

© 2026 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет)

ИНТЕГРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: МЕТОД ВЗВЕШЕННОГО ФАЗОВОГО ОБЪЕМА И ЭЛЛИпсоИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ¹

Предложен подход к анализу диссипативности и устойчивости динамических систем, основанный на понятии взвешенного фазового объема. Для произвольной весовой функции получено интегральное тождество, описывающее эволюцию взвешенного объема движущейся области и его обратной величины. Установлена связь полученных соотношений с теоремой Лиувилля об изменении фазового объема и транспортной теоремой Рейнольдса из механики сплошных сред. Сформулированы достаточные условия диссипативности и интегральной устойчивости. Показано, что одновременное выполнение условий для весовой функции и ее обратной величины накладывает геометрические ограничения на динамику системы. На основе этих условий построены эволюционные уравнения для покрывающего и внутреннего эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости. Доказана связь интегральной устойчивости с классической устойчивостью по Ляпунову. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Ключевые слова: теорема Лиувилля, транспортная теорема Рейнольдса, взвешенный фазовый объем, диссипативность, эллипсоидальная аппроксимация, дивергентный метод устойчивости, устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.7868/S2413977726110030

1. Введение

Исследование устойчивости динамических систем является фундаментальной проблемой теории дифференциальных уравнений и математической физики. Классическая теория устойчивости, заложенная в трудах А.М. Ляпунова [1], на протяжении более века остается основным инструментом анализа поведения решений. Развита им методология, основанная на исследовании знака производной специально подобранной скалярной функции (функции Ляпунова) вдоль траекторий системы, получила глубокое развитие, например в [2–6]. Несмотря на универсальность и широкую применимость, метод функций Ляпунова часто сталкивается с проблемой выбора подходящей

¹ Работа выполнена в Институте проблем машиноведения РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008.

функции, особенно для сложных нелинейных, неавтономных или разрывных систем, где конструктивных правил построения не существует.

Параллельно развивались иные подходы к анализу устойчивости. С одной стороны, это энергетические методы [7] и теория диссипативных систем [8], которые, хотя и предлагают физически интерпретируемые критерии, также требуют построения специальных функционалов. С другой стороны, значительные усилия были направлены на использование геометрических свойств векторного поля, в частности его дивергенции. Исходным пунктом здесь является классическая теорема Лиувилля [9, 10] об изменении фазового объема вдоль потока системы и ее интегральное обобщение – транспортная теорема Рейнольдса [11], широко используемая в механике сплошных сред. Идеи использования дивергенции для анализа устойчивости восходят к работам [12–14]. В отечественной научной школе это направление оформилось как индексный и дивергентный методы, представленные в [15–17], где устойчивость особой точки связывалась со знаком дивергенции или с поведением векторного поля на границах областей.

Существенный вклад в развитие качественной теории внесли работы В.П. Жукова [18–21] и др., в которых были предложены методы исследования устойчивости и неустойчивости, основанные на свойствах источников и стоков векторного поля, а также на анализе дивергенции для систем второго порядка. Однако эти результаты часто ограничены размерностью системы или требуют специфических предположений. Геометрические методы, использующие вращение векторного поля [22], также эффективны, но в основном для анализа на плоскости.

Перечисленные подходы получили дальнейшее развитие в работах последних двух десятилетий. В работах А. Рантцера [23, 24] предложен метод двойственных функций Ляпунова (метод плотностей), где исследуется эволюция плотности распределения начальных условий. Условия устойчивости формулируются в терминах существования стационарной функции плотности, удовлетворяющей уравнению в частных производных. В [25] получены необходимые условия почти глобальной устойчивости в рамках этого подхода. Дивергентные методы [18–21, 23–25] обобщены в [26–30] на нелинейные системы произвольной размерности. В [31, 32] дивергентный подход распространен на плотностные системы с возмущениями и получены как необходимые, так и достаточные условия глобальной устойчивости.

Отдельного упоминания заслуживает теория инвариантных множеств [33, 34], в рамках которой разработаны конструктивные методы построения эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости [35] и их применение в задачах управления и оценивания. Эти результаты близки по духу к геометрической части настоящей работы, однако в них, как правило, строятся лишь внешние (покрывающие) оценки, тогда как предлагаемый в статье подход дает и внутренние гарантированные границы.

Интерес к геометрическим и плотностным методам анализа динамических систем сохраняется и в публикациях последних нескольких лет. В частности, метод функций плотности получил развитие в задачах безопасной навигации. В [36, 37] с помощью функции плотности решается задача синтеза управления, гарантирующего уклонение от препятствий, что содержательно перекликается с идеей построения внутреннего эллипсоида в настоящей статье, свободного от траекторий системы. В [38] плотностные критерии распространены на анализ конечной устойчивости неавтономных систем, а в [39] получены обратные теоремы, связывающие существование плотности Ляпунова с устойчивостью временных и периодических систем. Предлагаемый в настоящей статье подход отличается от [36–39] тем, что использует произвольную весовую функцию, не требующую стационарности, а условия диссипативности формулируются непосредственно в терминах векторного поля и позволяют строить эволюционирующие эллипсоидальные оценки множеств достижимости как сверху (покрывающий эллипсоид), так и снизу (внутренний эллипсоид), что дает полную двустороннюю геометрическую картину динамики ансамбля траекторий.

Настоящая статья предлагает новый подход к анализу устойчивости и диссипативности динамических систем с использованием концепции взвешенного фазового объема. Ниже перечислим вклад статьи и ее основные отличия от существующих результатов:

- В отличие от классической теоремы Лиувилля [9, 10], описывающей эволюцию евклидова объема $\text{vol}(\Omega_t)$, и транспортной теоремы Рейнольдса [11] предлагаемый подход вводит произвольную весовую функцию $W(x, t)$, что позволяет исследовать эволюцию *взвешенного* объема $\int_{\Omega_t} W(x, t) dx$ и его обратной величины. Это дает возможность изучать динамику ансамблей траекторий в «искривленном» фазовом пространстве и переходить от анализа объема к анализу более сложных интегральных характеристик (см. раздел 4). Установлена связь скорости изменения интегралов от W и $1/W$ с производной Ли $\dot{W}$ и дивергенции поля, что является обобщением теоремы Лиувилля и транспортной теоремы Рейнольдса.
- Сформулированы и проанализированы условия диссипативности (см. раздел 4) для весовой функции W и ее обратной величины $1/W$. Показано, что их одновременное выполнение приводит к неубыванию произведения соответствующих интегралов (теорема 3). Этот результат интерпретирован как «принцип неопределенности» для динамических систем (замечание 1), накладывающий геометрические ограничения на возможную динамику, что отличает полученный результат от аналогов в классической теории устойчивости [1, 4] или дивергентных методах [15, 21, 23–30].
- Введены определения интегральной устойчивости (а также асимптотической и экспоненциальной интегральной устойчивости, см. раздел 5), которые классифицируют системы по скорости убывания взвешенного объема. В теореме 5 получены дифференциальные неравенства, гарантирующие экспоненциальное убывание. В отличие от [23–25], где условия формули-

руются в терминах стационарной плотности, предложенные критерии являются нестационарными по времени и непосредственно проверяются на векторном поле системы.

- Разработан метод построения эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости. В теореме 6 из первого условия диссипативности выведено уравнение эволюции *покрывающего* эллипсоида, который гарантированно содержит изучаемую область Ω_t . В теореме 7 из второго условия диссипативности получено уравнение для *внутреннего* эллипсоида, который свободен от точек изучаемой области. Совместное использование этих теорем (замечание 5) дает полную геометрическую картину динамики в виде «кольца» между двумя эллипсоидами, что является более информативным, чем традиционные оценки множеств достижимости [33–35, 40].
- В теореме 8 показано, что из существования сжимающегося семейства эллипсоидов, содержащих образы траекторий, следует устойчивость по Ляпунову. Тем самым установлена связь между предложенным интегральным подходом и классической теорией А.М. Ляпунова.

Таким образом, в отличие от классических методов, учитывающих анализ поведения отдельной траектории или изменение евклидова объема, развитый подход позволяет исследовать динамику систем в интегральной метрике с произвольным весом. Возможность построения на этой основе аппроксимирующих эллипсоидов, гарантированно содержащих (или не содержащих) эволюционирующую область, предоставляет собой геометрический инструмент для решения широкого круга задач от анализа устойчивости до синтеза алгоритмов управления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad \dot{x} = F(x, t),$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+ = [0; \infty)$), $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкое векторное поле ($F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$). Если потребуются гладкость другого порядка, то об этом будет отдельно указано при выводе соответствующего результата. Предполагаем, что система (1) порождает глобальный фазовый поток $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задача Коши с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет единственное решение $x(t) = \varphi_t(x_0)$, определенное для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим произвольную измеримую по Лебегу область $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ с конечной мерой. Под действием потока эта область эволюционирует:

$$(2) \quad \Omega_t = \varphi_t(\Omega_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi_t(\xi), \xi \in \Omega_0\}.$$

Пусть $W : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция класса $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ (в разделе 5 и далее для анализа устойчивости системы (1) будет введено

дополнительное предположение о положительной определенности функции $W(x, t)$. Введем интегральные выражения:

$$(3) \quad I(t) = \int_{\Omega_t} W(x, t) dx, \quad I_{-1}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx,$$

где dx обозначает элемент объема в $\mathbb{R}^n$. Во втором интегральном выражении считается, что $W(x, t) \neq 0$ для всех $x \in \Omega_t$ и $t \geq 0$.

