

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. А.С. СЫСОЕВ, канд. техн. наук (sysoev_as@stu.lipetsk.ru),
А.К. ПОГОДАЕВ, д-р техн. наук (pogodaev_ak@stu.lipetsk.ru),
А.В. ГАЛКИН, канд. техн. наук (galkin_av@stu.lipetsk.ru)
(Липецкий государственный технический университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ПРОВЕДЕНИИ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Статья посвящена разработке алгоритмов оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности математических моделей. В основе предлагаемого подхода лежит применение метода анализа конечных изменений. Преодолевается фундаментальная проблема необъективности прямого использования теоремы Лагранжа о промежуточной точке за счет строгого планирования точек расчета в пространстве входных факторов. Синтезированы и реализованы три адаптивных алгоритма, соответствующих критериям D -, E - и A -оптимальности, которые позволяют целенаправленно строить план эксперимента для максимизации информативности данных о чувствительности модели. Эффективность предложенных подходов продемонстрирована вычислительным экспериментом с синтетической нелинейной моделью высокой размерности. Результаты показывают корректное ранжирование факторов по степени влияния на выход модели и согласуются с данными, полученными методом Морриса. Алгоритмы позволяют существенно сократить вычислительные ресурсы за счет отбора наиболее информативных точек для запуска модели.

Ключевые слова: планирование эксперимента, анализ чувствительности, анализ конечных изменений.

DOI: 10.7868/S2413977726110071

1. Введение

Одна из основных задач автоматике как области науки и техники, охватывающей теорию и практику управления техническими объектами и сложными процессами без непосредственного участия человека, – обеспечение стабильной, точной и эффективной работы систем путем разработки алгоритмов управления, основанных на математических моделях объектов. Эти модели, являясь упрощенным представлением реальности, всегда содержат в себе некоторую долю неопределенности исходных данных. В таком контексте главная цель анализа чувствительности – исследовать, как неопределенность во входных факторах влияет на неопределенность на выходе модели

и, как следствие, на надежность и качество функционирования всей системы автоматического управления. Такой анализ позволяет превратить модель из «черного ящика», выдающего точечный прогноз, в инструмент для понимания системных взаимосвязей, оценки рисков и синтеза робастных систем управления.

Современное содержание анализа чувствительности в управлении и автоматике включает решение нескольких ключевых задач:

1) Приоритезация факторов. Здесь необходимо исследовать, какие входные величины (параметры модели, управляющие воздействия, возмущения), если уменьшить их неопределенность, приведут к наибольшему повышению точности управления. Это позволяет направить усилия и ресурсы на сбор более точных данных или установку более точных датчиков именно для тех факторов, которые влияют на результат в наибольшей степени.

2) Сокращение размерности модели. Какие входы можно зафиксировать на любом значении в пределах их неопределенности без существенного влияния на выходную дисперсию? Ответ на этот вопрос позволяет упростить модель, сократив ее размерность, что является критически важным для синтеза алгоритмов адаптивного и оптимального управления сложными многомерными объектами.

3) Исследование устойчивости системы. Насколько надежны и достоверны выводы модели и работа спроектированного на ее основе регулятора при учете неопределенностей? Если выход системы кардинально меняется при небольшом изменении какого-либо входа в пределах его погрешности, то модель или система управления ненадежна для принятия решений.

Теоретические основы анализа чувствительности динамических систем были заложены в трудах отечественных ученых [1, 2], которые развили методы анализа чувствительности для задач оценки точности и робастности систем автоматического управления. Их работы наряду с исследованиями других отечественных специалистов заложили фундамент для применения этих методов при проектировании систем, устойчивых к неопределенности во входных характеристиках объекта.

Существующие методы исследования чувствительности можно разделить на несколько больших групп. Первая группа методов – дисперсионные методы – посвящена оценке вклада входов и их взаимодействий в дисперсию выходной величины модели. На данный момент один из самых мощных и популярных инструментов глобального анализа чувствительности, относящихся к указанной группе методов, – индексы Соболя, позволяющие оценить уменьшение дисперсии выхода за счет изменения значений факторов [3]. Эффективный алгоритм нахождения оценок этих мер чувствительности представлен в [4–6]. В [7] представлен альтернативный подход к вычислению индексов Соболя через условные дисперсии, а в [8] приводится расширение методов на случай коррелированных входов.

Второе направление исследований связано с построением метамоделей, представляющих собой быстрые и точные аппроксимации для проведения анализа чувствительности. В [9] предлагается использовать байесовскую модель для анализа чувствительности дорогостоящих компьютерных экспериментов, где количество запусков модели крайне ограничено. Работы [10–12] содержат описание концепции разложения с помощью полиномов для эффективного вычисления чувствительности модели.

Третье направление исследует скрининговые методы, предоставляющие быстрое и недорогое ранжирование входов модели по степени их влияния, что особенно важно для сложных моделей с большим числом факторов. Классическим подходом в этом семействе методов является метод Морриса [13], который синтезирован для оценки усредненного элементарного эффекта для каждого входа, с помощью которого можно измерить чувствительность выхода модели к малым изменениям соответствующих входов. Схожие идеи представлены и в [14–16].

