

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2026 г. М.А. ТУЖИЛИН, канд. физ.-мат. наук (mikhail.tuzhilin@math.msu.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

СЕРИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕАЛЬНЫХ СЕТЕЙ¹

Предлагается обобщение двух известных инвариантов реальных сетей: степени и кси-центральности. Строится серия центральностей, основанная на матрице Лапласа сети и параметризованная параметром j со следующими свойствами: во-первых, при $j = 0, 1$ эти центральности совпадают со степенью и кси-центральностью; во-вторых, их распределение хорошо приближается распределением Вейбулла; в-третьих, для реальных сетей они имеют правостороннюю асимметрию, а для искусственных сетей имеют симметричное распределение. Пороговое значение 1 коэффициента асимметрии Пирсона, посчитанное для каждого элемента этой серии, позволяет отличить реальные сети от искусственных.

Ключевые слова: сети, центральности, локальные и глобальные характеристики графов, матрица Лапласа, дискретный оператор Лапласа–Бельтрами.

DOI: 10.7868/S2413977726110055

1. Введение

Одним из наиболее известных инвариантов реальных сетей или сетей, основанных на реальных данных, является форма распределения центральности степени. В работе [1] было обнаружено свойство реальных сетей: для реальных сетей центральность степени имеет степенное распределение, а для случайных сетей это распределение биномиальное, которое впоследствии было названо свойством безмасштабности. Также они предложили алгоритм [2] для построения сети, удовлетворяющей этому свойству, однако у построенной сети оказался небольшой средний кластерный коэффициент, т.е. сеть не являлась сетью малого мира. Одним из ключевых соображений авторов было то, что распределение степеней на логарифмическом графике имеет линейную структуру с <тяжелым хвостом>, поэтому усеченный график этого распределения удовлетворяет степенному закону. На данный момент вопрос о том, удовлетворяет ли распределение степеней в реальных сетях степенному закону, остается спорным [3], однако правосторонняя асимметрия этого

¹ Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

распределения остается неоспорима. Также в [3] авторы отмечают, что распределение Вейбулла куда более точно описывает распределение степеней в реальных сетях.

В [4] был предложен алгоритм для построения безмасштабной сети с большим средним кластерным коэффициентом. В [5] автор обнаружил, что свойства малого мира и безмасштабности недостаточны для сетей реального мира. Точнее, автор предложил новую центральность, называемую кси-центральностью, распределение которой хорошо описывается распределением Вейбулла, имеет линейную структуру с тяжелым хвостом на логарифмическом графике, является правосторонне асимметричной для реальных сетей и центральной для модельных сетей или искусственных. Это в свою очередь, показывает, что распределение кси-центральности отличает реальные сети от искусственных.

В данной работе построен ряд центральностей, основанных на степени и кси-центральности, которые также хорошо описываются распределением Вейбулла и обладают схожими свойствами для различения реальных и искусственных сетей. Эти новые инварианты основаны на матрице Лапласа и связаны с ее спектром.

2. Обобщение степени и кси центральностей

2.1. Основная теория

Рассмотрим граф G как одномерный симплициальный комплекс. Пусть для простоты G – простой неориентированный связный граф. Чтобы построить из него цепной комплекс, нужно добавить ориентацию на ребра G . Так как определение не будет зависеть от ориентации, выберем ориентацию позже. Пусть C_k – k -мерная группа цепей над $\mathbb{R}$, соответствующая этому симплициальному комплексу. Для графа нетривиальными являются только размерности: C_0 и C_1 . Граничное отображение $C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1$ порождает отображение между двойственными пространствами (т.е. линейными функциями на цепях) $C^0 \xrightarrow{\partial^0} C^1$.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение на k -мерных цепях C_k . С помощью этого произведения можно определить двойственное отображение $C^0 \xleftarrow{(\partial^0)^*} C^1$ следующим образом: для любых двух функций $f, g \in C^k$ имеем $(\partial^k f, g) = (f, (\partial^k)^* g)$. Таким образом, цепной комплекс и коцепной комплекс имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_0 &\xrightarrow{\partial_1} C_1, \\ C^0 &\xleftarrow[(\partial^0)^*]{\partial^0} C^1. \end{aligned}$$

Отображение $L = (\partial^0)^* \partial^0 : C^0 \rightarrow C^0$ называется дискретным оператором Лапласа–Бельтрами и задается матрицей Лапласа, если в C^0 и C^1 выбрать канонический базис.

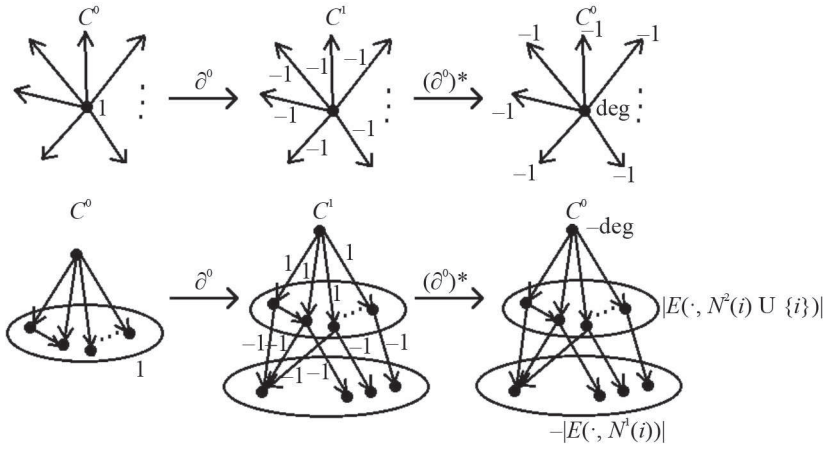


Рис. 1. Образы при отображении Лапласа–Бельтарми для функции χ_i^0 (сверху) и χ_i^1 (снизу).

Обозначим для некоторой вершины i множество ее j -х соседей (т.е. все вершины в точности на расстоянии j от i) через $\mathcal{N}^j(i)$. Рассмотрим для некоторого фиксированного i характеристическую функцию ее j -х соседей χ_i^j , а именно

$$\chi_i^j(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathcal{N}^j(i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Можно рассматривать эту функцию χ_i^j как элемент C^0 , поскольку она определена как функция на вершинах. Заметим, что вне зависимости от определения центральности, любая центральность может рассматриваться как элемент C^0 . Также отметим, что $\sum_j \chi_i^j \in \ker(L)$.

