Стохастические системы

© 2025 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ПАССИВНОГО МОНИТОРИНГА ДОСТУПНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СЕТЕВОГО КАНАЛА[1]

Статья посвящена разработке математического обеспечения решения прикладной задачи оценивания доступной пропускной способности сетевого канала передачи данных по косвенным наблюдениям одного из передаваемых потоков. Задача сведена к фильтрации состояний некоторого марковского скачкообразного процесса по косвенным бесшумовым и считающим наблюдениям. Искомые оценки представимы в виде решения связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений. Качество предложенных оценок проиллюстрировано некоторым численным примером.

Ключевые слова: доступная пропускная способность канала, марковский скачкообразный процесс, наблюдения без шума, мартингальное представление, уравнения оптимальной фильтрации.

DOI: 10.31857/S0005231025060048, **EDN:** IKCBKC

1. Введение

Задача оперативного оценивания доступной пропускной способности (Available BandWidth, ABW) различных телекоммуникационных каналов [1–4] весьма востребована для последующего использования ее результатов

- в системах управления компьютерными сетями для контроля эффективности использования сетевых ресурсов,
- в алгоритмах управления перегрузкой транспортных протоколов,
- в системах потоковой передачи мультимедийной информации,
- в алгоритмах распределения ресурсов программно определяемых сетей и пр.

Понимание самого термина ABW и связанных с ним числовых показателей варьируется в различных публикациях и может подразумевать

- максимальную остаточную емкость данного канала при текущей загрузке внешними потоками,

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2024-544). Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

– максимальную скорость передачи данных (throughput) по каналу, обеспечиваемую с использованием некоторого фиксированного протокола (UDP, TCP и пр.) при текущей загрузке внешними потоками,
– максимальную скорость передачи полезных данных (goodput) по каналу при текущей загрузке, обеспечиваемую с использованием выбранного протокола при наличии дополнительных требований к качеству передачи (Quality of Service, QoS): максимальной допустимой задержке, джиттеру, доле потерянных пакетов и пр.

В настоящее время существует целая палитра аппаратно-программных средств решения этой задачи. С точки зрения используемой статистической информации они делятся на активные и пассивные. В активных используется дополнительный служебный трафик, представляющий собой последовательность малых пакетов, возможно переменного размера. Разница между отправленными и полученными пакетами, включая промежутки между ними, служит основой расчета текущего значения AWB. В пассивных средствах это значение вычисляется на основе информации о реальном текущем трафике в данном канале, собираемой с помощью средств операционных систем (например с помощью утилиты *tcpdump*). Отдельно следует упомянуть инструментарий оценивания AWB, базирующийся на моделях каналов, построенных в основном на системах массового обслуживания. Он использует не реальную статистическую информацию, а имитационное моделирование.

Обработка реальных данных для оценивания ABW основывается на использовании относительно простых вероятностных моделей, в частности линейных стохастических систем наблюдения. Именно они позволяют применять классический фильтр Калмана [5–7]. В настоящее время теория оценивания состояний стохастических динамических систем достаточно развита, в ее рамках возможно подобрать модель, более похожую на функционирование сетевого канала, и построить для нее численно эффективный алгоритм оценивания состояния системы по имеющимся данным.

Предлагаемая работа посвящена использованию математического аппарата марковских скачкообразных процессов (МСП) для построения математических моделей функционирования каналов пакетной передачи данных. Они предназначены для решения задачи оценивания в реальном масштабе времени характеристик каналов, отвечающих за ABW, по разнородной статистической информации. Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 представлен класс исследуемых сетевых каналов и потоков передаваемых данных, а также структура доступных наблюдений. В разделе приведены аргументы в пользу использования математического аппарата МСП для описания эволюции характеристик канала.

Раздел 3 содержит теоретическую основу решения поставленной прикладной задачи мониторинга ABW. Подраздел 3.1 представляет исследуемую систему наблюдения. Ее скрытым состоянием, подлежащим оцениванию, служит однородный МСП с конечным множеством состояний. Часть компонент наблюдений представляют собой функции МСП, регистрируемые без

шума, часть – процессы Кокса, интенсивность которых зависит от состояния. В качестве теоретической основы, позволяющей в итоге решить прикладную проблему мониторинга, предлагается рассматривать задачу фильтрации состояния МСП по имеющимся наблюдениям. Ее решению посвящен раздел 3.2. Искомая оценка фильтрации описывается системой связанных обыкновенных дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений.

Следует отметить, что предложенная задача оптимальной фильтрации, решаемая в работе, отличается от задач, исследованных в классических монографиях [8–10]. В упомянутых работах структура наблюдений такова, что путем подходящей замены вероятностной меры их можно преобразовать к совокупности винеровских и пуассоновских процессов. При этом полученные уравнения в той или иной мере можно трактовать как различные версии формулы Каллианпура–Стрибеля [11]. Данный переход возможен при выполнении условия невырожденности мартингалов в наблюдениях. В предлагаемой же стохастической системе часть наблюдений вовсе не содержит шумов, что делает невозможным применение гирсановской замены меры. В то же время полученные в статье уравнения, описывающие искомую оценку оптимальной фильтрации, можно рассматривать как частный случай абстрактной формулы оптимальной фильтрации семимартингала по наблюдениям семимартингала [12].