Четвертое направление исследований – дистрибутивные методы – использует меры чувствительности, которые учитывают разницу между условными распределениями выхода модели и безусловным его распределением. Идея таких методов основана на том факте, что два совершенно разных распределения величины могут иметь одинаковую дисперсию, и в связи с этим стандартные дисперсионные методы могут пропустить влияние фактора на некоторые фрагменты распределения. Основные результаты в этом направлении представлены в [17] (синтезирован универсальный метод, который не делает предположений о форме распределения выхода и чувствителен к изменениям в любых частях распределения), [18] (представлен эффективный практический алгоритм для вычисления меры чувствительности), [19] (обобщает полученные результаты и дает связь между новой мерой чувствительности и классическими индексами Соболя).

Рассмотренные методы анализа чувствительности находят прямое применение в задачах управления сложными техническими объектами и системами. Системы автоматического управления часто базируются на сложных математических моделях объектов управления, идентифицированных по экспериментальным данным. К таким объектам могут относиться технологические процессы (химические реакторы, доменные печи), энергетические установки, робототехнические комплексы. Неопределенность параметров моделей, вызванная погрешностями измерений, изменением рабочих режимов или деградацией оборудования, напрямую влияет на качество управления. Поэтому анализ чувствительности выхода модели объекта управления к вариациям ее параметров и входных переменных является критически важным этапом для: синтеза робастных систем управления, оптимизации и адаптации систем диагностики и технического обслуживания путем выделения наиболее значимых входов, за которыми необходим непрерывный мониторинг, сокращения вычислительной сложности алгоритмов управления за счет фиксации мало-значимых факторов и уменьшения размерности модели.

Предлагаемый в статье метод оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности позволяет решить эти задачи с минимальными затратами на натурные или вычислительные эксперименты с моделью, что особенно актуально для дорогостоящих и критически важных технических систем.

Цель данного исследования – построение алгоритмов оптимального планирования анализа чувствительности по факторам математических моделей, основанного на применении анализа конечных изменений. Полученные результаты позволят отобрать необходимое число точек в пространстве входных величин для проведения анализа, что позволит сократить используемые ресурсы для запуска моделей.

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка задачи анализа чувствительности, основанная на использовании метода анализа конечных изменений. В разделе 3 описываются оптимальные алгоритмы планирования эксперимента анализа чувствительности. В разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Анализ чувствительности по факторам математических моделей, основанный на применении анализа конечных изменений

Одной из ключевых форм изменения величины является ее абсолютное приращение, которое представляет собой разность между старым и новым значениями величины и показывает, на сколько изменилась величина. Для аргументов функции (факторов системы) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ абсолютное приращение выражается как

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = (x_1^1, \dots, x_n^1) - (x_1^0, \dots, x_n^0),$$

приращение функции (отклика) $f(\mathbf{x})$ представимо в виде

$$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = f(x_1^1, \dots, x_n^1) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0).$$

Если функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то ее приращение Δf можно приближенно представить как линейную функцию от приращения аргумента $\Delta \mathbf{x}$ через дифференциал функции

$$\Delta f \approx df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) \Delta x_i.$$

Таким образом, если конечное приращение аргумента $\Delta \mathbf{x}$ близко к нулю, то отношение $\Delta f / \Delta \mathbf{x}$ близко к значению функции в начальной точке интервала $\mathbf{x}^0$. Указанный факт позволяет оценивать приращение отклика через приращения его аргументов в случае малых (бесконечно малых) приращений. На практике же приращения не всегда малы, однако они конечны. В случае, когда норма приращения аргументов $\|\Delta \mathbf{x}\|$ велика, то мощным и точным

инструментом разложения приращения функции через приращения ее аргументов выступает теорема Лагранжа о промежуточной точке (конечных приращениях). Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и непрерывна на отрезке, соединяющем точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}$. Тогда существует такая точка $\mathbf{x}^\alpha$, лежащая строго между $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, что выполняется точное равенство:

$$(1) \quad \Delta f(\Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\alpha) \Delta x_i,$$

где $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^0 + \alpha\Delta\mathbf{x}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Формулировка (1) говорит, что производные вычисляются в некоторой неизвестной промежуточной точке $\mathbf{x}^\alpha$. Эта точка гарантированно существует, но ее точное положение обычно неизвестно.

Для практического использования этого представления необходимо определить значение параметра α . Это приводит к задаче решения нелинейного уравнения относительно α :

$$(2) \quad g(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha\Delta\mathbf{x}) \Delta x_i - [f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0)] = 0.$$

Общая схема решения полученного уравнения (2) может быть сформулирована в виде следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Подготовка данных:

- зафиксировать начальную ($\mathbf{x}^0$) и конечную ($\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}$) точки;
- вычислить известное приращение функции $\Delta f = f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0)$;
- аналитически или численно определить выражения для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Шаг 2. Выбор начального приближения α_0 :

- часто используемое начальное предположение – середина интервала $\alpha_0 = 0,5$;
- альтернативный вариант – предположение, основанное на линейной аппроксимации.

Шаг 3. Выбор итерационного метода решения. Так как вычисление производной функции $g(\alpha)$ в уравнении (2) может быть сложной или затратной операцией из-за нахождения производных, часто предпочтение отдается методам, которые не требуют явного вычисления производной целевой функции. Рекомендуется использовать методы секущих, деления отрезка пополам, Риддера или Брента.