Основная цель статьи – исследовать поведение и устойчивость системы (1) в интегральной метрике, задаваемой весовой функцией $W(x, t)$. Для этого в статье будут получены выражения для скоростей изменения взвешенного фазового объема и его обратной величины, на основе которых будут сформулированы достаточные условия диссипативности, определения интегральной устойчивости и метод построения эллипсоидальных аппроксимаций множеств достижимости.

3. Предварительные сведения

Для функции W определим производную вдоль траекторий системы (1):

$$(4) \quad \dot{W}(x, t) = \frac{\partial W}{\partial t}(x, t) + \nabla W(x, t)^\top F(x, t).$$

Данную величину часто называют производной Ли функции W по направлению векторного поля F . Символ « $\top$ » означает операцию транспонирования. В статье может встречаться запись $\nabla W(\varphi_t(\xi), t)$, что будет означать $\nabla W(\varphi_t(\xi), t) = \nabla W(x, t)|_{x=\varphi_t(\xi)} = \text{col} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x_1}(x, t), \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}(x, t) \right\}$.

Пусть $J_t(\xi) = \partial \varphi_t(\xi) / \partial \xi$ – матрица Якоби потока. Известно, что $J_t(\xi)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dt} J_t(\xi) = A(\varphi_t(\xi), t) J_t(\xi), \quad J_0(\xi) = E,$$

где $A(x, t) = \partial F(x, t) / \partial x$ – матрица Якоби векторного поля, E – единичная матрица.

Теорема 1 (теорема Лиувилля [9, 10, 41, 42]). *Для определителя матрицы Якоби справедливо соотношение*

$$\frac{d}{dt} \det J_t(\xi) = \det J_t(\xi) \operatorname{tr} A(\varphi_t(\xi), t).$$

Поскольку $\operatorname{tr} A(x) = \operatorname{div} F(x, t)$, то из (1) следует, что

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) = \det J_t(\xi) \operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t).$$

Здесь и далее $\operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t) = \operatorname{div} F(x, t)|_{x=\varphi_t(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x, t)$.

Для потоков, порожденных системой (1), определитель Якоби всегда положителен. Действительно, уравнение (5) представляет собой линейное однородное уравнение первого порядка относительно $\det J_t$, решение которого имеет вид

$$\det J_t(\xi) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div} F(\varphi_s(\xi), s) ds \right) > 0 \quad \forall t.$$

Поэтому в дальнейшем знак модуля будет опущен при работе с определителем Якоби.

4. Интегральные соотношения

Следующая теорема дает явные выражения для скорости изменения взвешенного фазового объема и его обратной величины вдоль потока системы.

Теорема 2. Пусть $W \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, а $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ — измеримая область с конечной мерой. Тогда для функций $I(t)$ и $I_{-1}(t)$, определенных формулами (3), справедливы соответствующие равенства

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &:= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx = \int_{\Omega_t} [\dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t)] dx, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &:= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx = \int_{\Omega_t} \left[-\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) \right] dx, \end{aligned}$$

где $\dot{W}(x, t)$ определяется формулой (4).

Доказательства всех теорем приведены в Приложении. Объединяя полученные результаты в теореме 2, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Для динамической системы (1), любой области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ и любой положительной функции $W(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ справедливо неравенство

$$(7) \quad \left(\int_{\Omega_t} W(x, t) dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \right) \geq [\operatorname{vol}(\Omega_t)]^2.$$

Если одновременно выполнены условия диссипативности:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) &\leq 0 \quad \forall x, t, \\ -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) &\leq 0 \quad \forall x, t, \end{aligned}$$

то величина $\left(\int_{\Omega_t} W dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W} dx \right)$ является невозрастающей функцией времени.

Полученные в теоремах 2 и 3 результаты и условия диссипативности обобщают классические интегральные теоремы. В последующих следствиях и замечаниях эти связи сформулированы в явном виде.

Следствие 1. Если $W(x, t) \equiv 1$, то $\dot{W}(x, t) = 0$, и формула (6) принимает вид $\frac{d}{dt} \text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \text{div } F(x, t) dx$, что представляет собой интегральную форму теоремы Лиувилля.

Следствие 2 (консервативные системы). Если $\text{div } F(x, t) \equiv 0$ (система сохраняет фазовый объем), то формулы в (6) упрощаются: $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \dot{W}(x, t) dx$, $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx = - \int_{\Omega_t} \frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} dx$.

Следствие 3 (диссипативные системы). Из второй части теоремы 3 следует, что величина $\int_{\Omega_t} W(x, t) dx$ (или $\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx$) не возрастает со временем. Это может служить интегральным критерием диссипативности.

Теорема 4 (транспортная теорема Рейнольдса [11]). Пусть Ω_t – область, движущаяся со скоростью $F(x, t)$. Тогда для любой гладкой функции $f(x, t)$ выполняется $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(fF) \right) dx$.

Следствие 4. Если в теореме 2 принять $W(x, t) = f(x, t)$ ($1/W(x, t) = f(x, t)$) и учесть соотношение $\text{div}(fF) = \nabla f^\top F + \text{div}(F)f$, то получим теорему 4.

Соотношения (6) могут найти применение в теории управления и анализе устойчивости, позволяя получать двусторонние оценки эволюции системы и исследовать ее диссипативные свойства. Особый интерес представляет случай, когда система диссипативна по отношению к W и $1/W$ одновременно. Это накладывает жесткие ограничения на возможную динамику и может служить критерием специальных типов устойчивости (см. раздел 5).

Замечание 1. Выражение (7) описывает, как меняется во времени соотношение между объемами в двух конформно связанных метриках. В сжимающихся системах ($\text{div } F < 0$) произведение может убывать, но никогда не становится меньше квадрата евклидова объема. Также неравенство (7) показывает, что нельзя сделать одновременно сколь угодно малыми и интеграл от W , и интеграл от $1/W$. То есть чем больше «концентрация» массы в области (большое значение $I(t)$), тем меньше должна быть «размазанность» (величина $I_{-1}(t)$), и наоборот. Величины W и $1/W$ являются взаимно дополнительными характеристиками системы, т.е. увеличение одной неизбежно приводит к уменьшению другой при фиксированном объеме. Произведение этих величин имеет нижнюю границу, определяемую геометрией области. Это напоминает принцип неопределенности Гейзенберга в квантовой механике (отсутствие возможности одновременно точно измерить координату и импульс), который утверждает, что для любой волновой функции $\psi(x)$ произведение дисперсий координаты и импульса ограничено снизу: $\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$.

5. Приложение к исследованию устойчивости

5.1. Интегральные критерии устойчивости

Дадим вначале определения, в рамках которых будет исследована устойчивость системы (1).

Определение 1. Система (1) называется **интегрально устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$, если для любой измеримой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ с конечной мерой существует константа $C(\Omega_0) > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено хотя бы одно из неравенств

$$(9) \quad I(t) \leq C(\Omega_0), \quad I_{-1}(t) \leq C(\Omega_0).$$

Определение 2. Система (1) называется **интегрально асимптотически устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$, если она интегрально устойчива и, кроме того, для любой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ выполнено хотя бы одно из соотношений

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_{-1}(t) = 0.$$

Определение 3. Система (1) называется **интегрально экспоненциально устойчивой** относительно весовой функции $W(x, t)$ с показателем $\gamma > 0$, если для любой области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ существует константа $C(\Omega_0) > 0$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнена хотя бы одна из оценок

$$(11) \quad I(t) \leq C(\Omega_0)e^{-\gamma t}, \quad I_{-1}(t) \leq C(\Omega_0)e^{-\gamma t}.$$

Понятия интегральной устойчивости в определениях 1–3 являются базой для обобщения дивергентного подхода исследования устойчивости [18–21, 23–32]. С содержательной точки зрения интегральная устойчивость означает, что взвешенный фазовый объем области, занятой ансамблем траекторий, остается ограниченным во времени (или экспоненциально убывает). Это свойство характеризует диссипативное поведение системы в интегральной метрике и не требует устойчивости каждой отдельной траектории в смысле Ляпунова. Интегральная устойчивость полезна для анализа систем, в которых важна ограниченность «энергии» ансамбля траекторий, а не сходимость каждой из них к началу координат. Она позволяет гарантировать, что множество достижимости не расплывается и остается в некотором смысле ограниченным, что важно в задачах управления, оценивания и фильтрации.

Рассмотрим систему (1) с положением равновесия в начале координат: $F(0, t) = 0$ для любых $t \in \mathbb{R}_+$. Пусть $W(x, t)$ – произвольная положительно определенная функция ($W(x, t) > 0$ при $x \neq 0$ и $t \in \mathbb{R}_+$, $W(0, t) = 0$).

Теорема 5. Если существует функция $W \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $W(x, t) > 0$ при $x \neq 0$, и число $\gamma > 0$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$ выполнены

неравенства

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) &\leq -\gamma W(x, t), \\ -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) &\leq -\frac{\gamma}{W(x, t)}, \end{aligned}$$

то для любой начальной области Ω_0 справедлива экспоненциальная оценка

$$(13) \quad \int_{\Omega_t} W(x, t) dx \leq e^{-\gamma t} \int_{\Omega_0} W(x, t) dx, \quad \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \leq e^{-\gamma t} \int_{\Omega_0} \frac{1}{W(x, t)} dx.$$

Таким образом, при $\gamma = 0$ получим интегральную устойчивость с $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ ($C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$). При $\gamma > 0$ получим интегральную экспоненциальную устойчивость с $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ ($C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$).

