}_j(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad j = 1, \ldots, S.
\end{aligned} \tag{16}
$$

здесь $\widehat{\mathcal{C}}^\top = \begin{bmatrix} C_1^\top & C_2^\top & \ldots & C_S^\top \end{bmatrix}$,

$$
\mathcal{L}_3(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_j(k), \widehat{\mathcal{P}}_j) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1) \widehat{\mathcal{P}}_j & \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{A}}(k) \mathcal{M}_j(k) & \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{\mathcal{B}}(k) \\ \mathcal{M}_j(k) \widehat{\mathcal{A}}^\top(k) \widehat{\mathcal{P}}_j & \mathcal{M}_j(k) & 0 \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) \widehat{\mathcal{P}}_j & 0 & \gamma^2 \widehat{\mathcal{P}}_j \end{bmatrix}.
$$

3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$-управления

Рассмотрим дискретную линейную управляемую систему со случайной структурой, меняющейся в соответствии с эволюцией стационарной марковской цепи:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_{\theta(k)}(k) x(k) + B_{\theta(k)}(k) w(k) + H_{\theta(k)}(k) u(k), \qquad x(0) = x_0, \\
z(k) &= C_{\theta(k)}(k) x(k) + D_{\theta(k)}(k) u(k), \qquad k = 0, \ldots, N,
\end{aligned} \tag{17}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – внешнее возмущение, $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управляющее воздействие, $\theta(k)$ – дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний $\{1, \ldots, S\}$

и вероятностями перехода p_{ij}; $A_i(k)$, $B_i(k)$, $H_i(k)$, $C_i(k)$, $D_i(k)$ – матрицы соответствующей размерности, зависящие от состояния марковского процесса $\theta(k) = i$ и от времени k.

Будем синтезировать управление в виде линейной обратной связи по состоянию системы с учетом состояния марковской цепи:

$$u(k) = \Theta_{\theta(k)}(k)\, x(k), \tag{18}$$

где $\Theta_i(k)$ – матрица коэффициентов обратной связи, зависящая от текущего режима $\theta(k) = i$ и от времени k. Подставив это управление в уравнения системы, получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \big[A_{\theta(k)}(k) + H_{\theta(k)}(k)\,\Theta_{\theta(k)}(k)\big]x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \\ z(k) &= \big[C_{\theta(k)}(k) + D_{\theta(k)}(k)\,\Theta_{\theta(k)}(k)\big]x(k). \end{aligned} \tag{19}$$

Поставим задачу синтеза субоптимального управления, минимизирующего верхнюю границу обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (19).

Теорема 4. Матрицы $\Theta_i(k)$ законов управления (18)*, минимизирующие верхнюю оценку γ_n обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы* (19) *на горизонте $k = 0, \dots, n$, имеют вид $\Theta_i(k) = Z_i(k)Y_i(k)^{-1}$, где $Y_i(k) = Y_i^{\top}(k) \succ 0$ и $Z_i(k)$ находятся при решении следующей задачи полуопределенного программирования:*

$$\inf \gamma :$$

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^{S}\big) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^{S}, \mathcal{M}_i(k)\big) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) + H_i(k)Z_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^{\top}(k) + Z_i^{\top}(k)H_i^{\top}(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^{\top}(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$k = 0, \dots, n-1,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^{\top}(k) + Z_i^{\top}(k)D_i^{\top}(k) \\ C_i(k)Y_i(k) + D_i(k)Z_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \begin{matrix} k = 0, \dots, n; \\ i = 1, \dots, S. \end{matrix}$$

Далее рассмотрим задачу синтеза регулятора, параметры которого не зависят от состояния марковского процесса, т.е. управление имеет вид

$$u(k) = \Theta(k)x(k). \tag{20}$$

В этом случае система, замкнутая регулятором, имеет вид

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \big(A_{\theta(k)}(k) + H_{\theta(k)}(k)\Theta(k)\big)x(k) + B_{\theta(k)}(k)w(k), \quad x(0) = x_0, \\ z(k) &= \big(C_{\theta(k)}(k) + D_{\theta(k)}(k)\Theta(k)\big)x(k). \end{aligned} \tag{21}$$