Шаг 4. Определение критерия останова. Итерационный процесс прекращается, когда выполняется один из критериев: по невязке, по приращению корня, по достижению максимального числа итераций.

Шаг 5. Верификация решения. После нахождения α^* следует подставить его в формулу Лагранжа и убедиться, что равенство $\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}) \Delta x_i$ выполняется с приемлемой точностью.

Главным преимуществом предлагаемого подхода является то, что это единственный метод исследования чувствительности по факторам модели, который дает точное, а не приближенное, разложение общего приращения функции Δf по вкладам отдельных факторов. Также метод автоматически определяет точку в интервале от $\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{x}^1$, где наклон наиболее репрезентативен для описания всего произошедшего изменения. Таким образом, он в некоторой степени учитывает нелинейность поведения функции на рассматриваемом интервале. Стоит отметить, что подход применим к любой дифференцируемой функции независимо от величины изменения $\Delta \mathbf{x}$.

Однако предлагаемый метод анализа чувствительности не лишен и недостатков. Среди них в первую очередь стоит отметить неединственность и неопределенность промежуточной точки. Теорема (1) гарантирует существование хотя бы одной точки $\mathbf{x}^\alpha$, но не ее единственность. На пути от $\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{x}^1$ может быть несколько точек, удовлетворяющих условию. Какая из них будет найдена численным методом, зависит от начального приближения, что может делать результат необъективным. Еще одним недостатком является проблема интерпретируемости результатов вычисленной меры чувствительности на интервале. Производная в промежуточной точке является усредненной мерой на интервале, отвечающей на вопрос, каким должен был быть постоянный наклон по исследуемому фактору на всем отрезке, чтобы привести к такому же общему изменению приращения функции. Она не отвечает на вопрос, насколько чувствительна функция к изменению данного фактора в окрестности конкретной точки. Еще один недостаток – невозможность изолированного анализа. Значение параметра промежуточной точки, а значит и сама точка для вычисления производных, определяется совместным изменением всех факторов. Таким образом, предлагаемый анализ решает задачу глобального анализа чувствительности, а не локального.

Прямое применение метода Лагранжа для анализа чувствительности сталкивается с фундаментальной проблемой необъективности. Поскольку точное положение промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$, в которой вычисляются производные, неизвестно и зависит от произвольно выбранных начальных и конечных условий, результаты анализа становятся неустойчивыми. Расчетная чувствительность может кардинально меняться на нелинейных участках функции.

Чтобы устранить этот недостаток, необходимо планирование эксперимента, которое заменяет случайный выбор точек строгим правилом. Заранее определенный план, например полный факторный или центральный композиционный, равномерно покрывает область интереса, гарантируя, что анализ проводится в репрезентативной зоне, где поведение модели устойчиво. Это обеспечивает объективность, воспроизводимость результатов и позволяет це-

ленаправленно изучать вклад факторов и нелинейность отклика, превращая метод анализа конечных изменений в надежный инструмент анализа.

3. Алгоритмы оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности

Информационные матрицы представляют собой фундаментальный объект теории оптимального планирования эксперимента, обеспечивающий количественную оценку информации, содержащейся в данных относительно параметров исследуемой модели. Выбор метода построения информационной матрицы детерминирован типом модели (линейная, нелинейная, вероятностная) и целевой функцией эксперимента, такой как оценка параметров, анализ чувствительности или дискриминация конкурирующих моделей.

В контексте анализа чувствительности по факторам, информационная матрица формируется на основе градиента функции отклика $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$. Как показано в фундаментальных работах по планированию эксперимента [20, 21], информационная матрица, вычисленная в точке $\mathbf{x}$, определяет локальную геометрию поверхности отклика. Ее собственные значения и векторы характеризуют направленную чувствительность функции $f(\mathbf{x})$ к вариациям входных аргументов. Как показано в [22], матрица JJ^T определяет ковариацию выхода модели при заданной ковариации входа. Поскольку матрицы $J^T J$ и JJ^T обладают одинаковыми ненулевыми сингулярными числами, спектральный анализ информационной матрицы $F = J^T J$ полностью характеризует локальную чувствительность модели и направления, в которых неопределенность входов наиболее сильно влияет на неопределенность выхода.

Для заданного плана эксперимента $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ информационная матрица принимает следующий вид:

$$(3) \quad M(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N (\nabla_{\mathbf{x}} f(x_i)) (\nabla_{\mathbf{x}} f(x_i))^T,$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$ обозначает градиент функции отклика, характеризующий ее локальную чувствительность к вариациям факторов.

Свойства информационной матрицы (3):

1) Матрица $M(\mathbf{X})$ является симметричной и положительно полуопределенной.

2) Диагональные элементы матрицы $M_{jj} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}_i} \right)^2$ количественно характеризуют совокупную чувствительность функции отклика к вариациям фактора x_j .

3) Недиагональные элементы $M_{jl} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}_i} \right)$ отражают совместное влияние и взаимодействие факторов x_j и x_l на выход модели.

4) Собственные векторы матрицы $M(\mathbf{X})$ определяют ортогональные направления в пространстве факторов, соответствующие наибольшей чувствительности функции $f(\mathbf{x})$.