Определение 1. Назовем **центральностью j -соседей** следующее выражение:

$$\xi_i^j = \frac{(L\chi_i^j, \chi_i^j)}{(\chi_i^j, \chi_i^j)} \quad \text{для } i \in V(G).$$

Рассмотрим первые два элемента центральности j -соседей.

1) В случае $j = 0$ характеристическая функция χ_i^0 является характеристической функцией вершины i . Зафиксируем i и определим ориентацию на G : на индуцированных подграфах $\mathcal{N}^j(i)$ определим любую ориентацию, а остальные ребра ориентируем так, чтобы их начала были в $\mathcal{N}^j(i)$, а концы в $\mathcal{N}^{j+1}(i)$ для любого j . Если $j = 0$, то образ $\partial^0(\chi_i^0)$ – это элемент C^1 , равный -1 на ребрах, исходящих из вершины i , и 0 в противном случае (см. рис. 1 сверху). Образ $(\partial^0)^*\partial^0(\chi_i^0) \in C^0$ – это функция, равная $\deg(i)$ в вершине i , -1 в ее соседях и 0 в остальных вершинах. Следовательно, $(L\chi_i^0, \chi_i^0) = \deg(i)$ и $\xi_i^0 = \deg(i)$.

2) В случае $j = 1$ характеристическая функция χ_i^1 – это характеристическая функция соседей вершины i . Образ $\partial^0(\chi_i^1) \in C^1$ – это функция,

равная 1 на ребрах, выходящих из вершины i , -1 на ребрах, выходящих из $\mathcal{N}^1(i)$, и 0 в остальных (см. рис. 1 снизу). Образ $(\partial^0)^*\partial^0(\chi_i^1) \in C^0$ – это функция, равная $-\deg(i)$ в вершине i , равная числу внешних связей первой окрестности $|E(k, \mathcal{N}^1(i) \cup \{i\})|$ (т.е. числу ребер между этой окрестностью и всем остальным в графе) для любой вершины $k \in \mathcal{N}^1(i)$, равная $-|E(k, \mathcal{N}^1(i))|$ для $k \in \mathcal{N}^2(i)$ и 0 в остальных случаях. Следовательно, $(L\chi_i^1, \chi_i^1) = |E(\mathcal{N}^1(i), V(G) \setminus \mathcal{N}^1(i))|$ и (χ_i^1, χ_i^1) – это число первых соседей $\mathcal{N}^1(i)$, т.е. $\deg(i)$. Таким образом, $\xi_i^1 = \xi_i$, что определено в статье [5].

Центральность j -соседей является обобщением двух инвариантов реальных сетей: степени и кси-центральности. Заметим, что эту центральность также можно переписать, используя числовые характеристики графа.

Теорема 1. Для любого графа центральность j -соседей равна

$$\xi_i^j = \frac{|\text{out}(\mathcal{N}^j(i))|}{|\mathcal{N}^j(i)|},$$

где $\text{out}(H) = E(H, V(G) \setminus H)$ – множество связей между множеством H и остальными вершинами.

Доказательство. Это очень простой факт, вытекающий из формулы для билинейной формы матрицы Лапласа: $(Lx, x) = \sum_{k, l \in V(G), k \sim l} (x^k - x^l)^2$ и,

следовательно, $(x_k - x_l)^2 = 1$, если только $x_k = 1$ (и, следовательно, $k \in \mathcal{N}^j(i)$) и $x_l = 0$ (и, следовательно, $l \notin \mathcal{N}^j(i), l \sim k$) и наоборот.

В случае, если граф имеет изолированную вершину i , доопределим $\xi_i^j = 0$. Также отметим, что по определению эти центральности связаны с числом Чигера и максимальным собственным значением матрицы Лапласа.

Теорема 2. Рассмотрим неориентированный граф G . Пусть $h(G)$ – число Чигера графа G . Если $|\mathcal{N}^j(i)| \leq \frac{n}{2}$, то $\xi_i^j \geq h(G)$.

Отметим, что для реальных сетей $|\mathcal{N}^j(i)| \leq \frac{n}{2}$ почти всегда выполнено.

Теорема 3. Рассмотрим неориентированный граф G . Обозначим спектр матрицы Лапласа $0 = l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$. Выполняется $\xi_i^j \leq l_n$.

2.2. Вычисления

Теорема 1 может быть использована для последовательного по j вычисления центральности j -соседей. Будем хранить в памяти две характеристические матрицы $\chi_i^{j-1}(k)$ и $\chi_i^{j-2}(k)$ для $i, k \in V(G)$ с двух предыдущих шагов. Пусть k индексирует столбцы. Алгоритм вычисления центральности j -соседей следующий:

1) Инициализация: $\chi^0 = I$, $\chi^1 = A$, где I – единичная матрица, A – матрица смежности;

2) Находим матрицу $\chi^j = \text{xor}(A\chi^{j-1}, \chi^{j-2})$;

3) Для каждого i вычисляем $(L\chi_i^j, \chi_i^j)$ и $(\chi_i^j, \chi_i^j) = \sum_k (\chi_i^j)^k$.

Для $j = 0$ и $j = 1$ центральность j -соседей – это степень и кси-центральность, их можно вычислить отдельно. Для вычисления кси-центральности

см. [5]. Заметим, что вычислительную сложность можно понизить, если дополнительно сохранять матрицу $A\chi^{j-1}$, которая используется при вычислении матрицы $L\chi^j$ на предыдущем шаге.