Теорема 5. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы с регулятором, не зависящим от состояния марковской цепи, удовлетворяет неравенству $\|S\|_s \leqslant \gamma$ для некоторого положительного γ, если существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие линейные матричные неравенства для матриц $P(k)$, $Z(k)$, $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{M}_i^\top(k) \succ 0$ и $Y_i(k) = Y_i^\top(k) \succ 0$:

$$\mathcal{L}_0\big(\{Y_j(0)\}_{j=1}^S\big) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_1\big(\{Y_j(k)\}_{j=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\big) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) + H_i(k)Z(k) & H_i(k)Z(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) + Z^\top(k)H_i^\top(k) & Y_i(k) & \rho\big(Y_i(k) + P^\top(k)\big) & 0 \\ Z^\top(k)H_i^\top(k) & \rho\big(Y_i(k) + P(k)\big) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{22}$$

$$k = 0, \dots, n-1;$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)C_i^\top(k) + Z^\top(k)D_i^\top(k) & \rho\big(Y_i(k) + P^\top(k)\big) \\ C_i(k)Y_i(k) + D_i(k)Z(k) & I & D_i(k)Z(k) \\ \rho\big(Y_i(k) + P(k)\big) & Z^\top(k)D_i^\top(k) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$k = 0, \dots, n; \qquad i = 1, \dots, S.$$

При этом матрицы регулятора определяются как $\Theta(k) = -Z(k)P^{-1}(k)$.

Отметим, что включение параметра ρ в число оптимизируемых переменных превращает задачу в невыпуклую задачу полуопределенного программирования, что существенно усложняет ее решение. В связи с этим предлагается следующий подход: для каждого фиксированного значения ρ решается задача минимизации γ при выполнении условий теоремы. Поскольку достижимое значение нормы зависит от выбора ρ, для отыскания наилучшего γ целесообразно выполнить поиск по сетке значений ρ и выбрать то из них, которое обеспечивает минимальное γ.

Рассмотрим синтез управления на основе неравенств (16). Введем блочные матрицы

$$\widehat{\mathcal{D}}^\top(k) = \begin{bmatrix} D_1^\top(k) & D_2^\top(k) & \dots & D_S^\top(k) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{H}}^\top(k) = \begin{bmatrix} H_1^\top(k) & H_2^\top(k) & \dots & H_S^\top(k) \end{bmatrix}.$$

Теорема 6. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы с регулятором, не зависящим от состояния марковской цепи, удовлетворяет неравенству $\|S\|_s \leqslant \gamma$ для некоторого положительного γ, если существует $\rho > 0$ такое, что выполняются следующие линейные матричные неравенства для матриц $P(k)$, $Z(k)$ и $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{M}_i^\top(k) \succ 0$:

$$\begin{bmatrix} \gamma_n^2 R & I \\ I & \mathcal{M}(0) \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(1), \mathcal{M}_i(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \qquad \mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(0), \widehat{\Pi}) \succcurlyeq 0, \tag{23}$$

$$\mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) \succcurlyeq 0, \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i), \qquad k = 1, \dots, n, \qquad i = 1, \dots, S,$$

здесь

$$\mathcal{L}_4(\widehat{\mathcal{M}}(k+1), \mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1)\widehat{\mathcal{P}}_i & * & * & * \\ (\mathcal{M}_i(k)\widehat{\mathcal{A}}^\top(k) + Z^\top(k)\widehat{H}^\top(k))\widehat{\mathcal{P}}_i & \mathcal{M}_i(k) & * & * \\ Z^\top(k)\widehat{H}^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_i & \rho\big(\mathcal{M}_i(k) + P(k)\big) & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) & * \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) & 0 & 0 & \gamma^2\widehat{\mathcal{P}}_i \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}_5(\mathcal{M}_i(k), \widehat{\mathcal{P}}_i) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{P}}_i\mathcal{M}_i(k) & * & * \\ \widehat{\mathcal{P}}_i(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)\mathcal{M}_i(k) + \widehat{D}_i(k)Z(k)) & I & * \\ \rho\big(\mathcal{M}_i(k) + P(k)\big) & Z^\top(k)\widehat{D}_i^\top(k)\widehat{\mathcal{P}}_i & \rho\big(P(k) + P^\top(k)\big) \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы регулятора определяются как $\Theta(k) = -Z(k)P^{-1}(k)$.

Заметим, что приведенные в теоремах 5 и 6 условия являются достаточными, но не эквивалентными друг другу. Они получены на основе разных исходных форм задачи вычисления обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы через матрицы $Y_i(k)$ и через $\mathcal{M}_i(k)$ соответственно. Как следствие, минимальные значения γ, доставляемые этими двумя задачами полуопределенного программирования, могут различаться. Какая из оценок окажется менее консервативной, т.е. ближе к истинной обобщенной $\mathcal{H}_2$-норме замкнутой системы, зависит от структуры конкретной системы и выбранного параметра ρ. Также отметим, что предложенные формулировки допускают естественное расширение на случай нестационарных вероятностей перехода.