На основе информационной матрицы может быть определена нормированная мера относительной чувствительности для фактора x_m :

$$(4) \quad S_m = \frac{M_{mm}}{\text{tr}(M(\mathbf{X}))},$$

где $\text{tr}(M(\mathbf{X}))$ – след матрицы $M(\mathbf{X})$, равный сумме ее диагональных элементов.

В теории оптимального планирования используются различные критерии, основанные на свойствах информационной матрицы $M(\mathbf{X})$:

1) *D*-оптимальность. План максимизирует определитель информационной матрицы:

$$(5) \quad \det(M(\mathbf{X})) \rightarrow \max.$$

Такой план минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров, обеспечивая сбалансированное изучение всех факторов.

2) *A*-оптимальность. План минимизирует след матрицы, обратной к информационной:

$$\text{tr}(M^{-1}(\mathbf{X})) \rightarrow \min.$$

Данный критерий направлен на минимизацию средней дисперсии оценок параметров, что является целесообразным при необходимости точной оценки каждого фактора в отдельности.

3) *E*-оптимальность. План максимизирует минимальное собственное значение информационной матрицы:

$$(6) \quad \lambda_{\min}(M(\mathbf{X})) \rightarrow \max.$$

Этот подход минимизирует максимальную дисперсию оценок и является эффективным для выявления слабых, но значимых эффектов.

Важно отметить, что практическая реализация алгоритмов поиска оптимальных планов требует на начальном этапе генерации невырожденных начальных планов.

Опишем алгоритмы оптимального планирования эксперимента для проведения анализа чувствительности. Требуется построить план эксперимента (набор точек в пространстве факторов), который максимизирует информативность данных для анализа чувствительности некой функции $f(\mathbf{x})$, и одновременно вычислить меры чувствительности факторов S_m . Конкретные реализации алгоритмов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Сравнительная характеристика алгоритмов оптимального планирования

Параметр	D -оптимальный алгоритм	E -оптимальный алгоритм	A -оптимальный алгоритм
Интерпретация	Минимизирует обобщенную дисперсию оценок параметров. Фокус на объеме доверительного эллипсоида.	Минимизирует максимальную дисперсию линейной комбинации оценок параметров. Фокус на наихудшем направлении.	Минимизирует среднюю дисперсию оценок параметров. Фокус на сумме дисперсий.
Целевой критерий	Максимизация определителя информационной матрицы: $\det(\mathbf{M}) \rightarrow \max$	Максимизация минимального собственного значения: $\lambda_{\min}(\mathbf{M}) \rightarrow \max$	Минимизация следа обратной матрицы: $\text{tr}(\mathbf{M}^{-1}) \rightarrow \min$
Инициализация плана	$\mathbf{X}_0 = \arg \max_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \det(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg \max_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \lambda_{\min}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})$	$\mathbf{X}_0 = \arg \min_{\mathbf{X} \subset \mathbb{X}} \text{tr}((\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1})$
Выбор новой точки	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \det(\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)$	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \lambda_{\min}(\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)$	$\mathbf{x}_{\text{new}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{\text{cand}}} \text{tr}((\mathbf{M}_t + \nabla f \nabla f^T)^{-1})$
Критерий сходимости	$\varepsilon_t^D = \left \frac{\det(\mathbf{M}_{t+1}) - \det(\mathbf{M}_t)}{\det(\mathbf{M}_t)} \right $	$\varepsilon_t^E = \left \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_{t+1}) - \lambda_{\min}(\mathbf{M}_t)}{\lambda_{\min}(\mathbf{M}_t)} \right $	$\varepsilon_t^A = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}_{t+1}^{-1}) - \text{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})}{\text{tr}(\mathbf{M}_t^{-1})}$

Общие входы:

- $f(\mathbf{x})$ – исследуемая функция,
- $\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}$ – границы области планирования.

Общие управляющие параметры:

- N_0 – размер начального плана,
- $N_{\max}$ – максимальный размер финального плана,
- ε – порог сходимости для критерия останова.

Шаг 1. Инициализация:

- сгенерировать начальный план $\mathbf{X}_0$ размера N_0 , оптимальный относительно некоторого критерия $\Phi(\mathbf{M})$;
- вычислить начальную информационную матрицу

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}_0} \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T.$$

Шаги 2–6. Адаптивное пополнение плана. Для итерации $t = 1$ до $(N_{\max} - N_0)$:

Шаг 2. Анализ чувствительности:

- для пар точек текущего плана найти промежуточные точки $\mathbf{x}_{ij}^*$ с помощью метода анализа конечных изменений;
- для каждой промежуточной точки вычислить локальную информационную матрицу $\mathbf{M}_{ij}^*$;
- рассчитать меры чувствительности факторов S_m по формуле

$$S_m = \frac{1}{|\mathcal{X}^*|} \sum_{\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}^*} \frac{M_{mm}^*}{\text{tr}(\mathbf{M}^*)}.$$

Шаг 3. Генерация кандидатов. Создать множество точек-кандидатов $\mathbf{X}_{cand}$ для добавления в план. Кандидаты генерируются на основе мер чувствительности S_m (предпочтение областям с высокой чувствительностью) и, возможно, случайным образом для исследования всей области.