3. Сравнение распределений реальных сетей и модельных

Были посчитаны распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5] и для сетей моделей Эрдёша–Реньи, Барабаши–Альберта, Уоттса–Строгаца и Боккалетти–Хван–Латора (искусственных). Для реаль-

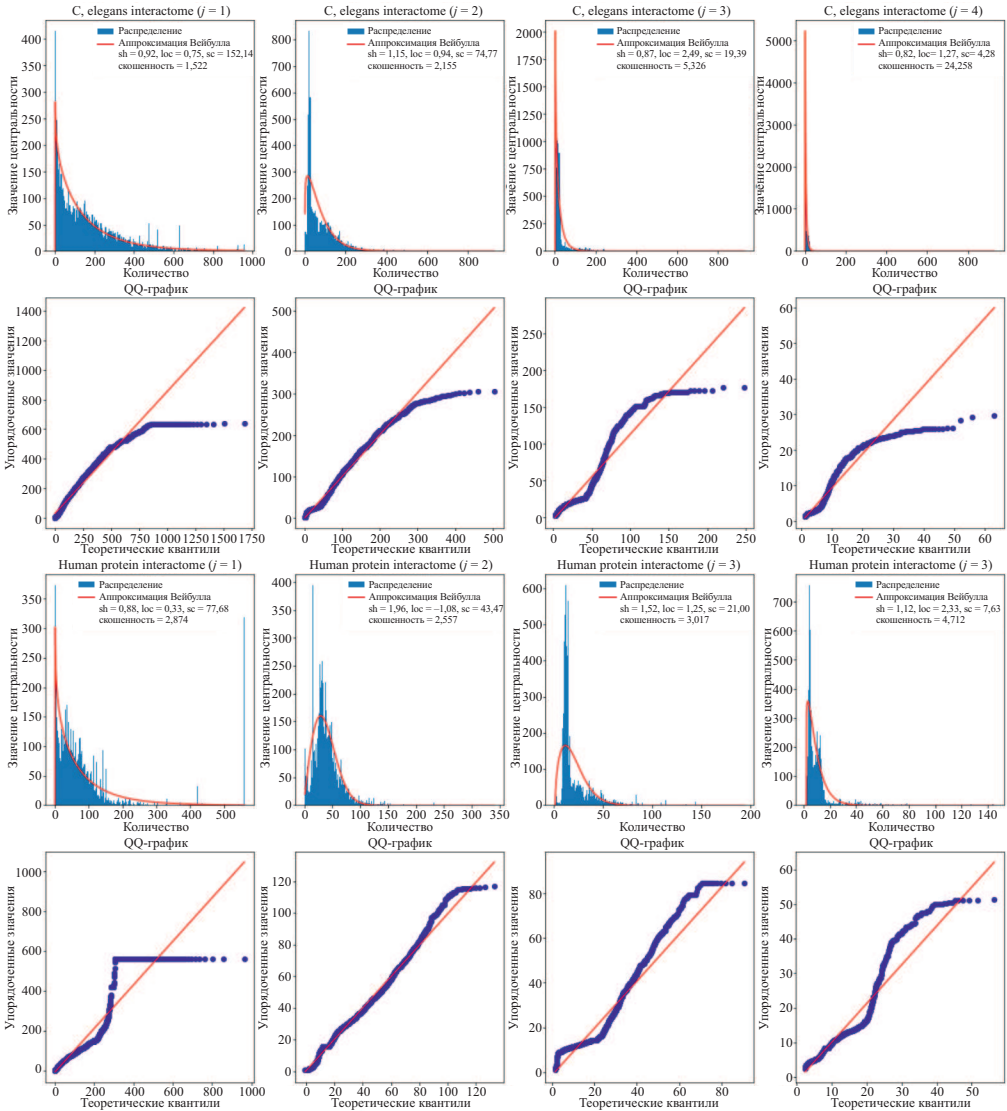


Рис. 2. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

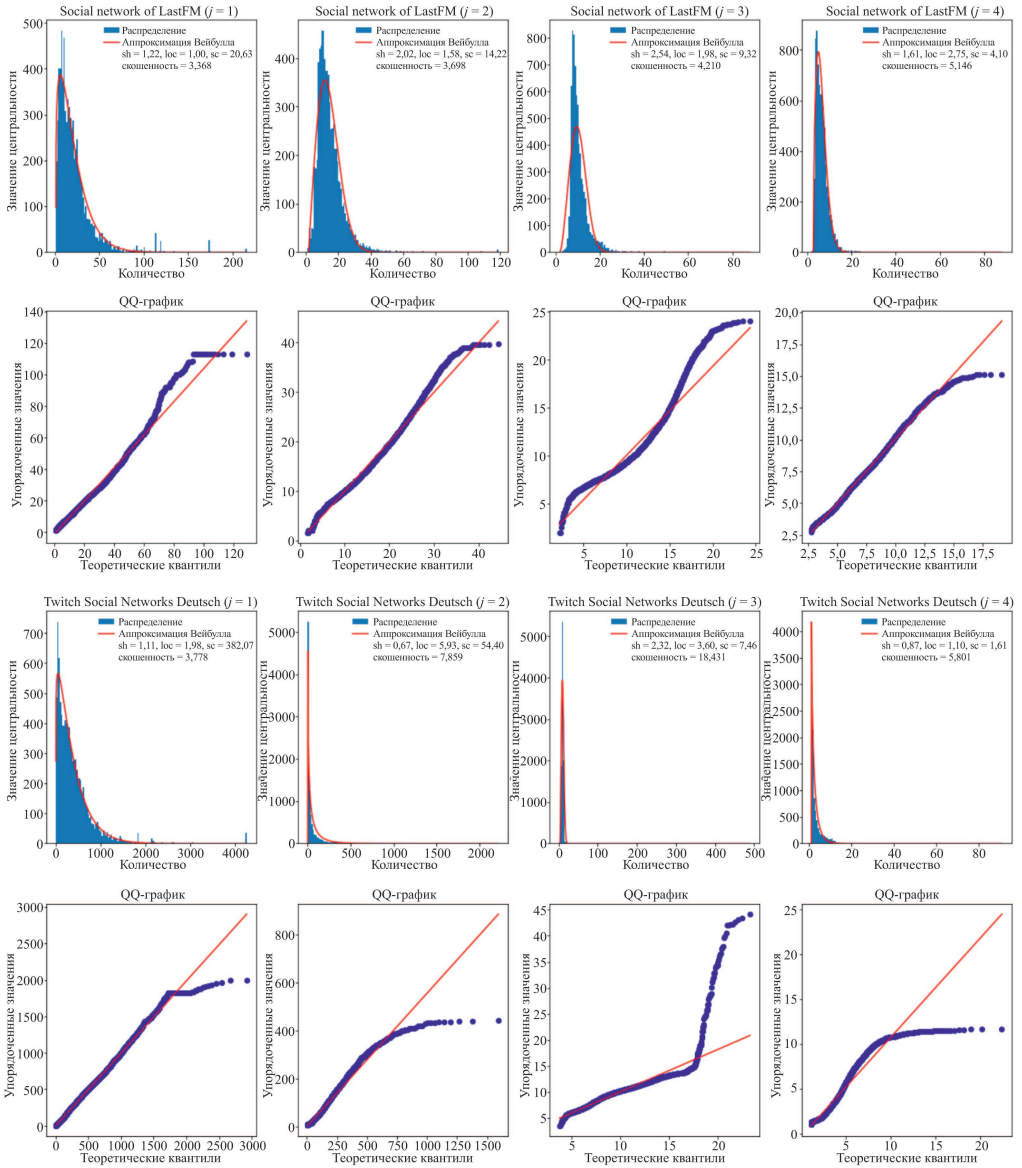


Рис. 3. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

ных сетей видно аналогичное поведение, как и для распределения степеней и распределения кси [5]: эти распределения