4. Численное моделирование

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример, представляющий линейную дискретную систему с марковскими переключениями между двумя состояниями

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}w(k) + H_{\theta(k)}u(k), \qquad x(0) = x_0, \\ z(k) &= C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k), \end{aligned} \tag{24}$$

матрицы которой имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1{,}2 & 0{,}0 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0{,}0 & 0{,}8 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система рассматривается на временном промежутке $[0, 15]$, параметры марковской цепи и весовая матрица имеют вид

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

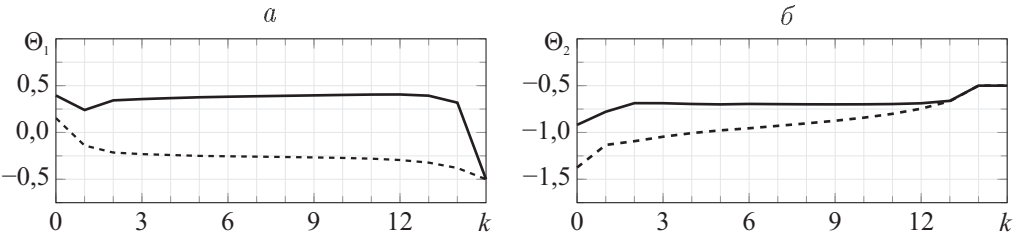


Рис. 1. Коэффициенты матрицы обратной связи $\Theta(k)$.

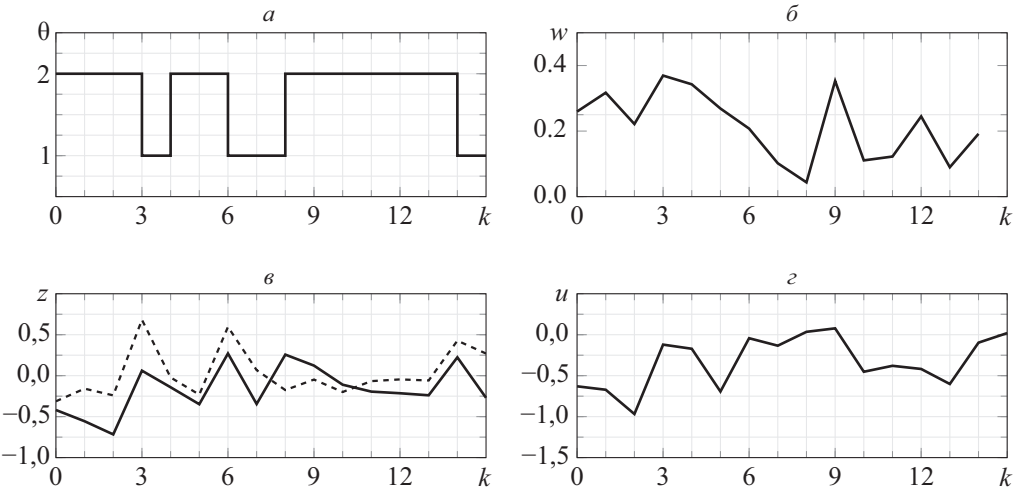


Рис. 2. Пример реализации марковского процесса.

Вычислим обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму системы (24), когда управление отсутствует. Воспользуемся теоремами 1 и 2. В случае детерминированных внешних возмущений значение нормы составило $\|\mathcal{S}\|_d = 9{,}35$. В случае стохастических внешних возмущений при использовании неравенств (П.20) получено значение нормы $\|\mathcal{S}\|_s = 12{,}51$.

С использованием теоремы 4 синтезированы регуляторы $\Theta_1(k) = [\Theta_{1,1}(k),\, \Theta_{1,2}(k)]$ и $\Theta_2(k) = [\Theta_{2,1}(k),\, \Theta_{2,2}(k)]$, при этом значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы равно $\gamma = 1{,}49$. На рис. 1 представлены графики коэффициентов обратной связи $\Theta_1(k)$ (рис. 1,*а*) и $\Theta_2(k)$ (рис. 1,*б*). Сплошная кривая соответствует компонентам $\Theta_{1,1}(k)$ и $\Theta_{2,1}(k)$, а штриховая – компонентам $\Theta_{1,2}(k)$ и $\Theta_{2,2}(k)$ матриц обратной связи. На рис. 2 представлен пример реализации марковского процесса: графики изменения состояния марковской цепи (рис. 2,*а*), внешних возмущений (рис. 2,*б*), компонент вектора целевого выхода системы z_1 (сплошная кривая) и z_2 (пунктирная кривая) (рис. 2,*в*), управления (рис. 2,*г*).