Шаг 4. Выбор новой точки. Выбрать точку $\mathbf{x}_{new}$ из множества кандидатов $\mathbf{X}_{cand}$, которая наилучшим образом повышает целевой критерий Φ информационной матрицы $\mathbf{M}_t$ после ее добавления.

Шаг 5. Обновление плана:

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t \cup \mathbf{x}_{new}, \quad \mathbf{M}_{t+1} = \mathbf{M}_t + \nabla f(\mathbf{x}_{new}) \nabla f(\mathbf{x}_{new})^T.$$

Шаг 6. Проверка критерия останова.

- вычислить относительное изменение целевого функционала Φ :

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\Phi(\mathbf{M}_{t+1}) - \Phi(\mathbf{M}_t)}{\Phi(\mathbf{M}_t)} \right|,$$

– если $\varepsilon_t < \varepsilon$ или достигнут максимальный размер плана, остановиться. Иначе перейти к следующей итерации (возврат на шаг 2).

Выходы:

- финальный план точек $\mathbf{X}$;
- рассчитанные меры чувствительности факторов S_m .

Ключевое различие между конкретными алгоритмами заключается в целевом критерии оптимальности (Φ), который определяет, что значит лучший план. Этот критерий пронизывает все шаги алгоритма: инициализацию, выбор новой точки и критерий останова. Выбор между D -, E - и A -оптимальностью зависит от конкретных целей исследования и свойств модели.

Алгоритм D -оптимального планирования направлен на равномерное изучение влияния всех факторов, используется в случае, когда важна общая информативность плана, исследуется модель произвольной структуры и требуется хорошее покрытие пространства факторов. Этот алгоритм устойчив к корреляции между факторами, однако может пропускать узкие зоны резкого изменения чувствительности. Устойчивость к корреляции следует из структуры алгоритма. Геометрически определитель информационной матрицы соответствует объему доверительного эллипсоида в пространстве факторов [23]. Увеличение такого объема ведет к уменьшению неопределенности. Если между факторами присутствует сильная корреляция, то информационная матрица приближается к вырожденной, т.е. $\det(M) \rightarrow 0$, а специфика D -оптимального планирования как раз и заключается в максимизации $\det(M)$, что автоматически снижает мультиколлинеарность [20]. Улучшения алгоритма, связанные с учетом зон резкого изменения чувствительности, могут заключаться в добавлении и адаптации весов для точек с высокой чувствительностью, модификации меры чувствительности, использовании дополнительных критериев останова или комбинации с другими алгоритмами.

Алгоритм E -оптимального планирования построен с учетом избегания зон с близкой к нулевой чувствительностью и может быть использован для анализа устойчивости модели. Такой алгоритм гарантирует, что ни один фактор не будет полностью упущен в ходе анализа, однако он менее точен в оценке индивидуальной чувствительности факторов. Отбор точек в этом алгоритме происходит за счет минимизации числа обусловленности, которое в случае симметричной матрицы может быть оценено как отношение максимального собственного значения к минимальному [24], таким образом, алгоритм избегает планов, где некоторые факторы подавляются другими.

Алгоритм A -оптимального планирования рекомендуется в задачах, где важна точность в ранжировании факторов по их влиянию. Алгоритм дает сбалансированную оценку вклада каждого фактора, однако он чувствителен к масштабированию данных.

У синтезированных алгоритмов наблюдается одинаковая вычислительная сложность, равная $O(n^3)$, так как в основе лежат схожие операции обращения матриц (для A -оптимального плана), нахождения собственных значений (для E -оптимального плана), вычисления определителей (для D -оптимального плана). Наиболее высокой скоростью характеризуется алго-

ритм D -оптимального планирования, а наиболее низкой – E -оптимального планирования.

В случае, когда некоторые из факторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ имеют дискретную природу и принимают значения из конечных множеств $\mathcal{D}_j = \{d_1^{(j)}, \dots, d_{m_j}^{(j)}\}$, прямое применение теоремы Лагранжа (1) требует модификации. Формально уравнение Лагранжа

$$\Delta f(\Delta \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^\alpha) \Delta x_i,$$

где $\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, остается справедливым, только если найденная промежуточная точка $\mathbf{x}^\alpha$ принадлежит декартову произведению допустимых множеств $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \dots \times \mathcal{D}_n$.

Это приводит к задаче условной оптимизации для нахождения параметра промежуточной точки:

$$(7) \quad \alpha^* = \arg \min_{\alpha \in (0,1)} \left| \Delta f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x}) \Delta x_i \right|,$$

при условии $\mathbf{x}^0 + \alpha \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

Поскольку условие дискретности делает множество допустимых α конечным, практическая реализация алгоритма сводится к поиску по сетке допустимых точек.

Для пары точек плана $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$ строится множество всех допустимых промежуточных точек $\mathcal{X}_{\text{cand}}$. Для каждого кандидата $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{X}_{\text{cand}}$ вычисляется величина

$$R^{(k)} = \left| \Delta f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta x_i \right|.$$

В качестве промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$ выбирается точка с минимальной невязкой:

$$\mathbf{x}^\alpha = \arg \min_{\mathbf{x}^{(k)} \in \mathcal{X}_{\text{cand}}} R^{(k)}.$$

Полученная точка $\mathbf{x}^\alpha$ используется для вычисления градиента $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^\alpha)$ при формировании информационной матрицы (3) по стандартной схеме, описанной в разделе 3.