хорошо приближаются распределением Вейбулла, имеют правостороннюю асимметрию и почти линейны на логарифмическом графике с некоторым шумом и хвостом (рис. 2–7. Остальные рисунки доступны по ссылке: OSF. <http://osf.io/d3wsj>. Доступно

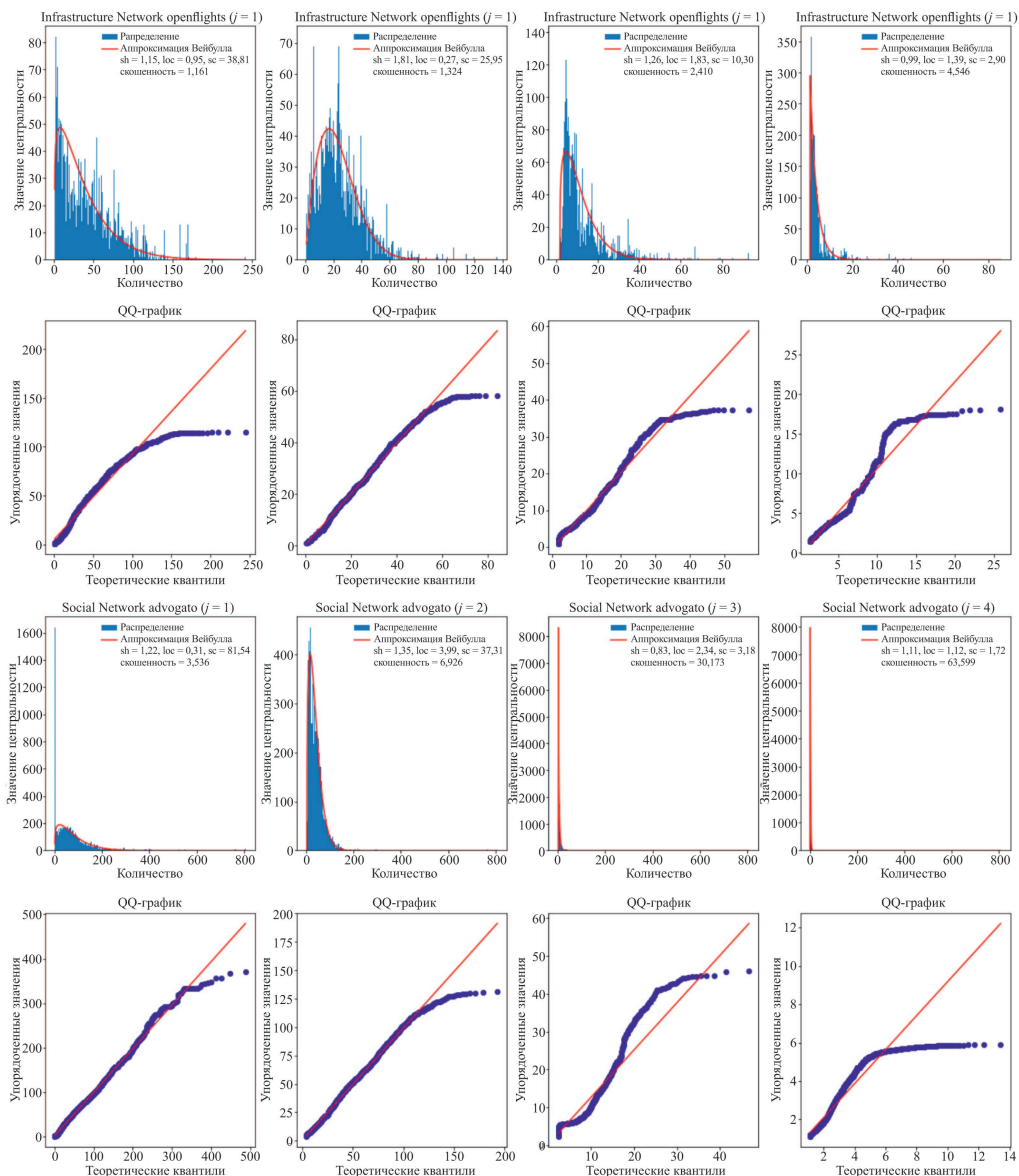


Рис. 4. Распределения центральныхностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

с 28 июля 2026). Кроме того, получаем тот же результат для сетей Эрдеша–Реньи, Барабаша–Альберта, Уоттса–Строгаца и Боккалетти–Хван–Латора, что и в [5]: распределения оказываются симметричными (рис. 8, 9).