Далее рассмотрим задачу синтеза регулятора, параметры которого не зависят от состояния марковского процесса (20). Для решения неравенств тео-

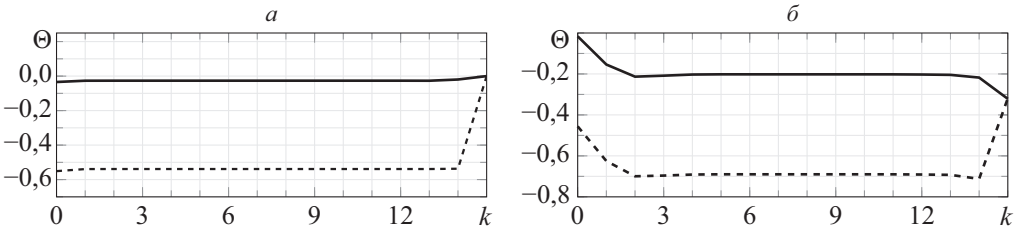


Рис. 3. Коэффициенты матрицы обратной связи $\Theta(k)$.

ремы 5 выберем параметр $\rho = 40$, при котором получается наименьшее значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы $\gamma = 4{,}95$, остальные параметры моделирования оставим прежними. На рис. 3,*а* приведены графики коэффициентов обратной связи $\Theta(k)$ в зависимости от времени (сплошная кривая соответствует первой компоненте, а штриховая – второй компоненте матрицы $\Theta(k)$).

Для построения регулятора с использованием теоремы 6 выберем параметр $\rho = 25$, при котором получается наименьшее значение обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы $\gamma = 3{,}84$, остальные параметры моделирования оставим прежними. На рис. 3,*б* приведены графики коэффициентов обратной связи $\Theta(k)$ в зависимости от времени (сплошная кривая соответствует первой компоненте, а штриховая – второй компоненте матрицы $\Theta(k)$).

Заметим, что вычисление оптимального значения ρ в ходе экспериментов выполнялось в два этапа. На первом этапе для определения области локализации минимума использовался фиксированный крупный шаг (равный 100). Затем на найденном интервале поиск продолжался уже с меньшим шагом (равным 10). На втором этапе, поскольку зависимость γ от ρ на этом отрезке являлась выпуклой, применялся метод минимизации унимодальной функции. Полученные в результате значения $\rho = 25$ и $\rho = 40$ округлены до целых чисел, так как дальнейшее увеличение точности не оказывало существенного влияния на финальные результаты.

Все расчеты выполнялись в среде MATLAB с использованием пакета YALMIP для задания линейных матричных неравенств. Численное решение задач полуопределенного программирования осуществлялось с помощью решателей SeDuMi и SDPT3.

5. Заключение

Для линейных систем дискретного времени со случайной структурой на конечном горизонте введено понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы, приведены алгоритмы ее вычисления, основанные как на решении системы матричных разностных уравнений Риккати, так и на решении систем линейных матричных неравенств. Построено управление в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию системы, минимизирующее оценку обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы

замкнутой системы. Исследуются два типа законов управления: регуляторы, в которых матрица обратной связи может перестраиваться в зависимости от текущего состояния марковской цепи, и регуляторы, использующие единую матрицу коэффициентов обратной связи. Эффективность предложенных подходов продемонстрирована результатами численных экспериментов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Найдем решение системы (1). Для удобства введем обозначения

$$\xi(0) = R^{1/2}x(0), \qquad \xi(k) = \operatorname{column}\left(R^{1/2}x(0), w(0), \dots, w(k-1)\right),$$
$$\Gamma(k) = \left[C_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}\dots A_{\theta(0)}R^{-1/2},\ \ C_{\theta(k)}A_{\theta(k-1)}\dots A_{\theta(1)}B_{\theta(0)},\ \ \dots,\ \ C_{\theta(k)}B_{\theta(k-1)}\right],$$

тогда целевой выход может быть записан в виде $z(k) = \Gamma(k)\xi(k)$. Вычислим квадрат обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы системы:

$$\text{(П.1)}\quad \|\mathcal{S}\|_s^2 = \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\max\limits_{k=0,\dots,N}\mathbb{E}\{|z(k)|_2^2\}}{\|w\|_{l_2}^2 + x_0^\top R x_0} =$$
$$= \max_{k=0,\dots,N}\max_{\xi(k)\neq 0}\frac{\xi^\top(k)\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}\xi(k)}{\xi^\top(k)\xi(k)} = \max_{k=0,\dots,N}\lambda_{\max}\left(\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}\right).$$

Далее рассмотрим вычисление $\mathbb{E}\{\Gamma^\top(k)\Gamma(k)\}$. При $k=0$ находим математическое ожидание по величине $\theta(0)$, получим

$$\text{(П.2)}\qquad \mathbb{E}\{\Gamma^\top(0)\Gamma(0)\} = R^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j C_j^\top C_j R^{-1/2} = R^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(0)R^{-1/2}.$$