Стабильность координат промежуточной точки $\mathbf{x}^\alpha$, соответствующих дискретным факторам, при анализе различных пар точек плана служит естественной мерой робастности. Если для разных пар $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1)$ из оптимального плана найденные промежуточные точки $\mathbf{x}^\alpha$ сильно различаются по значениям дискретных факторов, это указывает на высокую зависимость влияния этих факторов от значений других факторов, что соответствует низкой робастности модели. Стабильность положения промежуточной точки свидетельствует о предсказуемом и устойчивом влиянии дискретных факторов, что характеризует высокую робастность модели к их вариациям.

Выбор типа оптимальности зависит от целей анализа и структуры модели. Для комплексного учета разнородных требований может быть использован взвешенный сложный критерий:

$$(8) \quad \Phi_{\text{комб}}(\mathbf{M}) = \omega_D \log(\det(\mathbf{M})) + \omega_A(-\text{tr}(\mathbf{M}^{-1})) + \omega_E \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \rightarrow \max,$$

где $\omega_D, \omega_A, \omega_E \geq 0$, $\omega_D + \omega_A + \omega_E = 1$ – веса, отражающие приоритеты полноты информации, точности ранжирования и устойчивости плана соответственно. Такой подход позволяет гибко адаптировать планирование эксперимента к специфическим требованиям анализа сложных моделей в задачах управления.

4. Вычислительный эксперимент

В качестве тестовой модели построим структуру, включающую нелинейное взаимодействие двадцати трех входных переменных:

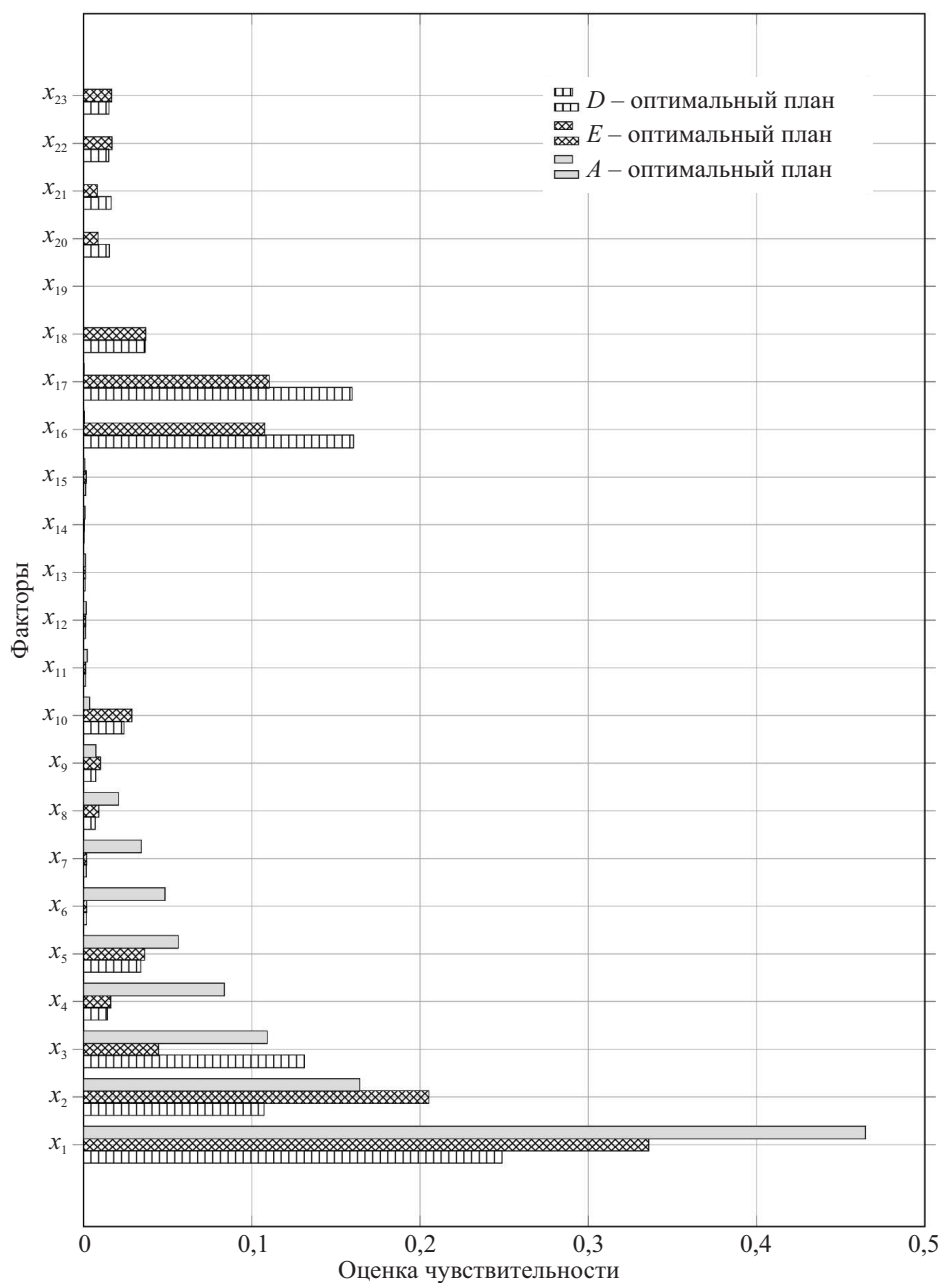
$$(9) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & 2x_1^{1,5} + 3\sin(x_2x_3) + 0,8e^{x_4/2} + 1,2\log(|x_5| + 1) + 0,6x_8x_9 - \\ & - 1,4\cos(x_{10}) + 0,4(x_{11}x_{12}x_{13})^{1/3} + 0,3\tanh(x_{14})x_{15}^2 - \\ & - 0,7(x_{16} + x_{17})^2 + 1,8\sin(0,5x_{18})\cos(0,3x_{19}) + \\ & + 0,9\sin(x_{20} + x_{21}) + 0,4(x_6x_7)^{1/4} + 0,6|x_{22} - x_{23}|^{1,5}. \end{aligned}$$