Также вычисление коэффициента асимметрии Пирсона подтверждает этот результат. Реальные сети и модельные для каждой центральности

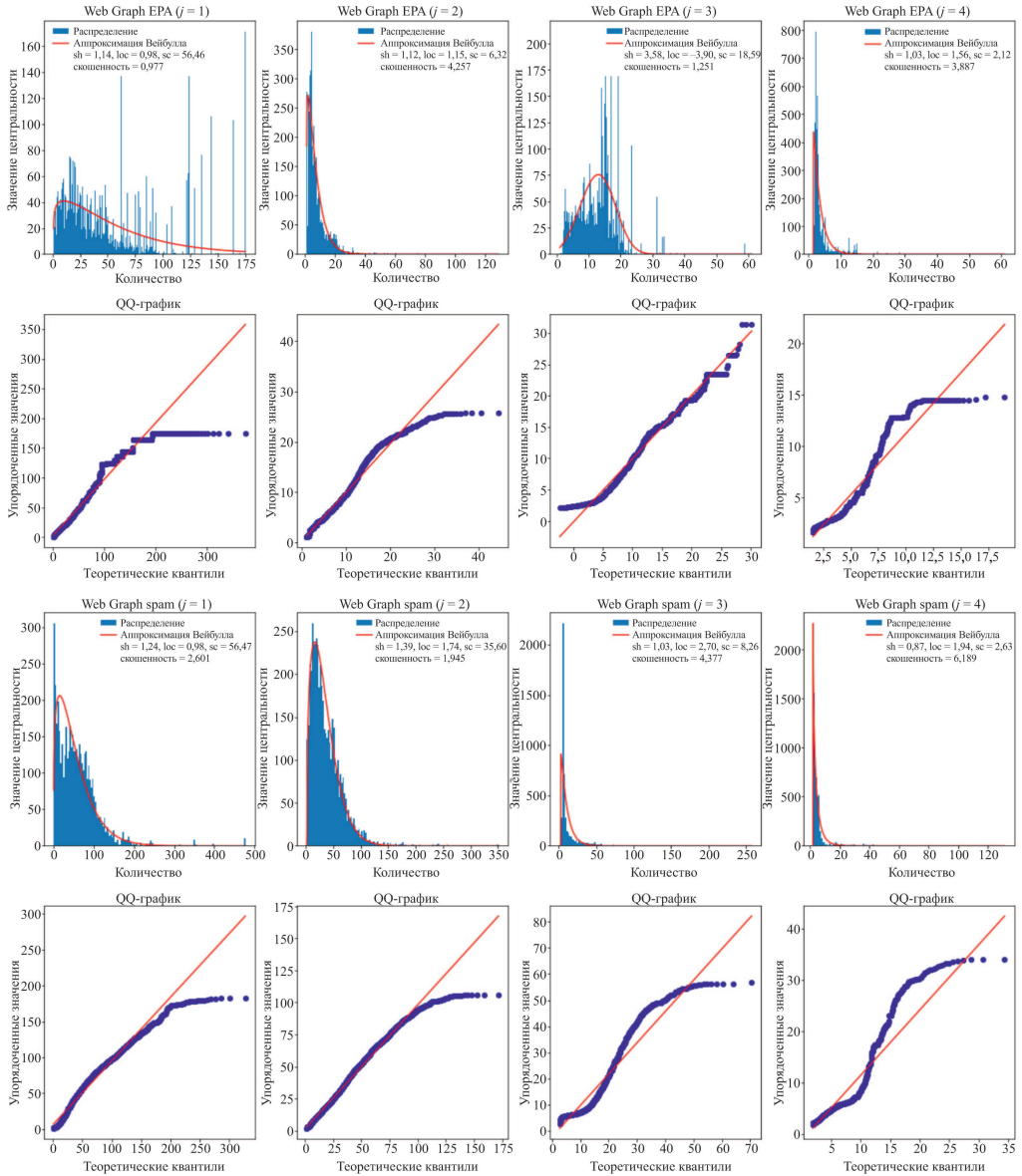


Рис. 5. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

серии разделяются посредством коэффициента асимметрии Пирсона. Для проверки качества бинарного классификатора “реальная сеть против искусственной” был проведен ROC-анализ [6] на основе значений коэффициента асимметрии Пирсона (анализ разделяющей способности, рис. 10). Для анализа было использовано 16 реальных сетей, приведенных в статье,