Для вычисления в момент времени $k=1$ будем усреднять по $\theta(0)$ и $\theta(1)$, заметим что

$$\text{(П.3)}\qquad Y_j(1) = \sum_{s=1}^{S} p_{js}\begin{bmatrix}A_j^\top\\ B_j^\top\end{bmatrix} C_s^\top C_s \begin{bmatrix}A_j & B_j\end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{S} p_{js}L_{j,1}^\top Y_s(0)L_{j,1},$$

тогда

$$\text{(П.4)}\qquad \mathbb{E}\{\Gamma^\top(1)\Gamma(1)\} = R_1^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(1)R_1^{-1/2}.$$

Далее при $k=2$ имеем

$$\text{(П.5)}\qquad \begin{aligned} Y_j(2) &= \sum_{s=1}^{S} p_{js}L_{j,2}^\top Y_s(1)L_{j,2},\\ \mathbb{E}\{\Gamma^\top(2)\Gamma(2)\} &= R_2^{-1/2}\sum_{j=1}^{S}\pi_j Y_j(2)R_2^{-1/2}, \end{aligned}$$

и, наконец, в произвольный момент времени

$$
\begin{aligned}
Y_j(k) &= \sum_{s=1}^{S} p_{js} L_{j,k}^{\top} Y_s(k-1) L_{j,k}, \\
\mathbb{E}\{\Gamma^{\top}(k)\Gamma(k)\} &= R_k^{-1/2} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k) R_k^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{П.6}
$$

Пусть максимум достигается при $k = k^*$, тогда наихудшие начальное состояние и внешние возмущения могут быть найдены как

$$
\xi(k^*) = e_{\max}\Big(\mathbb{E}\{\Gamma^{\top}(k^*)\Gamma(k^*)\}\Big); \qquad w(j) = 0, \qquad j = k^*, \ldots, N-1, \tag{П.7}
$$

или

$$
\begin{bmatrix} x^*(0) \\ w^*(0) \\ \vdots \\ w^*(k-1) \end{bmatrix} = e_{\max}\left(R_{k^*}^{-1} \sum_{j=1}^{S} \pi_j Y_j(k^*) \right); \tag{П.8}
$$

$$
w(j) = 0, \qquad j = k^*, \ldots, N-1.
$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем выражение квадрата обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{S}\|_s^2 &= \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\max\limits_{n=0,\ldots,N} \mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0} = \\
&= \max_{n=0,\ldots,N} \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0}.
\end{aligned} \tag{П.9}
$$

Зафиксируем произвольный момент времени $n \in \{0, \ldots, N\}$ и рассмотрим задачу вычисления величины

$$
\gamma_n^2 = \max_{(x_0,w)\neq 0} \frac{\mathbb{E}\{|z(n)|_2^2\}}{\mathbb{E}\{\|w\|_2^2\} + x_0^{\top} R x_0}. \tag{П.10}
$$

Условие (П.10) эквивалентно тому, что максимум следующего функционала равен нулю:

$$
\max_{(x_0,w)\neq 0} \mathbb{E}\left\{ z^{\top}(n) z(n) - \gamma_n^2 \left(x_0^{\top} R x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} w^{\top}(k) w(k) \right) \right\} = 0. \tag{П.11}
$$

Для решения задачи (П.11) методом динамического программирования введем функции Беллмана:

$$V_j(n-k, x(k)) = \\ = \max_{w(k),\dots,w(n-1)} \mathbb{E}_{\theta(k+1),\dots,\theta(n)|\theta(k)=j} \left\{ z^\top(n) z(n) - \gamma_n^2 \sum_{i=k}^{n-1} w^\top(i) w(i) \right\}, \tag{П.12}$$

здесь индекс j обозначает состояние марковской цепи в текущий момент времени k, аргумент $n-k$ – количество шагов, оставшихся до конечного момента n, а $x(k)$ – вектор состояния системы в момент времени k. Математическое ожидание берется по величинам $\theta(k+1), \dots, \theta(n)$ при условии, что в момент k цепь находится в состоянии j. Эти функции удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$V_j(n-k, x(k)) = \\ = \max_{w(k)} \Big\{ -\gamma_n^2 w^\top(k) w(k) + \mathbb{E}_{\theta(k+1)|\theta(k)=j} \big\{ V_{\theta(k+1)}(n-k-1, x(k+1)) \big\} \Big\}, \\ V_j(0, x(n)) = x^\top(n) C_j^\top(n) C_j(n) x(n).$$

Заметим, что терминальная функция $V_j(0, x(n))$ является квадратичной по $x(n)$. Используя математическую индукцию, можно показать, что в силу квадратичности функционала и линейности системы на каждом шаге функция $V_j(n-k, x(k))$ также будет квадратичной формой по $x(k)$. Таким образом, по индукции все функции Беллмана для любого k имеют квадратичный вид, поэтому будем искать решение в виде квадратичной формы:

$$V_j(n-k, x(k)) = x^\top(k) X_j(k) x(k), \tag{П.13}$$

где $X_j(k)$ – неизвестная симметричная матрица.