Требование интегральной устойчивости в теореме 5 накладывает удобно проверяемые условия диссипативности непосредственно на векторное поле системы (1) и весовую функцию $W(x, t)$. В отличие от классического метода функций Ляпунова здесь не требуется строить функцию, строго убывающую вдоль каждой траектории. Достаточно обеспечить выполнение неравенств (12), (13) для выбранной весовой функции $W(x, t)$. Выполнение данных условий гарантирует, что любое измеримое множество начальных состояний эволюционирует так, что соответствующий взвешенный объем не возрастает (убывает), что дает количественную меру диссипации и может быть использовано для построения гарантированных эллипсоидальных оценок множеств достижимости (см. разделы 6, 7).

Замечание 2. Константа $C(\Omega_0)$ в определениях 1 и 3 может зависеть от выбора начальной области Ω_0 (ее размера, формы и положения), но не зависит от времени t . В случае, когда выполнены дифференциальные неравенства (12), можно выбрать $C(\Omega_0) = I(\Omega_0)$ (соответственно $C(\Omega_0) = I_{-1}(\Omega_0)$).

Замечание 3. Пусть выполнено условие (12) при $\gamma = 0$ и, кроме того, множества

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \dot{W}(x, t) + W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) = 0 \right\}, \\ \mathcal{A}_{-1} &= \left\{ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : -\frac{\dot{W}(x, t)}{W^2(x, t)} + \frac{1}{W(x, t)} \operatorname{div} F(x, t) = 0 \right\} \end{aligned}$$

не содержат целых траекторий системы (1) (за исключением положения равновесия $x = 0$). Тогда система интегрально асимптотически устойчива.

Замечание 4. Условие (12) при $W(x, t) > 0$ можно переписать в виде

$$(14) \quad \frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma, \quad -\frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma \quad \forall x \neq 0.$$

Левая часть представляет собой сумму относительной скорости изменения функции W вдоль траекторий и дивергенции поля. Эти два условия можно объединить в одно неравенство:

$$(15) \quad \left| \frac{\dot{W}(x, t)}{W(x, t)} \right| + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma \Leftrightarrow \left| \frac{d}{dt} \ln W(x(t), t) \right| + \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma,$$

которое, однако, является более сильным, чем каждое из условий по отдельности, и требует диссипативности как для W , так и для $1/W$ одновременно. С другой стороны, складывая (14), получаем:

$$(16) \quad \operatorname{div} F(x, t) \leq -\gamma.$$

Таким образом, одновременное выполнение условий (12) возможно только в системах с неположительной дивергенцией, т.е. в системах, которые не расширяют фазовый объем (сжимающие или сохраняющие объем). При $\gamma = 0$ выражение (15) дает геометрическое ограничение: относительная скорость изменения весовой функции не может превышать по модулю скорость сжатия фазового объема.

5.2. Локальный анализ

В окрестности положения равновесия $x = 0$ можно использовать линеаризацию. Пусть $F(0, t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и векторное поле $F(x, t)$ является достаточно гладким по x в окрестности нуля. Обозначим через $A(t) = \partial F(0, t)$ матрицу линеаризованной системы. Тогда $\operatorname{div} F(0, t) = \operatorname{tr} A(t)$ (след матрицы $A(t)$). Рассмотрим весовую функцию $W(x, t)$ вида

$$(17) \quad W(x, t) = x^\top P(t)x,$$

где $P(t)$ – симметричная положительно определенная матрица, гладко зависящая от времени. Такая функция положительна при $x \neq 0$ и допускает локальный анализ.

В окрестности начала координат разложим $F(x, t)$ в ряд Тейлора по x :

$$(18) \quad \dot{x} := F(x, t) = A(t)x + O(\|x\|^2),$$

где запись $\phi(x) = O(\|x\|^k)$ при $x \rightarrow 0$ означает, что $\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|^k} < \infty$.

Используя (4), вычислим полную производную W , заданную (17), вдоль траекторий системы (18): $\dot{W}(x, t) = x^\top \dot{P}(t)x + 2x^\top P(t)A(t)x + O(\|x\|^3)$. Учитывая, что $W(x, t) \operatorname{div} F(x, t) = x^\top P(t)x \cdot \operatorname{tr} A(t) + o(\|x\|^2)$, получаем разложение для первого условия диссипативности:

$$(19) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W^\top F + W \operatorname{div} F = \\ & = x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + \operatorname{tr} A(t)P(t) \right] x + o(\|x\|^2), \end{aligned}$$

где запись $\phi(x) = o(\|x\|^k)$ при $x \rightarrow 0$ означает, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|^k} = 0$.

Для второго условия диссипативности, связанного с $1/W$, рассмотрим величину $\Phi(x, t) := -\frac{1}{W} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla W^\top F \right) + \operatorname{div} F$. Используя те же разложения, получаем:

$$\Phi(x, t) = -\frac{x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x}{x^\top P(t)x} + \operatorname{tr} A(t) + o(1).$$

Следствие 5. Если существует такая матрица $P(t) > 0$, что квадратичная форма в (19) является равномерно отрицательно определенной, т.е. выполнено условие

$$(20) \quad \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + \operatorname{tr} A(t)P(t) \leq -\gamma P(t)$$

для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то существует окрестность начала координат, в которой выполнено первое условие (11) с некоторым $\gamma > 0$.

Если для всех $x \neq 0$ и $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$(21) \quad -\frac{x^\top \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) \right] x}{x^\top P(t)x} + \operatorname{tr} A(t) \leq -\gamma,$$

то существует окрестность начала координат, в которой выполнено второе условие (11) с некоторым $\gamma > 0$.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему $\dot{x} = A(t)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Выберем $W(x, t) = x^\top P(t)x$, где $P(t) = P(t)^\top > 0$ – гладкая матрица. Тогда из условий (20) и (21) можно получить следующие матричные неравенства:

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + (\gamma + \operatorname{tr} A(t))P(t) &\leq 0, \\ \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^\top(t)P(t) + (\gamma - \operatorname{tr} A(t))P(t) &\leq 0. \end{aligned}$$

Если система одновременно диссипативна по W и $1/W$ с $\gamma > 0$, то, складывая неравенства (22), получаем

$$2 \left(\dot{P} + PA + A^\top P \right) + 2\gamma P \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{P} + PA + A^\top P \leq -\gamma P.$$

Это стандартное условие экспоненциальной устойчивости для неавтономных систем (аналог леммы Ляпунова). Если же выполнено только одно из неравенств, система может быть устойчива лишь в интегральном смысле. Например, второе неравенство в (22) является усиленным аналогом матричного неравенства Ляпунова.

Пример 2. Ради наглядности проиллюстрируем теоретические результаты разделов 5 и 7 на примере линейной автономной системы с седловой точкой $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Матрица A имеет собственные числа $\lambda_1 \approx 0,6$ (неустойчивое направление) и $\lambda_2 \approx -2,6$ (устойчивое направление),

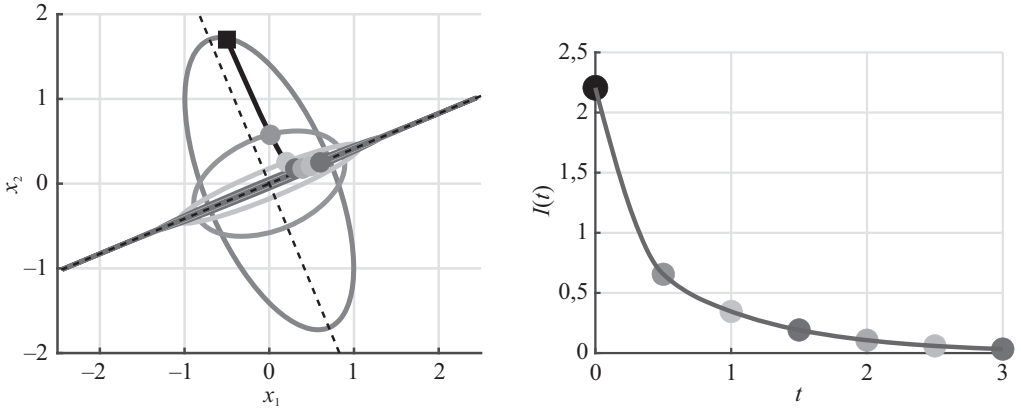


Рис. 1. Слева – эволюция эллипсоидов уровня $\{x : x^\top P_t x = 1\}$ для системы (1) в виде деформации эллипсоидов, а также приведена фазовая траектория с начальным условием $x_0 = \text{col}\{-0,5; 1,7\}$. Справа – интеграл $I(t) = \int_{\Omega_t} W(x) dx$, где точки – численные значения в соответствующие моменты времени.

при этом $\text{tr } A = -2 < 0$, что гарантирует сжатие фазового объема с показателем $\text{div } F = -2$.

В качестве весовой функции выберем положительно определенную квадратичную форму $W(x) = x^\top P x$, $P = \begin{bmatrix} 1,51 & 0,5034 \\ 0,5034 & 0,5039 \end{bmatrix}$. Начальная область Ω_0 определена как эллипс $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^\top P x \leq 1\}$, что соответствует множеству уровня $W(x) = 1$. Для численного моделирования используется лагранжев подход: $N = 5000$ частиц равномерно распределены внутри Ω_0 и эволюционируют под действием потока системы (1).