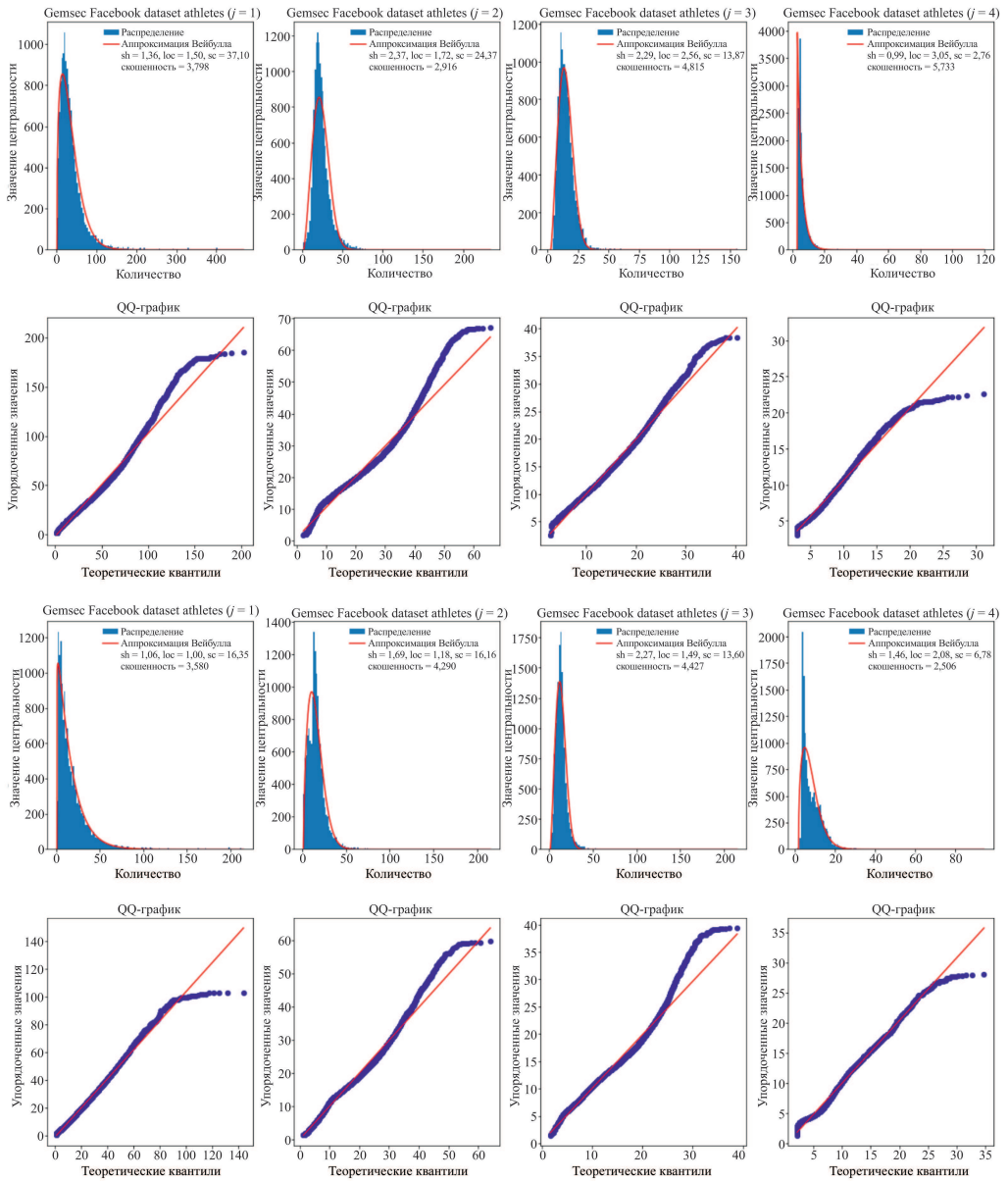


Рис. 6. Распределения центральныхностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

и 32 искусственные с различными параметрами: по 8 на каждую из моделей. Были выбраны следующие параметры: для модели Эрдеша–Реньи $n = 4000$, $p = 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2$, для модели Уоттса–Строгаца $n = 4000$, $k = 20$, $p = 0,001; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5$, для модели Барабаши–Альберта $n = 4000$, $m = 3, 5, 7, 9, 12, 20, 30, 43$, для модели

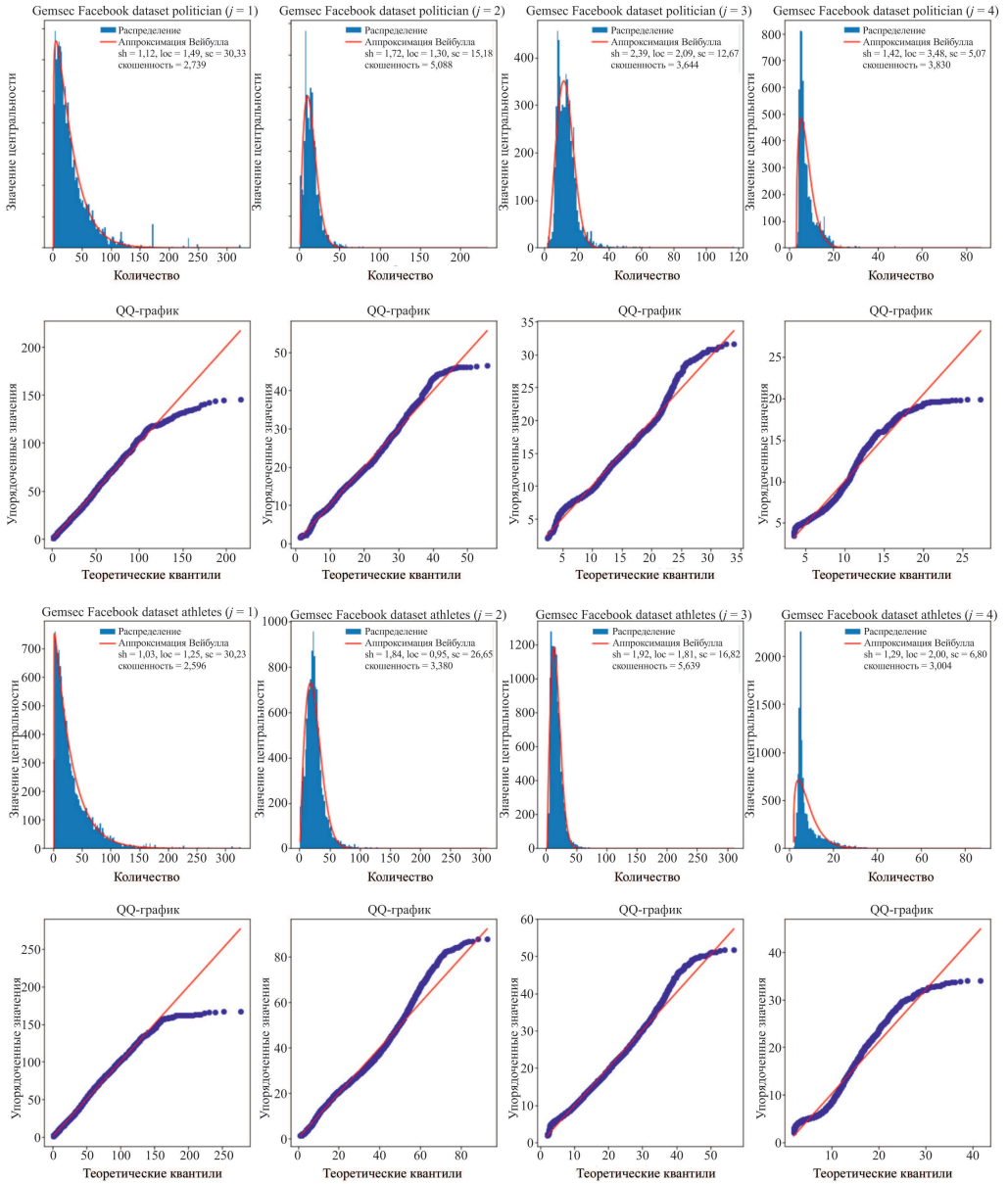


Рис. 7. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для реальных сетей из [5], аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

Боккалетти–Хван–Латора $n = 2000$, $n_0 = 50$, $m = 4, 6, 8, 10, 12, 20, 30, 43$. При фиксированном $j = 1, 2, 3, 4$ для каждого порогового значения были посчитаны доли TPR (истинно положительных) и FPR (ложноположительных) сетей, и посчитана AUC (площадь под ROC-кривой). Для каждого $j = 1, 2, 3, 4$ значение AUC оказалось близко к 1 (идеальному классификатору), что под-