Введем обозначение для условного математического ожидания матриц $X_s(k)$:

$$\mathcal{E}_j(k) = \sum_{s=1}^{S} p_{js} X_s(k). \tag{П.14}$$

Тогда математическое ожидание следующей функции Беллмана выражается как:

$$\mathbb{E}_{\theta(k+1)|j} \big\{ V_{\theta(k+1)}(n-k-1, x(k+1)) \big\} = \\ = \big(A_j(k) x(k) + B_j(k) w(k) \big)^\top \mathcal{E}_j(k+1) \big(A_j(k) x(k) + B_j(k) w(k) \big). \tag{П.15}$$

Вычислим $V_j(n-k, x(k))$. Для этого найдем оптимальное возмущение $w(k)$, приравняв градиент выражения (П.15) к нулю, тогда

$$w^*(k) = \big(\gamma_n^2 I - B_j^\top(k) \mathcal{E}_j(k+1) B_j(k) \big)^{-1} B_j^\top(k) \mathcal{E}_j(k+1) A_j(k) x(k) \tag{П.16}$$

при условии положительной определенности гессиана $\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k) \succ 0$.

Подстановка (П.16) дает выражение для функции Беллмана:

$$(\text{П.17}) \quad V_j(n-k, x(k)) = x^\top(k)\Big(A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k) + A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k) \times$$
$$\times (\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k))^{-1}B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k)\Big)x(k).$$

С учетом (П.13) получаем рекуррентное уравнение для матриц $X_j(k)$:

$$(\text{П.18}) \quad X_j(k) = A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k) +$$
$$+ A_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k)\big(\gamma_n^2 I - B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)B_j(k)\big)^{-1}B_j^\top(k)\mathcal{E}_j(k+1)A_j(k)$$

с начальным условием $X_j(n) = C_j^\top(n)C_j(n)$.

Для вычисления функционала (П.11) найдем значение функции Беллмана на всем интервале:

$$V_j(n, x(0)) = \max_{w(0),\ldots,w(n-1)} \mathbb{E}_{\theta(1),\ldots,\theta(n)|\theta(0)=j}\left\{z^\top(n)z(n) - \gamma_n^2\sum_{i=0}^{n-1} w^\top(i)w(i)\right\}$$
$$= x_0^\top X_j(0)x_0.$$

Тогда условие (П.11) принимает вид:

$$\max_{x_0}\Big\{-\gamma_n^2 x_0^\top R x_0 + \mathbb{E}_{\theta(0)}\big\{x_0^\top X_{\theta(0)}(0)x_0\big\}\Big\} =$$
$$= \max_{x_0}\left\{x_0^\top\left(-\gamma_n^2 R + \sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right)x_0\right\} = 0,$$

откуда получаем условия для γ_n^2:

$$\gamma_n^2 = \lambda_{\max}\left(R^{-1}\sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right), \quad x^*(0) = e_{\max}\left(R^{-1}\sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0)\right),$$
$$\gamma_n^2 R - \sum_{s=1}^{S}\pi_s X_s(0) \succcurlyeq 0.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу монотонности решений стохастических матричных уравнений Риккати [1] условия (8) эквивалентны сле-

дующей задаче оптимизации:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad X_i(n) \succcurlyeq C_i^\top(n) C_i(n), \\
&\qquad X_i(k) \succcurlyeq A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k) + A_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\times \\
&\qquad\qquad \times \left(\gamma_n^2 I - B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k)\right)^{-1}\times \\
&\qquad\qquad \times B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)A_i(k), \\
&\qquad \mathcal{E}_i(k+1) \succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} p_{is} X_s(k+1), \\
&\qquad \gamma^2 I \succ B_i^\top(k)\mathcal{E}_i(k+1)B_i(k),\ k = 0, \ldots, n-1,\ i = 1, \ldots, S, \\
&\qquad \gamma^2 R \succcurlyeq \sum_{s=1}^{S} \pi_s X_s(0).
\end{aligned}
\tag{П.19}
$$

Для преобразования нелинейных матричных неравенств Риккати в линейные матричные неравенства сделаем замены $\mathcal{M}_i(k) = \mathcal{E}_i^{-1}(k)$, $Y_i(k) = X_i^{-1}(k)$ и, используя лемму о дополнении Шура, перепишем неравенства в виде

$$
\begin{aligned}
&\gamma_n = \inf \gamma : \\
&\qquad \mathcal{L}_0\left(\{Y_i(0)\}_{i=1}^S\right) \succcurlyeq 0, \quad \mathcal{L}_1\left(\{Y_i(k)\}_{i=1}^S, \mathcal{M}_i(k)\right) \succcurlyeq 0, \quad k = 1, \ldots, n, \\
&\qquad \begin{bmatrix} Y_i(n) & Y_i(n)C_i^\top(n) \\ C_i(n)Y_i(n) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\
&\qquad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & A_i(k)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)A_i^\top(k) & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.
\end{aligned}
\tag{П.20}
$$