Согласно теореме 5, для экспоненциальной устойчивости достаточно выполнения условий диссипативности (12). Для автономного случая условия (22) сводятся к существованию $\gamma > 0$ такого, что

$$(23) \quad A^\top P + PA + (\text{div } F + \gamma)P \leq 0, \quad A^\top P + PA + (\text{div } F - \gamma)P \leq 0.$$

Решение обобщенной проблемы собственных чисел $(A^\top P + PA + \text{div } F \cdot P)v = -\mu P v$ дает максимальное значение $\gamma_{\max} \approx 1,9$. В вычислениях используется $\gamma = 1,5$, что гарантирует выполнение обоих неравенств.

Интегральный критерий устойчивости исследуется через вычисление первого условия в (3) и (П.1). В силу линейности системы, $\varphi_t(\xi) = e^{At}\xi$ и $\det J_t(\xi) = e^{t \text{div } F} = e^{-2t}$.

На рис. 1 (слева) представлена эволюция множества Ω_t и соответствующих эллипсоидов уровня $\{x : x^\top P_t x = 1\}$, где $P_t = e^{-A^\top t} P e^{-At}$ – матрица, задающая образ начального эллипсоида под действием потока. Видно, что эллипсоиды деформируются, вытягиваясь вдоль неустойчивого направления и сжимаясь вдоль устойчивого, при этом все частицы остаются внутри соответствующих эллипсоидов.

На рис. 1 (справа) представлена зависимость $I(t)$ от времени. Численные значения, полученные суммированием по частицам с весом e^{-2t} , демонстрируют монотонное убывание. Аппроксимация логарифма линейной функцией дает оценку показателя экспоненциального убывания $\gamma_{\text{est}} = 1,4923$, что с высокой точностью совпадает с теоретическим значением $\gamma = 1,5$, использованным в условиях диссипативности.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- 1) Выбранная весовая матрица P и параметр $\gamma = 1,5$ удовлетворяют матричным неравенствам (23) (выполнение условий диссипативности), что обеспечивает экспоненциальное убывание интеграла $I(t)$.
- 2) Наблюдаемое монотонное убывание $I(t)$ подтверждает интегральную устойчивость системы в смысле определения 2, причем скорость убывания соответствует теоретической оценке $I(t) \leq I(0)e^{-\gamma t}$.
- 3) Эллипсоиды $\{x : x^\top P_t x = 1\}$ представляют собой точные образы начального множества уровня весовой функции и демонстрируют установленное теорией сжатие вдоль устойчивого направления и растяжение вдоль неустойчивого при сохранении свойства покрытия всех траекторий.
- 4) Несмотря на наличие неустойчивого собственного направления, интеграл $I(t)$ убывает, что иллюстрирует принципиальное отличие интегральной устойчивости от устойчивости по Ляпунову: даже при расходящихся отдельных траекториях взвешенный объем области может сжиматься.

6. Эволюция покрывающего эллипсоида

Для анализа поведения динамических систем часто требуется не просто качественная картина эволюции, но и гарантированное множество, содержащее все траектории, исходящие из заданной начальной области. Наиболее удобной формой такой внешней аппроксимации множества достижимости является эллипсоид. В данном разделе будет показано, как условие (12) позволяет построить *эволюционирующий покрывающий эллипсоид*, который содержит область Ω_t для всех $t \geq 0$.

Теорема 6. Пусть векторное поле F является глобально липшицевым по x равномерно по t , т.е. выполнено условие

$$(24) \quad \|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

где $L > 0$ – константа Липшица. Также пусть существует функция $W(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ вида

$$(25) \quad W(x, t) = (x - c_t)^\top P_t (x - c_t),$$

где $c_t \in \mathbb{R}^n$ и $P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (дополнительно $P_t > 0$) – гладкие функции времени, удовлетворяющие следующим условиям:

1) начальное покрытие удовлетворяет условию: $\Omega_0 \subset \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_0)^\top P_0(x - c_0) \leq 1\}$, т.е.

$$(26) \quad W(\xi, 0) \leq 1 \quad \forall \xi \in \Omega_0;$$

2) существует число $\gamma > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$ выполнено первое условие диссипативности (12);

3) центр эллипсоида c_t движется по траектории системы:

$$(27) \quad \dot{c}_t = F(c_t, t),$$

где c_0 – произвольная точка из Ω_0 ;

4) выполнено соотношение

$$(28) \quad \operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma \geq 2L.$$

Тогда для всех $t \geq 0$ выполнено условие покрытия:

$$(29) \quad \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_t)^\top P_t(x - c_t) \leq 1\}.$$

Если $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, то матрица формы $Q_t = P_t^{-1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(30) \quad \dot{Q}_t = A(c_t, t)Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)Q_t,$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$ – матрица Якоби, вычисленная в центре эллипсоида в момент времени t , уравнение (30) получено линеаризацией в окрестности центра и точно описывает эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$.

Следствие 6. Пусть выполнены условия теоремы 6 и, дополнительно, дивергенция векторного поля ограничена снизу: $\operatorname{div} F(x, t) \geq -d$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Если параметр диссипативности удовлетворяет условию $\gamma > d$, то для любой точки $\xi \in \Omega_0$ и соответствующей траектории $x(t) = \phi_t(\xi)$ справедлива экспоненциальная оценка $V_\xi(t) \leq V_\xi(0)e^{-(\gamma-d)t}$, где $V_\xi(t)$ задана в (П.3). Как следствие, для нормы матрицы формы $Q_t = P_t^{-1}$ выполняется $\|Q_t\| \leq \|Q_0\|e^{-(\gamma-d)t}$, что означает экспоненциальное сжатие покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t)$ к своему центру c_t .

Уравнение (30) является ключевым для практического построения покрывающего эллипсоида. Оно показывает, как матрица формы эволюционирует под действием линеаризованного потока и диссипативного члена $(\operatorname{div} F + \gamma)Q_t$. Параметр γ выбирается максимально возможным при выполнении условия (26).

7. Эволюция внутреннего эллипсоида

В предыдущем разделе было рассмотрено первое условие диссипативности (39), которое гарантирует существование покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}(c_t, P_t^{-1})$, содержащего эволюционирующую область Ω_t . Естественным об-

разом возникает вопрос: что можно сказать об эллипсоиде, если выполнено второе условие диссипативности? Как показано в замечании 1, второе условие контролирует обратную величину $1/W$ и предотвращает слишком быстрое сжатие, что приводит к существованию *внутреннего эллипсоида*, свободного от точек области Ω_t . Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 7. Пусть существует $W(x, t)$, определенная в (25), где $c_t \in \mathbb{R}^n$ и $P_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($P_t > 0$) – гладкие функции времени, удовлетворяющие следующим условиям:

1) начальное покрытие удовлетворяет условию $\Omega_0 \cap \mathcal{E}_{in}(c_0, \delta(0)P_0^{-1}) = \emptyset$, т.е.

$$(31) \quad W(\xi, 0) \geq \delta(0) \quad \forall \xi \in \Omega_0,$$

где $\mathcal{E}_{in}(c_0, \delta(0)P_0^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_0)^\top P_0(x - c_0) \leq \delta(0)\}$;

2) центр эллипсоида движется по траектории системы (27);

3) существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено второе условие диссипативности (12).

Тогда для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие внутренней оценки:

$$(32) \quad \Omega_t \cap \mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) = \emptyset,$$

где $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - c_t)^\top P_t(x - c_t) \leq \delta(t)\}$ и

$$(33) \quad \delta(t) = \min_{\xi \in \Omega_0} \left\{ W(\xi, 0) \exp \left(\int_0^t (\gamma + \operatorname{div} F(x(s), s)) ds \right) \right\}.$$

Если дополнительно $F \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, то матрица формы $Q_t = P_t^{-1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(34) \quad \dot{Q}_t = A(c_t, t)Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top - (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)Q_t,$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$ – матрица Якоби, вычисленная в центре эллипсоида в момент времени t , уравнения (34) получены линеаризацией в окрестности центра и точно описывают эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$.

Теорема 7 показывает, что второе условие диссипативности (12) гарантирует существование внутреннего эллипсоида $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1})$, который не содержит точек эволюционирующей области Ω_t . Это дает нижнюю оценку для расстояния от траекторий до центра и предотвращает слишком быстрое сжатие.

Замечание 5. Если одновременно выполнены оба условия диссипативности (12), то из их сложения, как показано в (16), следует $\operatorname{div} F < 0$. При этом значения γ в данных условиях диссипативности могут быть разными, в статье они записаны одинаковыми для простоты записи. В этом случае область Ω_t находится в «кольце» между двумя эллипсоидами: покрывающим и

внутренним $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$. Это дает полную геометрическую картину эволюции области.

Уравнения (30) и (34) описывают эволюцию матрицы формы покрывающего эллипсоида, но соответствуют разным типам диссипативности:

- Уравнение (30) получено из первого условия диссипативности (12) для функции $W(x, t)$. Слагаемое $(\operatorname{div} F + \gamma)Q_t$ ускоряет сжатие эллипсоида, что характерно для систем с диссипацией.
- Уравнение (34) соответствует второму условию (12) для функции $1/W(x, t)$. Слагаемое $(\operatorname{div} F - \gamma)Q_t$ уменьшает диссипацию и при $\gamma > \operatorname{div} F$ может приводить к расширению эллипсоида, контролируя тем самым обратную величину.