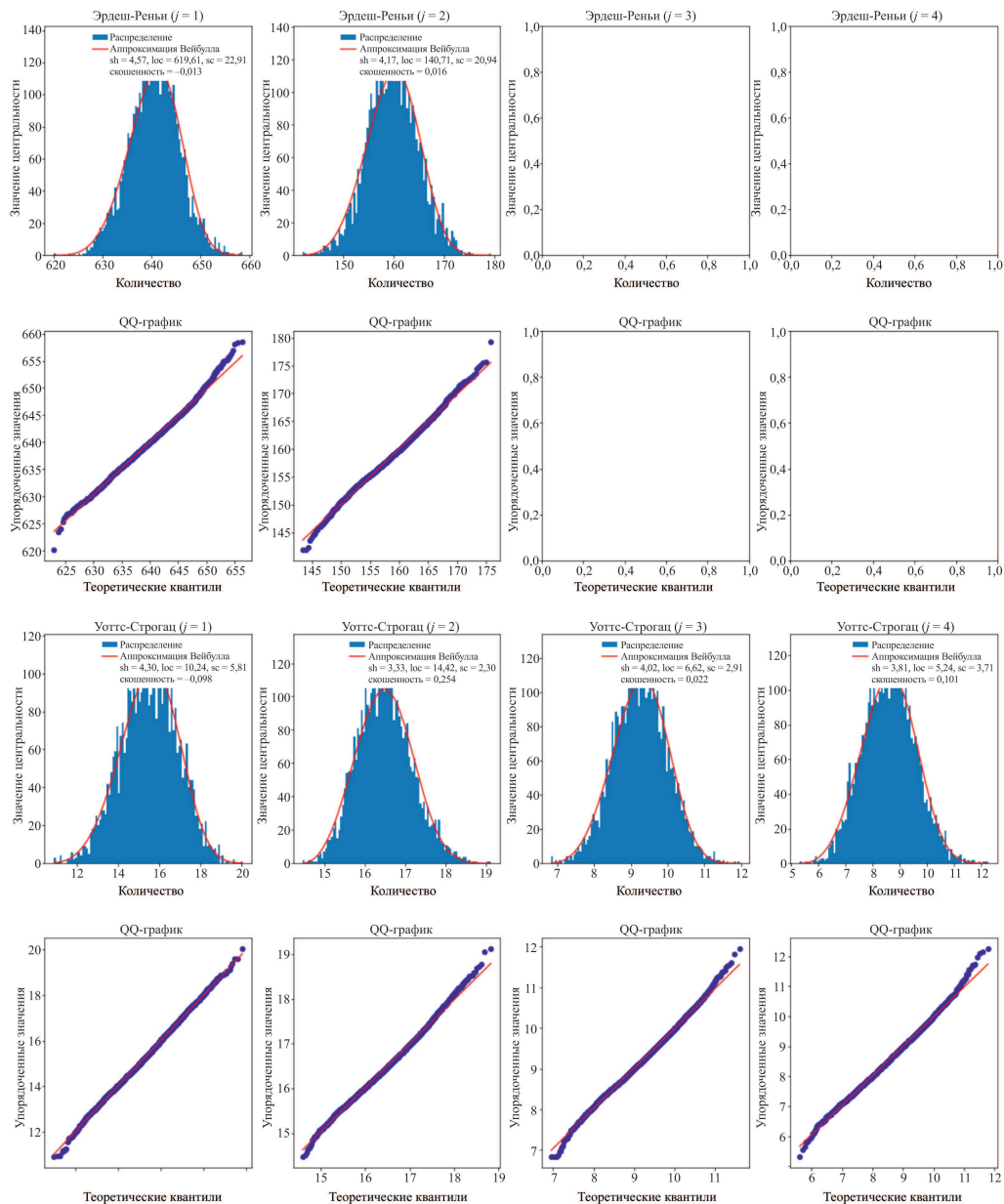


Рис. 8. Распределения центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для моделей Эрдеши-Реньи $(n, p) = (4000, 0,02)$ и Уоттса-Строгаца $(n, k, p) = (4000, 21, 0,3)$, аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

тверждает надежность центральностей j -соседей отличать реальные сети от искусственных посредством коэффициента асимметрии Пирсона. Также пороговое значение 1 коэффициента асимметрии Пирсона, оказалось оптимальным порогом классификации (на рис. 10 красная точка): реальные сети име-