Пусть обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (1) равна $\|\mathcal{S}\|_s$ и достигается в момент времени k^*, т.е.

$$
\|\mathcal{S}\|_s = \max_{n=0,\ldots,N} \gamma_n, \qquad k^* = \arg \max_{n=0,\ldots,N} \gamma_n,
$$

где γ_n есть решение задачи (П.20). Таким образом, при $n = k^*$ в задаче (П.20) получаем $\inf \gamma^2 = \gamma^2(k^*) = \|\mathcal{S}\|_s^2$. Пусть в результате решения задачи (11) получены значение $\widehat{\gamma}$ и матрицы $\widehat{Y}_i(k)$, $\widehat{\mathcal{M}}_i(k)$, $k = 0, \ldots, N$. Предположим, что $\widehat{\gamma} < \|\mathcal{S}\|_s$, тогда задача (П.20) при $T = t^*$, $Y_i(k) = \widehat{Y}_i(k)$, $\mathcal{M}_i(k) = \widehat{\mathcal{M}}_i(k)$, $k = 0, \ldots, k^*$, имеет решение $\widehat{\gamma}^2 < \|\mathcal{S}\|_s^2$, что противоречит условию $\inf \gamma^2 = \|\mathcal{S}\|_s^2$, а значит, предположение $\widehat{\gamma} < \|\mathcal{S}\|_s$ неверно, и $\|\mathcal{S}\|_s \leqslant \widehat{\gamma}$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Подставим матрицы замкнутой системы в условия (11), тогда два последних неравенства примут вид

$$\text{(П.21)}\quad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & \big(A_i(k)+H_i(k)\Theta_i(k)\big)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)\big(A_i(k)+H_i(k)\Theta_i(k)\big)^\top & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)\big(C_i(k)+D_i(k)\Theta_i(k)\big)^\top \\ \big(C_i(k)+D_i(k)\Theta_i(k)\big)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Полученные неравенства нелинейны из-за произведения $\Theta_i(k)Y_i(k)$. После стандартной [15, 21, 24] замены переменных $Z_i(k) = \Theta_i(k)Y_i(k)$ исходная система нелинейных матричных неравенств преобразуется в систему линейных матричных неравенств, приведенных в теореме 4, относительно переменных γ^2, $Y_i(k)$, $\mathcal{M}_i(k)$ и $Z_i(k)$. Полученная задача является задачей полуопределенного программирования. После ее решения матрицы коэффициентов обратной связи восстанавливаются по формуле $\Theta_i(k) = Z_i(k)Y_i(k)^{-1}$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Воспользуемся подходом, изложенным в [25]. Умножим третье неравенство (22) слева на T_1 и справа на $T_1^\top$, а четвертое неравенства (22) слева на T_2 и справа на $T_2^\top$, где

$$\text{(П.22)}\quad T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & -\rho^{-1}H_i(k)Z(k)P^{-1}(k) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\rho^{-1}D_i(k)Z(k)P^{-1}(k) \end{bmatrix}.$$

В результате получим неравенства

$$\text{(П.23)}\quad \begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k+1) & \big(A_i(k)+H_i(k)\Theta(k)\big)Y_i(k) & B_i(k) \\ Y_i(k)\big(A_i(k)+H_i(k)\Theta(k)\big)^\top & Y_i(k) & 0 \\ B_i^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y_i(k) & Y_i(k)\big(C_i(k)+D_i(k)\Theta(k)\big)^\top \\ \big(C_i(k)+D_i(k)\Theta(k)\big)Y_i(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

которые вместе с первыми двумя неравенствами (22) являются условиями вычисления оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (21) с использованием теоремы 3. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство данной теоремы, как и предыдущей, основано на подходе, изложенном в [25]. Умножим первое неравенство (23) слева на T_1 и справа на $T_1^\top$, а второе неравенства (22) слева на T_2 и справа на $T_2^\top$, где

$$\widehat{T}_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & -\rho^{-1}\widehat{\mathcal{P}}_i\widehat{H}(k)Z(k)P^{-1}(k) & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

(П.24)

$$\widehat{T}_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -\rho^{-1}\widehat{\mathcal{P}}_i\widehat{D}(k)Z(k)P^{-1}(k) \end{bmatrix}.$$