Пример 3. Проиллюстрируем теоремы 6 и 7 на примере нестационарной линейной системы второго порядка

$$(35) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{bmatrix} -1,5 + 0,5 \sin(0,8t) & 3 \cos(0,8t) \\ 2 \sin(0,8t) & -1,2 + 0,3 \cos(0,8t) \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

След матрицы $\operatorname{tr} A(t) = -2,7 + 0,5 \sin(0,8t) + 0,3 \cos(0,8t) < 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, однако система не является устойчивой по Ляпунову в силу несимметричности матрицы и наличия периодических коэффициентов, приводящих к комплексным собственным числам с положительной вещественной частью в отдельные моменты времени.

При моделировании начальная область Ω_0 выбрана так, чтобы одновременно удовлетворять предположениям теорем 6 и 7. В примере использовалась матрица $P_0 = E$, центр $c_0 = (5, 3)^\top$, параметр $\delta(0) = 0,25$. Начальная область Ω_0 состоит из $N = 600$ точек, равномерно распределенных в кольцевой области между двумя эллипсоидами: $\Omega_0 = \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1}) \setminus \mathcal{E}_{in}(c_0, 0,25 P_0^{-1})$. Такой выбор гарантирует выполнение условий $W(\xi, 0) \leq 1 \quad \forall \xi \in \Omega_0$ и $W(\xi, 0) \geq \delta(0) = 0,25 \quad \forall \xi \in \Omega_0$, что в точности отвечает (26) и (31). Таким образом эллипсоиды на рис. 2 не подбирались под уже полученное облако точек. Их эволюция полностью определяется дифференциальными уравнениями (30) и (34) с начальными параметрами, выбранными до расчета траекторий. Тот факт, что точки в начальный момент и далее остаются внутри покрывающего и вне внутреннего эллипсоида, является следствием выполнения условий теорем 6 и 7. Эволюция покрывающего эллипсоида $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t)$ определяется уравнением (30), а эволюция внутреннего эллипсоида $\mathcal{E}_{in}(c_t, Q_t)$ – уравнением (34), где $\gamma = 2,5$ для покрывающего и $\gamma = 2$ для внутреннего эллипсоидов, центр c_t движется по траектории системы $\dot{c}_t = A(c_t, t)c_t$.

Численное интегрирование системы (35) и уравнений (30), (34) выполнено методом Эйлера с шагом $\Delta t = 0,005$ на интервале $t \in [0, 0,9]$. На каждом шаге производился контроль выполнения условий:

$$\begin{aligned} V_{\xi}^{cov}(t) &= (x(t) - c_t)^\top (Q_t^{cov})^{-1} (x(t) - c_t) < 1 \quad \forall x(t) \in \Omega_t, \\ V_{\xi}^{in}(t) &= (x(t) - c_t)^\top (Q_t^{in})^{-1} (x(t) - c_t) > 1 \quad \forall x(t) \in \Omega_t. \end{aligned}$$

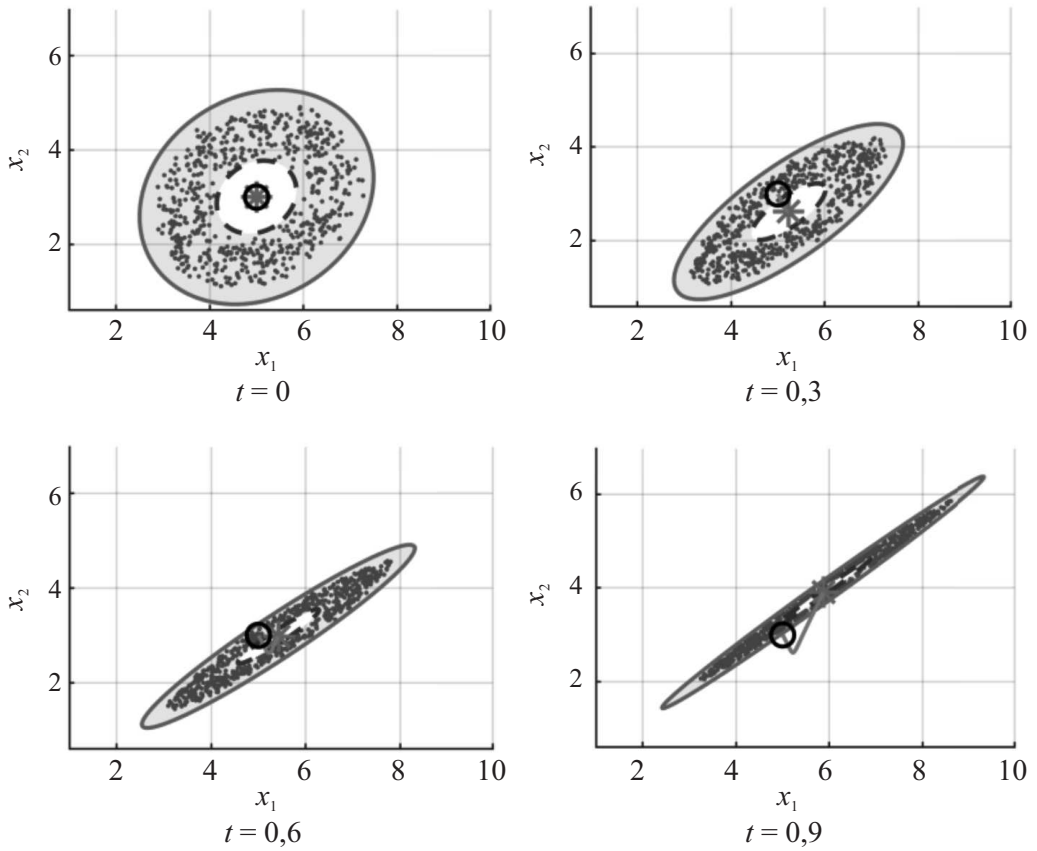


Рис. 2. Эволюция покрывающего (сплошной) и внутреннего (пунктирный) эллипсоидов для системы (35) в моменты времени $t = 0, 0,3, 0,6, 0,9$ с.

Приведем алгоритм построения аппроксимирующих эллипсоидов:

- задать начальную область Ω_0 , матрицу $P_0 > 0$, центр c_0 (например, центр масс Ω_0) и параметр $\delta(0) \in (0, 1)$ так, чтобы $W(\xi, 0) \leq 1$ и $W(\xi, 0) \geq \delta(0)$ для всех $\xi \in \Omega_0$;
- выбрать $\gamma_{cov} > 0$ и $\gamma_{in} > 0$ из условий диссипативности (12);
- найти траекторию центра $\dot{c}_t = F(c_t, t)$, $c_t|_{t=0} = c_0$;
- проинтегрировать матричные уравнения (30) и (34) с начальными условиями $Q_0^{cov} = P_0^{-1}$, $Q_0^{in} = \delta(0)P_0^{-1}$. Тогда при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняются гарантированные двусторонние оценки $\mathcal{E}(c_t, Q_t^{in}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}(c_t, Q_t^{cov})$, где $\mathcal{E}(c, Q) = \{x : (x - c)^\top Q^{-1}(x - c) \leq 1\}$.

На рис. 2 представлены четыре момента эволюции системы: $t = 0$, $t = 0,3$, $t = 0,6$ и $t = 0,9$ с. На каждом рисунке изображены: точки – множество Ω_t ; сплошной серый эллипсоид – покрывающий эллипсоид $\mathcal{E}_{cov}(c_t, Q_t^{cov})$; пунктирный эллипсоид – внутренний эллипсоид $\mathcal{E}_{in}(c_t, Q_t^{in})$; звезда – текущее положение центра c_t ; линия (исходящая из звезды) – траектория движения центра от начального до текущего момента; маленький черный кружок (исходящий из звезды) – начальное положение центра c_0 .

Результаты моделирования демонстрируют:

- 1) корректность эволюционных уравнений (30) и (34) для построения аппроксимирующих эллипсоидов;
- 2) возможность одновременного выполнения условий диссипативности для прямой и обратной весовых функций;
- 3) геометрическую интерпретацию интегральной устойчивости: область Ω_t заключена в кольцо между двумя эллипсоидами.

Теорема 7 и пример 3 показывают, что при выполнении второго условия диссипативности удастся построить эллипсоид $\mathcal{E}_{in}(t)$, гарантированно не содержащий точек эволюционирующей области Ω_t . Этот результат имеет ряд инженерных и научных приложений, например:

- в задачах гарантированного оценивания и фильтрации внутренний эллипсоид задает область, свободную от траекторий системы, что позволяет выделять безопасные зоны или отсекалть ложные решения;
- наличие двусторонних эллипсоидальных оценок $\mathcal{E}_{in}(c_t, \delta(t)P_t^{-1}) \subset \Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$ дает полную геометрическую картину эволюции ансамбля: покрывающий эллипсоид ограничивает максимально возможное отклонение, а внутренний указывает минимальный гарантированный разброс траекторий;
- в задачах верификации и обнаружения столкновений внутренний эллипсоид может служить индикатором «непустого ядра», куда не проникают траектории, что упрощает проверку свойств безопасности динамической системы;
- предложенный метод применим к анализу диссипативных процессов в звездной динамике. В шаровых скоплениях динамическое трение вызывает эффективное сжатие фазового объема. Если в качестве весовой функции взять фазовую плотность, то область Ω_t , содержащая 90% массы скопления, с течением времени остается заключенной между двумя эволюционирующими эллипсоидами, что дает гарантированные двусторонние оценки положений и скоростей звезд без точного решения уравнения Фоккера-Планка.