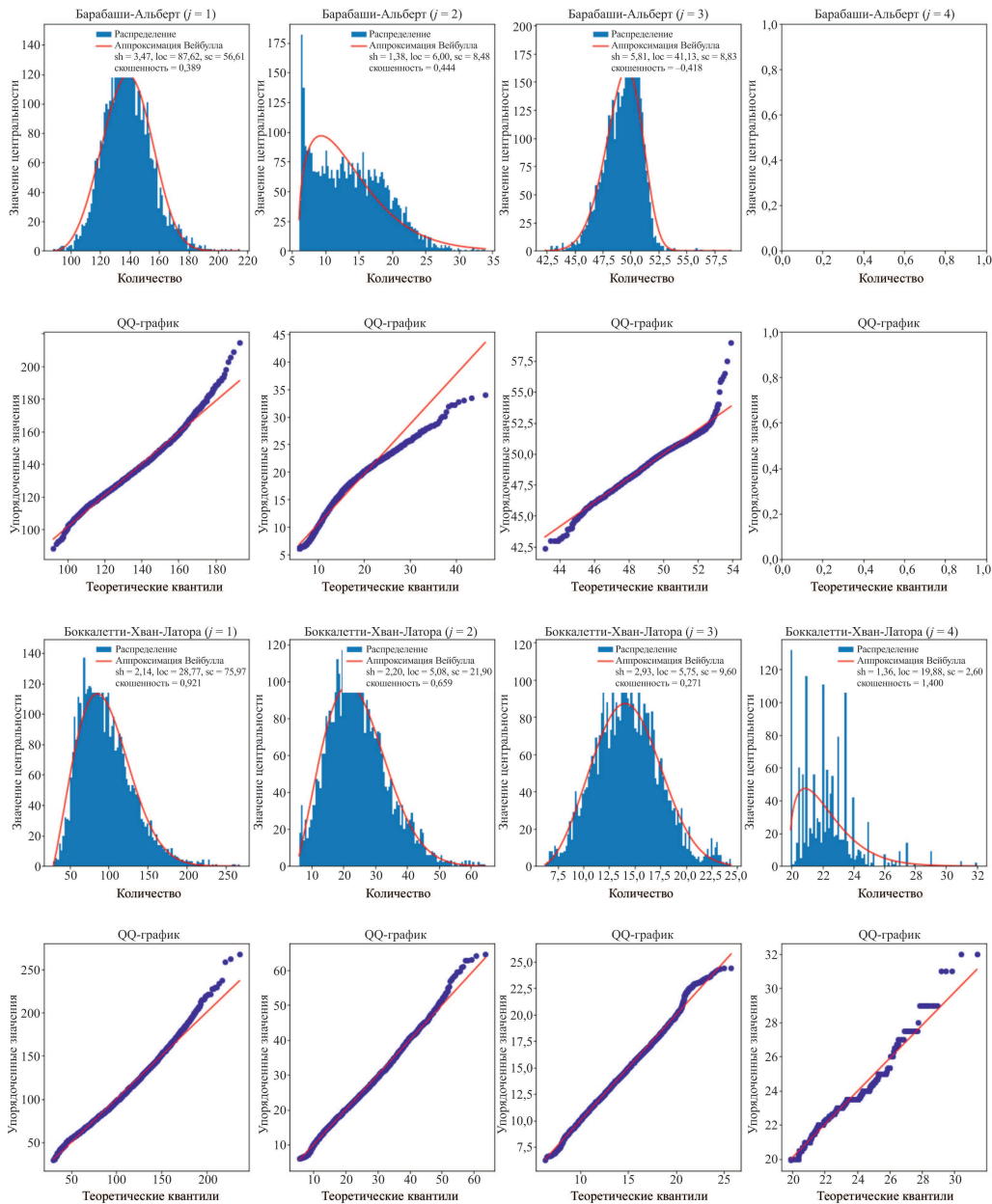


Рис. 9. Распределения центральных ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$ для моделей Барабаш–Альберта $(n, m) = (4000, 43)$ и Боккалетти–Хван–Латора $(n, m, n_0) = (4000, 20, 100)$, аппроксимированные распределением Вейбулла, и их коэффициенты асимметрии Пирсона.

ют коэффициент асимметрии Пирсона сильно больше 1, а модельные меньше 1 (в модели Боккалетти–Хванга–Латора распределение четвертой центральности оказалось слишком зашумленным).

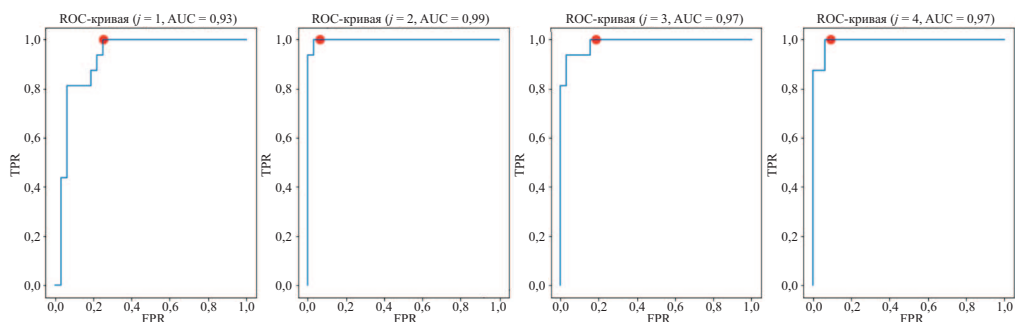


Рис. 10. ROC-кривые для бинарного классификатора “реальные сети против искусственных” на основе коэффициента асимметрии Пирсона, посчитанного по распределению центральностей ξ^j для $j = 1, 2, 3, 4$. Красная точка соответствует пороговому значению 1.

4. Заключение

В данной статье построена последовательность центральностей, называемых центральностями j -соседей, основанных на матрице Лапласа или дискретном аналоге оператора Лапласа–Бельтрами для графа. С точки зрения теории графов эти центральности связаны с числом Чигера и максимальным собственным значением матрицы Лапласа. С точки зрения приложений эти центральности являются обобщением двух центральностей с инвариантными распределениями для реальных сетей: центральности степени и кси-центральности (случаи $j = 0, 1$). Они имеют правостороннее скошенное распределение для реальных сетей, отличное (симметричное) для искусственных, и приближаются распределением Вейбулла. Показано, что пороговое значение 1 в коэффициентах асимметрии Пирсона отличает реальные сети от искусственных для каждого инварианта.

Эти центральности j -соседей названы инвариантными характеристиками, потому что для любой сети, независимо от области ее применения (биологическая, социальная, интернет и т.д.), независимо от ее структуры, соотношения числа вершин и ребер, распределения этих центральностей оказываются правосторонне асимметричными, аппроксимируются распределением Вейбулла, а также демонстрируют линейное поведение с тяжелым хвостом на логарифмическом графике (как в случае свойства безмасштабности). Однако для свойства безмасштабности существует хорошая теория, объясняющая его возникновение, и модель построения сетей с этим свойством, но предложенные здесь центральности представляют собой совершенно новые инварианты, и многие из них еще предстоит изучить. Тем не менее они уже могут быть использовать на практике. Например, их можно использовать для проверки того, является ли искомая сеть реальной или искусственной. Кроме того, поскольку они являются инвариантами реальных сетей, они являются важными кандидатами для признаков в GML-моделях или моделях машинного обучения на основе графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albert R., Jeong H., Barabasi A.L.* Diameter of the world-wide web // *Nature*. 1999. V. 401. No. 6749. P. 130–131.
2. *Barabasi A.L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V. 286 No. 5439. P. 509–512.
3. *Broido A.D., Clauset A.* Scale-free networks are rare // *Nature Communications*. 2019. V. 10. No. 1. P. 1017.
4. *Boccaletti S., Hwang D.U., Latora V.* Growing hierarchical scale-free networks by means of nonhierarchical processes // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. V. 17. No. 07. P. 2447–2452.
5. *Tuzhilin M.* Capability centrality: the next step from scale-free property // *arXiv preprint arXiv:2605.03796*. 2026.
6. *Nakas C.T., Bantis L.E., Gatsonis C.A.* ROC analysis for classification and prediction in practice // *Chapman and Hall/CRC*. 2023.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 06.06.2026

После доработки 15.07.2026

Принята к публикации 20.07.2026