В результате получим неравенства

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{M}}(k+1) & \big(\widehat{\mathcal{A}}_i(k)+\widehat{\mathcal{H}}_i(k)\Theta(k)\big)\mathcal{M}_j(k) & \widehat{\mathcal{B}}(k) \\ \mathcal{M}_j(k)\big(\widehat{\mathcal{A}}_i(k)+\widehat{\mathcal{H}}_i(k)\Theta(k)\big)^\top & \mathcal{M}_i(k) & 0 \\ \widehat{\mathcal{B}}^\top(k) & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

(П.25)

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_i(k) & \mathcal{M}_i(k)\big(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)+\widehat{\mathcal{D}}_i(k)\Theta(k)\big)^\top \\ \big(\widehat{\mathcal{C}}_i(k)+\widehat{\mathcal{D}}_i(k)\Theta(k)\big)\mathcal{M}_j(k) & I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

которые вместе с третьим неравенством (23) являются условиями вычисления оценки обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы замкнутой системы (21) с использованием неравенств (16). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Costa O.L.V., Fragoso M.D., Marques R.P.* Discrete-time Markov jump linear systems. London. Springer, 2005.
2. *Kao Y., Zhang P., Wang C., Xia H.* Analysis and design of Markov jump discrete systems. Singapore. Springer, 2023.
3. *Shi P., Li F.* A survey on Markovian jump systems: Modeling and design // International Journal of Control, Automation and Systems. 2015. V. 13. No. 4. P. 801–812.
4. *Tejada A., González O.R., Gray W.S.* Stability of digital control systems implemented in error-recoverable computers // International Journal of Control. 2008. V. 81. No. 11. P. 1665–1681.
5. *Shen A., Li L., Li C.* H_∞ filtering for discrete-time singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2021. V. 40. No. 6. P. 2683–2705.
6. *Lun Y., Smarra F., D'Innocenzo A.* Optimal control over Markovian wireless communication channels under generalized packet dropout compensation // Automatica. 2025. V. 176. P. 112240.

7. *Abdollahi F., Khorasani K.* A Decentralized Markovian Jump H_∞ Control Routing Strategy for Mobile Multi-Agent Networked Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2011. V. 19. No. 2. P. 269–283.

8. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 27. № 5. С. 809–823.

9. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.

10. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во Уральской гос. академии путей сообщения, 1998.

11. *Mariton M.* Jump linear systems in automatic control. New York. Taylor & Francis, 1990.

12. *Goncalves A.P.C., Fioravanti A.R., Geromel J.C.* Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V. 54. No. 6. P. 1347–1351.

13. *De Oliveira A.M., Costa O.L.V.* Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering for Markov jump linear systems // International Journal of Systems Science. 2018. V. 49. No. 15. P. 3023–3036.

14. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR weight selection approach to the discrete generalized H_2 control problem // International Journal Control. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.

15. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–23.

16. *Liu H., Sun F., Sun Z.* Reduced-order filtering with energy-to-peak performance for discrete-time Markovian jumping systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2004. V. 21. No. 2. P. 143–158.

17. *Feng J., Han K.* Robust full- and reduced-order energy-to-peak filtering for discrete-time uncertain linear systems // Signal Processing. 2015. V. 108. P. 183–194.

18. *Zhang Z., Zhang Z., Yang S.* Robust reduced-order l_2-l_∞ filtering for network-based discrete-time linear systems // Signal Processing. 2015. V. 109. P. 110–118.

19. *De Oliveira A.M., Costa O.L.V., Gabriel G.W., Barros Dos Santos S.R.* Energy-to-Peak Reduced Order Filtering for Continuous-Time Markov Jump Linear Systems With Partial Information on the Jump Parameter // IEEE Access. 2022. V. 10. P. 79124–79133.

20. *Costa O.L.V., De Oliveira A.M., Gabriel G.W., Barros Dos Santos S.R.* Energy-to-Peak Static Output Control for Continuous-Time Hidden Markov Jump Linear Systems // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56. No. 2. P. 8141–8146.

21. *Бирюков Р.С., Бубнова Е.С.* Обобщенное $\mathcal{H}_2$-управление линейной непрерывной системой с марковскими переключениями на конечном горизонте // АиТ. 2025. № 12. С. 85–103.

22. *Gersho E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems. London. Springer, 2005.

23. *Шайкин М.Е.* Задачи H_2/H_∞-теории регуляторов для линейных стохастических объектов мультипликативного типа // АиТ. 2025. № 2. С. 47–70.

24. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, 1994.
25. *Zhou J., Park J.H., Ma Q.* Non-fragile observer-based H_∞ control for stochastic time-delay systems // Applied Mathematics and Computation. 2016. V. 291. P. 69–83.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 12.05.2026

После доработки 21.07.2026

Принята к публикации 27.07.2026