Таким образом, совместное использование покрывающего и внутреннего эллипсоидов предоставляет конструктивный инструмент для анализа диссипативных систем, не требующий точного знания множества Ω_t , а лишь информацию о начальной области и знаке дивергенции поля.

Результаты разделов 6 и 7 могут быть интерпретированы в терминах теории инвариантных множеств [33, 34]. Построенный покрывающий эллипсоид является положительно инвариантным множеством для ансамбля траекторий, стартующих из Ω_0 , а внутренний эллипсоид задает запрещенную область, свободную от этих траекторий. Их комбинация дает двустороннюю инвариантную оценку, что представляет самостоятельный интерес в контексте методов гарантированного оценивания и эллипсоидального исчисления [35].

8. Связь интегральной устойчивости с устойчивостью по Ляпунову

Теорема 8. Рассмотрим автономную систему (1). Пусть $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – фазовый поток (1). Предположим, что существует семейство покрывающих эллипсоидов (29) с центром $c_t \in \mathbb{R}^n$ и матрицей формы $Q_t = P_t^{-1} > 0$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует $\delta > 0$ такое, что шар радиуса δ с центром в нуле содержится в начальном эллипсоиде:

$$(36) \quad B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \delta\} \subset \mathcal{E}_{cov}(c_0, P_0^{-1});$$

2) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ образ начального шара под действием потока содержится в эллипсоиде:

$$(37) \quad \Omega_t = \varphi_t(B_\delta(0)) \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1});$$

3) центр эллипсоида стремится к положению равновесия:

$$(38) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_t = 0;$$

4) существует монотонно убывающая функция $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, такая что $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и для всех $t \geq 0$ выполняется оценка:

$$(39) \quad \max_{|v|=1} \sqrt{v^\top Q_t v} \leq \sigma(t),$$

где величина $\max_{|v|=1} \sqrt{v^\top Q_t v}$ равна длине наибольшей полуоси эллипсоида $\mathcal{E}_t$.

Тогда система (1) асимптотически устойчива по Ляпунову. Если дополнительно существуют константы $C > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$(40) \quad \sigma(t) \leq C e^{-\gamma t}, \quad |c_t| \leq C e^{-\gamma t} \quad \forall t \geq 0,$$

то система (1) экспоненциально устойчива по Ляпунову. Если заменить условия $\sigma(t) \rightarrow 0$ и $c_t \rightarrow 0$ на их ограниченность, то (1) будет устойчивой по Ляпунову.

В условии теоремы 8 в качестве характеристики сжатия эллипсоида (39) можно использовать различные операторы, оценивающие его размер, например:

- спектральный радиус (длина наибольшей полуоси) $\rho(Q_t) = \lambda_{\max}^{1/2}(Q_t)$, $\lambda_{\max}(Q_t)$ – максимальное собственное число матрицы Q_t . Данная величина участвует в оценке $\|x - c_t\| \leq \rho(Q_t)$ и имеет прозрачный геометрический смысл;
- след матрицы формы $\text{tr } Q_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i(Q_t)$, $\lambda_i(Q_t)$ – i -е собственное значение матрицы Q_t . Поскольку $\lambda_{\max}(Q_t) \leq \text{tr } Q_t$, условие $\text{tr } Q_t \rightarrow 0$ является достаточным для сходимости эллипсоида к центру;
- среднеквадратичный радиус $r_{\text{rms}}(Q_t) = \sqrt{\frac{1}{n} \text{tr } Q_t}$, характеризующий «средний» размер эллипсоида;
- любая норма $\|Q_t\|$, согласованная с евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$ (т.е. удовлетворяющая $\|Q_t^{1/2} v\| \leq \|Q_t\|^{1/2} \|v\|$), также может быть использована.

Следствие 7. Если в условиях теоремы 8 задано условие $\text{tr } Q_t \rightarrow 0$ вместо (39), то это эквивалентно выполнению неравенства $2\lambda_{\max}(A) + \text{tr } A + \gamma < 0$, где $\lambda_{\max}(A)$ – максимальное собственное число матрицы линеаризации $A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, t)$. Это дает алгебраический критерий экспоненциальной устойчивости, не требующий явного построения эллипсоидов.

Таким образом, теорема 8 устанавливает, что из существования семейства покрывающих эллипсоидов, стягивающихся к положению равновесия, следует устойчивость по Ляпунову. Это важный результат, связывающий предложенный интегральный подход с классической теорией. Важно подчеркнуть, что сама по себе интегральная устойчивость (определения 1–3) не эквивалентна устойчивости по Ляпунову. Таким образом, теорема 8 дает достаточные условия, при которых интегральные оценки позволяют сделать вывод о точечной сходимости решений. Следствие 7 дополнительно предлагает легкопроверяемый алгебраический критерий: отрицательность определенной комбинации следа и максимального собственного числа матрицы линеаризации гарантирует экспоненциальную устойчивость. Это делает метод конструктивным и удобным для приложений.

9. Заключение

Предложен новый подход к анализу динамических систем, основанный на исследовании эволюции взвешенного фазового объема. Получено интегральное тождество, которое связывает скорость изменения взвешенного объема с производной весовой функции вдоль траекторий и дивергенцией векторного поля. Данный результат обобщает классическую теорему Лиувилля и транспортную теорему Рейнольдса.

Сформулированы достаточные условия диссипативности и построены интегральные критерии устойчивости. Показано, что одновременное выполнение условий для весовой функции и ее обратной величины приводит к геометрическим ограничениям на динамику.

Разработан метод аппроксимации множеств достижимости с помощью покрывающего и внутреннего эллипсоидов, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями, полученными из условий диссипативности. Установлена связь между предложенным интегральным подходом и устойчивостью по Ляпунову.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Используя замену переменных с учетом начальных условий $x = \varphi_t(\xi)$, где $\xi \in \Omega_0$, получим

$$(П.1) \quad I(t) = \int_{\Omega_0} W(\varphi_t(\xi), t) \det J_t(\xi) d\xi, \quad I_{-1}(t) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \det J_t(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что область интегрирования Ω_0 не зависит от t , продифференцируем (П.1):

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} (W(\varphi_t(\xi), t)) \det J_t(\xi) + W(\varphi_t(\xi), t) \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) \right] d\xi, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &= \int_{\Omega_0} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \right) \det J_t(\xi) + \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \frac{d}{dt} \det J_t(\xi) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4), вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(\varphi_t(\xi), t) &= \frac{\partial W(\varphi_t(\xi), t)}{\partial t} + \nabla W(\varphi_t(\xi), t)^\top F(\varphi_t(\xi), t) \quad \text{и} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \right) &= -\frac{1}{W^2(\varphi_t(\xi), t)} \frac{d}{dt} W(\varphi_t(\xi), t) = -\frac{\dot{W}(\varphi_t(\xi))}{W^2(\varphi_t(\xi))}. \end{aligned}$$

Применяя (5) к слагаемому $\frac{d}{dt} \det J_t(\xi)$ в (П.2), перепишем (П.2) как

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_{\Omega_0} \det J_t(\xi) \left[\dot{W}(\varphi_t(\xi), t) + W(\varphi_t(\xi), t) \operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t) \right] d\xi, \\ \frac{dI_{-1}}{dt} &= \int_{\Omega_0} \det J_t(\xi) \left[-\frac{\dot{W}(\varphi_t(\xi), t)}{W^2(\varphi_t(\xi), t)} + \frac{1}{W(\varphi_t(\xi), t)} \operatorname{div} F(\varphi_t(\xi), t) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Так как $\det J_t(\xi) d\xi = dx$, то выполнив обратную замену переменных к x , приходим к (6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца к функциям $\sqrt{W}$ и $1/\sqrt{W}$ на Ω_t , получаем

$$\left(\int_{\Omega_t} W(x, t) dx \right) \left(\int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \right) \geq \left(\int_{\Omega_t} \sqrt{W} \frac{1}{\sqrt{W}} dx \right)^2 \geq [\operatorname{vol}(\Omega_t)]^2.$$

Из условий диссипативности (8) и теоремы 2 следует, что $\dot{I}(t) \leq 0$ и $\dot{I}_{-1}(t) \leq 0$. Из условий теоремы 3 функции $I(t)$ и $I_{-1}(t)$ положительны. Тогда $\dot{\Pi}(t) := \dot{I}(t)I_{-1}(t) + I(t)\dot{I}_{-1}(t) \leq 0$. Следовательно, $\Pi(t)$ не возрастает. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 5. Из выражений (6) и (12) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} W(x, t) dx \leq -\gamma \int_{\Omega_t} W(x, t) dx, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx \leq -\gamma \int_{\Omega_t} \frac{1}{W(x, t)} dx.$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, получим (13). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала докажем выполнение условия покрытия (29). Затем покажем выполнение (30).

Доказательство условия покрытия (29). Перейдем к переменным Лагранжа. Для этого рассмотрим произвольную точку $\xi \in \Omega_0$. Ее образ в момент времени t есть $x(t) = \varphi_t(\xi)$. Определим функцию

$$(П.3) \quad V_\xi(t) = W(x(t), t) = (x(t) - c_t)^\top P_t(x(t) - c_t).$$

Покажем, что $V_\xi(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, если $V_\xi(0) \leq 1$.