С использованием структуры модели (9) был получен набор данных, содержащий 2000 реализаций, которые впоследствии были разделены на 80% строк для обучения и 20% строк для анализа качества модели. Данная модель выбрана из-за своей сбалансированной сложности, сочетающей в себе достаточную нелинейность (наличие степенных зависимостей, тригонометрических и экспоненциальных функций) и умеренную размерность (23 входных переменных достаточно для тестирования масштабируемости предлагаемых алгоритмов, но при этом не слишком много для визуализации и интерпретации). Диапазоны изменений входов модели $[0, 1]$.

Для тестирования подходов была выбрана модель полносвязной нейронной сети, что позволит исследовать, как модель с непрерывными нелинейными преобразованиями оценивает вклад признаков. Параметры эксперимента представлены в табл. 1. В качестве модели для анализа чувствительности была выбрана модель, состоящая из одного скрытого слоя с 10 нейронами. В качестве функции активации использована логистическая функция.

Таблица 1. Параметры исследуемых нейросетевых моделей и точность аппроксимации

Архитектура модели	Метрики точности			
	<i>MAE</i>	<i>MAPE</i> , %	<i>RMSE</i>	<i>R</i> ²
один слой, десять нейронов	0,080527	3,34	0,063836	0,99526
два слоя, по пять нейронов	0,220495	9,49	0,173303	0,96562
три слоя, по три нейрона	0,246480	9,43	0,187653	0,95704



Сравнение оценок чувствительности по факторам модели (9), полученных с помощью различных вариантов планирования эксперимента.

В табл. 3 представлены характеристики проведенных экспериментов – настройки управляющих параметров алгоритмов оптимального планирования, количество точек, включенных в оптимальный план, а также 5 наиболее значимых факторов по результатам проведенного анализа. На рисунке пред-

Таблица 2. Параметры численных экспериментов и сравнение полученных результатов

Тип планирования	Параметры алгоритма	Число точек в плане	Наиболее влиятельные факторы
<i>D</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	63	$S(x_1) = 0,249$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_{16}) = 0,160$
	$\theta = 0,1$		$S(x_{17}) = 0,160$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_3) = 0,131$ $S(x_2) = 0,107$
<i>E</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	38	$S(x_1) = 0,336$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_2) = 0,205$
	$\lambda = 0,1$		$S(x_{17}) = 0,110$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_{16}) = 0,108$ $S(x_3) = 0,045$
<i>A</i> -оптимальное	$N_0 = 50$	52	$S(x_1) = 0,465$
	$N_{\max} = 100$		$S(x_2) = 0,164$
	$\theta = 0,1$		$S(x_3) = 0,109$
	$\varepsilon = 0,05$		$S(x_4) = 0,084$ $S(x_5) = 0,056$

ставлено сравнение оценок чувствительности по факторам модели (9), полученных с помощью различных методов оптимального планирования эксперимента. Стоит отметить, что фактор x_1 идентифицируется всеми тремя алгоритмами как наиболее чувствительный, что указывает на его безусловную значимость в модели; факторы x_2 и x_3 также стабильно входят в число наиболее значимых. Алгоритм, основанный на построении *D*-оптимального плана, выявляет факторы x_{16} и x_{17} как высокочувствительные и обнаруживает больше факторов со средней чувствительностью, что вполне соответствует ожиданию о равномерном покрытии пространства факторов, позволяющем выявить скрытые зависимости. Алгоритм, основанный на построении *E*-оптимального плана, понижает значимость факторов x_2 и x_3 , что соответствует подавлению факторов, т.е. выравнивание их вклада. Алгоритм, основанный на построении *A*-оптимального плана, обнаруживает x_4 и x_5 как влиятельные факторы, что пропущено другими подходами. Также необходимо уделить особое внимание факторам x_{16} и x_{17} , которые показывают высокую чувствительность в алгоритмах оптимального планирования. Стоит отметить, что анализ чувствительности модели (9), проведенный методом Морриса, выявляет факторы x_1 , x_2 , x_{17} , x_{16} и x_3 как наиболее влиятельные, что полностью подтверждает непротиворечивость полученных результатов.

5. Заключение

Проведенное исследование подтвердило эффективность алгоритмов оптимального планирования эксперимента для анализа чувствительности на основе метода анализа конечных изменений. Разработанные *D*-, *E*- и *A*-

оптимальные стратегии позволили преодолеть ключевой недостаток метода – необъективность выбора точек – и обеспечили воспроизводимое и устойчивое ранжирование факторов по степени их влияния на выход сложной нелинейной модели. Эксперименты показали, что подход значительно сокращает вычислительные затраты за счет целенаправленного отбора наиболее информативных точек для расчета модели.

Разработанные алгоритмы оптимального планирования эксперимента позволяют эффективно решать задачи анализа чувствительности для сложных моделей объектов управления. Полученные результаты ранжирования факторов по степени влияния могут быть непосредственно использованы для оптимизации систем сбора данных (датчики наиболее влиятельных факторов должны иметь повышенную точность и надежность); при проектировании систем автоматического регулирования (знание ключевых переменных позволяет обоснованно выбирать каналы управления и настраивать регуляторы); для создания цифровых двойников технических объектов (метод позволяет целенаправленно уточнять модель в тех областях пространства входов, которые наиболее важны для работы системы в штатных и аварийных режимах).

Перспективы исследования связаны с практической адаптацией метода для решения прикладных задач. Планируется разработка модификаций алгоритмов для работы с коррелированными входными параметрами, что часто встречается в реальных данных. В долгосрочной перспективе метод может лечь в основу стандартизированного подхода к планированию экспериментов для анализа чувствительности, позволяющего получать надежные результаты при ограниченном бюджете вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенбассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем автоматического управления. М.: Энергия, 1969.
2. Бурэ Э.Г., Розенбассер Е.Н. Об исследовании чувствительности автоколебательных систем // АиТ. 1974. № 7. Р. 9–17.
3. Sobol I.M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models // Math. Model. Comput. Exp. 1993. No. 1. P. 407–414.
4. Homma T., Saltelli A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models // Reliability Engineering & System Safety. 1996. V. 52. No. 1. P. 1–17.
5. Saltelli A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices // Comput. Phys. Commun. 2002. V. 145. No. 2. P. 280–297.
6. Saltelli A., Annoni P., Azzini I., Campolongo F., Ratto M., Tarantola S. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index // Comput. Phys. Commun. 2010. V. 181. No. 2. P. 259–270.
7. Jansen M.J.W. Analysis of variance designs for model output // Comput. Phys. Commun. 1999. V. 117. No. 1–2. P. 35–43.
8. Mara T.A., Tarantola S. Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs // Reliability Engineering & System Safety. 2012. V. 107. P. 115–212.

9. *Oakley J.E., O'Hagan A.* Probabilistic sensitivity analysis of complex models: a Bayesian approach // *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*. 2004. V. 66. No. 3. P. 751–769.
10. *Sudret B.* Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions // *Reliability Engineering & System Safety*. 2008. V. 93. No. 7. P. 964–979.
11. *Crestaux T., Le Maître O., Martinez J.M.* Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis // *Reliability Engineering & System Safety*. 2009. V. 94. No. 7. P. 1161–1172.
12. *Lataniotis C., Marelli S., Sudret B.* Extending classical surrogate modeling to high dimensions through supervised dimensionality reduction: a data-driven approach // *International Journal for Uncertainty Quantification*. 2020. V. 10. No. 1. P. 1–39.
13. *Morris M.D.* Factorial sampling plans for preliminary computational experiments // *Technometrics*. 1991. V. 33. No. 2. P. 161–174.
14. *Campolongo F., Cariboni J., Saltelli A.* An effective screening design for sensitivity analysis of large models // *Environmental modelling & software*. 2007. V. 22. No. 10. P. 1509–1518.
15. *Ge Q., Menendez M.* Extending Morris method for qualitative global sensitivity analysis of models with dependent inputs // *Reliability Engineering & System Safety*. 2017. V. 162. P. 28–39.
16. *Sin G., Gernaey K.V.* Improving the Morris method for sensitivity analysis by scaling the elementary effects // *Computer Aided Chemical Engineering*. 2009. V. 26. P. 925–930.
17. *Borgonovo E.* A new uncertainty importance measure // *Reliability Engineering & System Safety*. 2007. V. 92. No. 6. P. 771–784.
18. *Plischke E., Borgonovo E., Smith C.L.* Global sensitivity measures from given data // *European Journal of Operational Research*. 2013. V. 226. No. 3. P. 536–550.
19. *Da Veiga S.* Global sensitivity analysis with dependence measures // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 2015. V. 85. No. 7. P. 1283–1305.
20. *Box G.P.E., Hunter J.S., Hunter W.G.* Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery. N.Y.: John Wiley & Sons, 2005.
21. *Montgomery D.C.* Design and analysis of experiments. New York: John Wiley & Sons, 2017.
22. *Smith R.C.* Uncertainty Quantification: Theory, Implementation, and Applications. N.Y.: SIAM, 2013.
23. *Pukelsheim F.* Optimal Design of Experiments. New York: SIAM, 2006.
24. *Boyd S.P., Vandenberghe L.* Convex optimization. Cambridge: Cambridge university press, 2004.

Статъя представена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 23.09.2025

После доработки 27.01.2026

Принята к публикации 28.02.2026