Дифференцируя (П.3) по времени вдоль решений (1) и (27), получим:

$$(П.4) \quad \frac{d}{dt} V_\xi(t) = (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)).$$

С учетом (П.3) перепишем первое условие диссипативности (12) в виде

$$(П.5) \quad (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)) \leq \\ \leq -\gamma V_\xi(t) - V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Принимая во внимание, что $V_\xi(t) > 0$ (случай $V_\xi(t) = 0$ означает $x(t) = c_t$, и тогда ограниченность очевидна, так как c_t либо ограничен, либо его рост контролируется отдельно), выразим из (П.5) слагаемое с дивергенцией:

$$(П.6) \quad \operatorname{div} F(x(t), t) \leq -\gamma - \\ - \frac{1}{V_\xi(t)} \left[(x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)) \right].$$

Обозначим:

$$(П.7) \quad \mathcal{A}(t) = (x(t) - c_t)^\top \dot{P}_t(x(t) - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t)).$$

Принимая во внимание (24), оценим слагаемые в (П.7) и (П.3) в виде

$$(П.8) \quad |(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t)| \leq \|\dot{P}_t\| \|x - c_t\|^2, \\ |2(x - c_t)^\top P_t(F(x(t), t) - F(c_t, t))| \leq 2L \|P_t\| \|x - c_t\|^2. \\ \|x(t) - c_t\|^2 \leq \lambda_{\max}(P_t^{-1}) V_\xi(t).$$

С учетом (П.8) оценим сверху (П.7) как

$$(П.9) \quad |\mathcal{A}(t)| \leq \lambda_{\max}(P_t^{-1})(\|\dot{P}_t\| + 2L\|P_t\|) V_\xi(t).$$

Введем обозначение:

$$(П.10) \quad \alpha(t) = \lambda_{\max}(P_t^{-1})(\|\dot{P}_t\| + 2L\|P_t\|)$$

и перепишем (П.9) как $|\mathcal{A}(t)| \leq \alpha(t)V_\xi(t)$. Подставляя данную оценку в (П.6), получаем оценку сверху для дивергенции:

$$(П.11) \quad \operatorname{div} F(x(t), t) \leq -\gamma + \alpha(t).$$

Из первого условия диссипативности (12) и выражений (П.4), (П.5) имеем

$$(П.12) \quad \frac{dV_\xi}{dt} \leq -\gamma V_\xi(t) - V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Подставляя оценку (П.11) в (П.12), получаем $\frac{dV_\xi}{dt} \leq -\alpha(t)V_\xi(t)$. Так как $\alpha(t) \geq 0$ из (П.10), то $\frac{dV_\xi}{dt} \leq 0$. Таким образом, $V_\xi(t) \leq V_\xi(0) \leq 1$ для всех $t \geq 0$, и выполнено условие покрытия $\Omega_t \subset \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$.

Теперь определим соотношение между L , $\operatorname{div} F(c_t, t)$ и γ в виде (28). Для этого подставим (25) в первое условие диссипативности (12). В результате получим

$$(П.13) \quad \begin{aligned} & (x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t(F(x, t) - F(c_t, t)) + \\ & + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(x, t) + \gamma) \leq 0. \end{aligned}$$

Пусть $x = c_t + \varepsilon v$, где $\|v\| = 1$ и малое число $\varepsilon > 0$. Тогда перепишем (П.13) как:

$$(П.14) \quad \varepsilon^2 v^\top \dot{P}_t v + 2\varepsilon v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) + \varepsilon^2 v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq 0.$$

Перенесем первые два члена в правую часть и разделим все выражение на ε^2 :

$$(П.15) \quad v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq -v^\top \dot{P}_t v - \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)).$$

Из липшицевости F и $\|v\| = 1$ имеем

$$(П.16) \quad -\frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) \leq \left| \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t(F(c_t + \varepsilon v) - F(c_t, t)) \right| \leq 2\|P_t\|L.$$

Подставляя (П.16) в (П.15), получим:

$$(П.17) \quad v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t + \varepsilon v) + \gamma) \leq -v^\top \dot{P}_t v + 2\|P_t\|L.$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, перепишем (П.17) как $v^\top \dot{P}_t v \leq 2\|P_t\|L - v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)$. Это неравенство выполнено для всех единичных векторов v . Выберем v , на котором $v^\top \dot{P}_t v$ минимален. Тогда:

$$-\|\dot{P}_t\| \leq \min_{\|v\|=1} v^\top \dot{P}_t v \leq 2\|P_t\|L - \max_{\|v\|=1} v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma).$$

Поскольку $\max_{\|v\|=1} v^\top P_t v = \|P_t\|$, получим:

$$(П.18) \quad \|\dot{P}_t\| \geq \|P_t\|(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma - 2L).$$

Таким образом, имеем соотношение (28). Более того, $\|\dot{P}_t\| + 2L\|P_t\| \geq \|P_t\|(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) \geq 2L\|P_t\|$.

Вывод эволюционных уравнений (30). В силу гладкости $F \in C^2$ разложим $F(x, t) - F(c_t, t)$ и $\operatorname{div} F(x, t)$ в окрестности c_t :

$$(П.19) \quad \begin{aligned} F(x, t) - F(c_t, t) &= A(c_t, t)(x - c_t) + r(x, c_t, t), \\ \operatorname{div} F(x, t) &= \operatorname{div} F(c_t, t) + \nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(x - c_t) + d(x, c_t, t), \end{aligned}$$

где $A(c_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(c_t, t)$, $\|r(x, c_t, t)\| = O(\|x - c_t\|^2)$ и $|d(x, c_t, t)| = O(\|x - c_t\|)$.

Подставим (П.19) в (П.13):

$$(П.20) \quad \begin{aligned} &(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) + 2(x - c_t)^\top P_t A(c_t, t)(x - c_t) + \\ &+ 2(x - c_t)^\top P_t r(x, c_t, t) + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) + \\ &+ (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(x - c_t) + d(x, c_t, t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное направление $v \in \mathbb{R}^n$, где $\|v\| = 1$, и положим $x = c_t + \varepsilon v$, где $\varepsilon > 0$ мало. Подставим это в (П.20) и разделим на ε^2 :

$$\begin{aligned} &v^\top \dot{P}_t v + 2v^\top P_t A(c_t, t)v + v^\top P_t v(\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) + \frac{2}{\varepsilon} v^\top P_t r(c_t + \varepsilon v, c_t, t) + \\ &+ v^\top P_t v \left(\nabla(\operatorname{div} F)(c_t, t)^\top(\varepsilon v) + d(c_t + \varepsilon v, c_t, t) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая, что $r(c_t + \varepsilon v, c_t, t) = O(\varepsilon^2)$ и $d(c_t + \varepsilon v, c_t, t) = O(\varepsilon)$, получим:

$$(П.21) \quad v^\top [\dot{P}_t + 2P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t]v \leq 0 \quad \forall v.$$

Используя симметризацию $2v^\top P_t A(c_t, t)v = v^\top (P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t)v$, перепишем (П.21) как:

$$(П.22) \quad v^\top [\dot{P}_t + P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t]v \leq 0 \quad \forall v.$$

Неравенство (П.22) означает, что матрица

$$M_t^{cov} := \dot{P}_t + P_t A(c_t, t) + A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t$$

отрицательно полуопределена ($M_t^{cov} \leq 0$). Для построения покрывающего эллипсоида выберем «критический» случай $M_t^{cov} = 0$, что соответствует максимально быстрому сжатию и не противоречит (П.13). Тогда получаем уравнение для P_t :

$$(П.23) \quad \dot{P}_t + A(c_t, t)^\top P_t + P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma)P_t = 0.$$

Для получения уравнения для $Q_t = P_t^{-1}$ умножим (П.23) слева и справа на Q_t :

$$(П.24) \quad Q_t \dot{P}_t Q_t + Q_t A(c_t, t)^\top + A(c_t, t) Q_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) Q_t = 0.$$

Используя тождество $\dot{Q}_t = -Q_t \dot{P}_t Q_t$, которое следует из дифференцирования $P_t Q_t = I$, перепишем (П.24) в форме (30). Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Доказательство теоремы разобьем на две части. Сначала докажем выполнение условия для внутреннего эллипсоида (32). Затем покажем выполнение равенства (34).

Доказательство условия для внутреннего эллипсоида (32). Рассмотрим произвольную точку $\xi \in \Omega_0$. Ее образ в момент времени t есть $x(t) = \phi_t(\xi)$. Определим функцию $V_\xi(t)$ как в (П.3). Применяя второе условие диссипативности (12) в точке $x(t)$ и учитывая (П.4), приходим к нижней оценке:

$$(П.25) \quad \frac{d}{dt} V_\xi(t) \geq \gamma V_\xi(t) + V_\xi(t) \operatorname{div} F(x(t), t).$$

Найдем решение (П.25) в виде

$$(П.26) \quad V_\xi(t) \geq V_\xi(0) \exp \left(\int_0^t [\gamma + \operatorname{div} F(x(s), s)] ds \right).$$

Из (П.26) следует, что для любого $t \in \mathbb{R}_+$ имеем $V_\xi(t) \geq \delta(t) > 0$, где $\delta(t)$ определяется как минимум правой части (П.26) по всем $\xi \in \Omega_0$. Это гарантирует выполнение условия (32), т.е. ни одна точка области Ω_t не принадлежит внутреннему эллипсоиду.

Вывод эволюционного уравнения (34) для Q_t . Вывод уравнения (34) аналогичен выводу уравнения (30) с той разницей, что используется второе условие диссипативности (12). Проведем основные выкладки, следуя процедуре вывода уравнения (П.19). Из второго условия (12) и выражений для производных (П.4) после подстановки и использования $\dot{c}_t = F(c_t, t)$ получим:

$$(П.27) \quad \begin{aligned} & -(x - c_t)^\top \dot{P}_t(x - c_t) - 2(x - c_t)^\top P_t(F(x, t) - F(c_t, t)) + \\ & + (x - c_t)^\top P_t(x - c_t)(\operatorname{div} F(x, t) + \gamma) \leq 0. \end{aligned}$$

Используя симметризацию для $2P_t A(c_t, t)$, разложения (П.19) и переходя к пределу $x \rightarrow c_t$ (т.е. полагая $x = c_t + \varepsilon v$ и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$), запишем:

$$v^\top \left[-\dot{P}_t - P_t A(c_t, t) - A(c_t, t)^\top P_t + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) P_t \right] v \leq 0 \quad \forall v.$$

Выбирая критический случай (равенство нулю) с учетом условия (31), получаем уравнение для P_t :

$$(П.28) \quad -\dot{P}_t - A(c_t, t)^\top P_t - P_t A(c_t, t) + (\operatorname{div} F(c_t, t) + \gamma) P_t = 0.$$

Умножая (П.28) слева и справа на $Q_t = P_t^{-1}$ и используя $\dot{Q}_t = -Q_t \dot{P}_t Q_t$, получаем (34). То есть уравнение (34) получено линеаризацией в окрестности центра и точно описывает эволюцию эллипсоида в пределе $\|x - c_t\| \rightarrow 0$. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Зафиксируем произвольную начальную точку $\xi \in B_\delta(0)$ и рассмотрим соответствующую траекторию $x(t) = \varphi_t(\xi) \in \varphi_t(B_\delta(0))$. В силу условия инвариантности покрытия (37) имеем $x(t) \in \mathcal{E}_{cov}(c_t, P_t^{-1})$ для всех $t \geq 0$, что по определению эллипсоида означает (П.29)

$$(x(t) - c_t)^\top Q_t^{-1} (x(t) - c_t) \leq 1.$$

Используем неравенство для квадратичных форм

$$(П.30) \quad \|x - c_t\|^2 \leq \lambda_{\max}(Q_t) (x - c_t)^\top Q_t^{-1} (x - c_t),$$

где $\lambda_{\max}(Q_t)$ – максимальное собственное число матрицы Q_t . Применяя (П.30) вместе с (П.29), получаем оценку $\|x(t) - c_t\| \leq \sqrt{\lambda_{\max}(Q_t)} \leq \sigma(t)$. Воспользовавшись данной оценкой и неравенством треугольника, получим $\|x(t)\| \leq \|x(t) - c_t\| + \|c_t\| \leq \sigma(t) + \|c_t\|$. Из условий сходимости центра (38) и сходимости эллипсоида (39) имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|c_t\| = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Тогда существует $T_1 > 0$ такое, что $\|c_t\| < \varepsilon/2$ для всех $t \geq T_1$ и существует $T_2 > 0$ такое, что $\sigma(t) < \varepsilon/2$ для всех $t \geq T_2$. Выбирая $T = \max\{T_1, T_2\}$, получаем, что для всех $t \geq T$ одновременно выполняются оба неравенства, откуда $\sigma(t) + \|c_t\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Значит, требуемый момент времени T всегда существует.

На конечном промежутке времени $[0, T]$ функция $f(t) = \sigma(t) + \|c_t\|$ непрерывна, следовательно, ограничена некоторой константой M_T . Выберем начальный радиус δ настолько малым, чтобы для всех траекторий, стартующих из $B_\delta(0)$, выполнялось неравенство

$$(П.31) \quad \|x(t)\| \leq \sigma(t) + \|c_t\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Возможность такого выбора δ обеспечивается непрерывной зависимостью решений от начальных условий и тем фактом, что функции $\sigma(t)$ и $\|c_t\|$ определяются самой системой (1) и не зависят от выбора конкретной точки в $B_\delta(0)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $\|x(0)\| < \delta$ следует $\|x(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$. Это в точности определение устойчивости по Ляпунову.

Из оценки (П.31) и условий $\sigma(t) \rightarrow 0$ и $\|c_t\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ непосредственно вытекает, что для любой траектории $x(t)$ с начальным условием в $B_\delta(0)$ выполняется $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$. Если дополнительно выполнены экспоненциальные оценки $\sigma(t) \leq C e^{-\gamma t}$, $\|c_t\| \leq C e^{-\gamma t}$, то из (П.31) получаем $\|x(t)\| \leq C e^{-\gamma t} + C e^{-\gamma t} = 2C e^{-\gamma t}$. Поскольку для линейных систем и в локальной окрестности нелинейных систем норма решения допускает оценку $\|x(t)\| \leq K e^{-\gamma t} \|x(0)\|$, а в рассматриваемом случае $\|x(0)\| \leq \delta$, окончательно имеем $\|x(t)\| \leq \frac{2C}{\delta} \|x(0)\| e^{-\gamma t}$, что означает экспоненциальную устойчивость. Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: 1955.
3. *Летов А.М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М.: Физматгиз, 1962.
4. *Малкин И.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
5. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. М.: Высш. шк., 1984.
6. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
7. *Bikdash M.U., Layton R.A.* An Energy-Based Lyapunov Function for Physical Systems // IFAC Proceedings. 2000. V. 33. No. 2. P. 81–86.
8. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems, part I: General theory; part II: Linear systems with quadratic supply rates // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 45. No. 5. P. 321–393.
9. *Liouville J.* Note sur la theorie de la variation des constantes arbitraires // Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. 1838. V. 3. P. 342–349.
10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
11. *Reynolds O.* Papers on Mechanical and Physical Subjects. Cambridge University Press, 1903.
12. *Zaremba S.K.* Divergence of vector fields and differential equations // Amer. Journal of Math. 1954. V. LXXV. P. 220–234.
13. *Fronteau J.* Le theoreme de Liouville et le probleme general de la stabilite. Geneve: CERN, 1965.
14. *Brauchli H.I.* Index, Divergenz und Stabilitat in Autonomen equations. Zurich: Abhandlung Verlag, 1968.
15. *Шестаков А.А., Степанов А.Н.* Индексные и дивергентные признаки устойчивости особой точки автономной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 650–661.
16. *Масина О.Н., Дружинина О.В.* Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН, 2011.
17. *Дружинина О.В.* Индекс, дивергенция и функции Ляпунова в качественной теории динамических систем. М.: Изд. группа URSS, 2013.
18. *Жуков В.П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1978. № 6. С. 11–15.
19. *Жуков В.П.* К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1979. № 3. С. 12–17.
20. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // АиТ. 1990. № 12. С. 59–65.
21. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.
22. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.
23. *Rantzer A., Parrilo P.A.* On convexity in stabilization of nonlinear systems // Proc. of the 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. 2000. P. 2942–2946.

24. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // *Systems & Control Letters*. 2001. V. 42. P. 161–168.
25. *Monzon P.* On necessary conditions for almost global stability // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2003. V. 48. No. 4. P. 631–634.
26. *Фуртат И.Б.* Исследование устойчивости динамических систем с использованием свойств потока вектора фазовой скорости через замкнутую выпуклую поверхность // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2013. № 1. Т. 83. С. 23–27.
27. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // *АиТ*. 2020. № 2. С. 62–75.
28. *Furtat I., Gushchin P.* Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // *Journal of the Franklin Institute*. December 2020. V. 357. No. 18. P. 13753–13765.
29. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability/Instability Study and Control of Autonomous Dynamical Systems: Divergence Method // *IEEE Access*. 2021. V. 9. P. 23764–23771.
30. *Furtat, I.B. Gushchin P.A.* Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // *IEEE Access*. 2022. V. 10. P. 49088–49094.
31. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // *АиТ*. 2023. № 11. С. 55–76.
32. *Furtat I.B.* Analysis and Control of Perturbed Density Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2026. <https://doi.org/10.1109/TAC.2025.3621943>
33. *Blanchini F.* Set invariance in control // *Automatica*. 1999. V. 35. P. 1747–1767.
34. *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.
35. *Kurzhanski A.B., Vályi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
36. *Moyalán J., Narayanan S. S., Zheng A., Vaidya U.* Synthesizing controller for safe navigation using control density function // *Proc. 2024 American Control Conference (ACC)*. Toronto, Canada, 2024.
37. *Zheng A., Narayanan S.S., Vaidya U.* Safe navigation using density functions // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2023. V. 8. No. 10. P. 8502–8509.
38. *Hoshino K.* A characterization of finite-time stability with density functions // *Proc. 2019 European Control Conference (ECC)*. Naples, Italy, 2019. P. 2608–2613.
39. *Izumi M., Takahiro K.* Lyapunov density criteria for time-varying and periodically time-varying nonlinear systems with converse results // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 1. P. 223–241.
40. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
41. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1964.
42. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 14.04.2026

После доработки 07.07.2026

Принята к публикации 20.07.2026