Раздел 4 содержит иллюстративный пример решения задачи мониторинга AWB канала. Канал обрабатывает два независимых потока пакетов. Первый описывается пуассоновским процессом с известной интенсивностью. Второй, скрытый, поток описывается процессом Кокса, интенсивность которого меняется в соответствии с некоторым МСП. В качестве наблюдений выступает число пакетов первого потока, находящихся в канале, и поток потерь первого потока, вызванный переполнением канала. Собственно канал представляет собой простой экспоненциальный элемент обслуживания с известной интенсивностью, объединенный с пулом пакетов известной емкости. Пакеты из пула выбираются для передачи случайным образом. Текущая ABW зависит от степени его заполненности и интенсивности поступления пакетов из второго потока, поэтому именно эти характеристики предлагается оценивать. Так как для получения статистической информации не используются какие-либо служебные потоки пакетов, то предложенный алгоритм мониторинга отнесен к классу пассивных. Численный эксперимент, представленный в разделе, иллюстрирует высокое качество предложенных оценок.

Раздел 5 представляет анализ полученных результатов и направления дальнейших исследований.

2. Постановка прикладной задачи мониторинга доступной пропускной способности

Опишем функционирование сетевого канала пакетной передачи данных в форме некоторой управляемой стохастической системы наблюдения. Канал

обеспечивает передачи данных нескольких информационных потоков, описываемых индивидуальными показателями:

- интенсивностью поступления пакетов из потока,
- размером отдельных пакетов,
- общим объемом передаваемых данных,
- протоколом управления передачей данных и пр.

Собственно канал представляет собой совокупность телекоммуникационного оборудования и линий передачи, имеющих следующие характеристики:

- число отрезков линий передачи и их показатели,
- характеристики отдельных сетевых устройств (производительность, объем буферов, характеристики внутреннего программного обеспечения) и пр.

В идеале состояние канала представляет собой "мгновенный снимок" расположения и движения различных целевых и сервисных пакетов во всех частях, составляющих данный канал, а также всех входных и выходных потоков пакетов, включая потоки потерь.

Задача оценивания ABW канала заключается в определении максимального потока пакетных данных, который мог бы передаваться через канал при наличии текущей нагрузки. В такой постановке задача вряд ли имеет исчерпывающее решение из-за следующих фактов.

1. Определение максимального потока данных, который дополнительно может быть передан через канал в его текущем состоянии, зависит от ряда дополнительных характеристик, таких как тип дополнительных данных (тип протокола), надежность передачи данных и пр. Дело в том, что дополнительная пропускная способность должна вычисляться с учетом всех "накладных расходов", включая передачу сервисных пакетов, повторную передачу потерянных данных и пр. Например, пропускная способность для последующего использования UDP трафиком будет выше, чем для TCP, так как последний предполагает повторную отправку пакетов, не принятых получателем, а также задействует дополнительный сервисный поток подтверждений.
2. Упомянутое выше состояние канала должно обладать колоссальной размерностью, препятствующей его использованию при решении каких-либо практических задач оценивания.
3. Характеристики канала содержат неопределенность разной природы:
   - обычно параметры отдельных линий передачи, составляющих канал, неизвестны,
   - характеристики сетевого оборудования (производительность, объем буферов/накопителей) неизвестны частично или полностью,
   - программное обеспечение сетевого оборудования является проприетарным с неизвестной производительностью и реализованными алгоритмами,

– сетевое каналообразующее оборудование может одновременно использоваться несколькими каналами, что влечет за собой дополнительную неопределенность его производительности.

4. Потоки данных, передаваемые каналом, также обладают свойствами, отрицательно сказывающимися на качестве и самой возможности решения задачи мониторинга ABW: они нестационарны, содержат априорную неопределенность в характеристиках и являются частично или полностью ненаблюдаемыми из-за требований информационной безопасности и разделения доступа.

Помимо этого, громоздкая модель является избыточной для решения упомянутой практической задачи. Для этого достаточно рассматривать лишь "бутылочное горло" канала – участок с наименьшей производительностью. При этом для описания его функционирования можно использовать относительно простые системы массового обслуживания, состоящие из элементов обслуживания, очередей или буферов временного хранения пакетов.

Потоки пакетов можно описывать обобщенными процессами восстановления [13]: последние не только представляют случайные потоки событий, но могут содержать некоторую дополнительную информацию заголовков пакетов, важную для последующего оценивания характеристик канала. Вообще говоря, к статистической информации, доступной для пассивного мониторинга ABW, можно отнести

– часть входных информационных потоков,
– часть потоков потерь пакетов, возникающих по различным причинам,
– часть служебных потоков, например потоки подтверждений,
– характеристики заполненности буферов пакетами наблюдаемых потоков,
– дополнительные числовые характеристики отдельных пакетов наблюдаемых потоков (индивидуальные номера, время отправки/получения пакетов и пр.).

Состояние канала связи как управляемой динамической системы наблюдения должно описывать пару "состояние бутылочного горла – состояние общей нагрузки на канал". Доступные наблюдения по своей математической сущности можно также разделить на две различные категории: считающие процессы, интенсивность которых зависит от состояния системы, и некоторые функции состояния системы, наблюдаемые без дополнительного шума.

Как уже было сказано выше, ABW реального канала зависит от типа дополнительной нагрузки, но в любом случае она будет описываться некоторой функцией от состояния системы: текущей общей интенсивности потоков пакетов, поступающих в канал, и степени его заполнения. Именно их и предлагается оценивать по имеющейся статистической информации и затем пересчитывать в ABW добавленного потока того или иного вида.

Дополнительное предположение о марковском свойстве исследуемой системы наблюдений безусловно является некоторым ограничением. Тем не ме-

нее оно не представляется чрезмерным. Во-первых, с помощью подходящего расширения вектора состояния к таким системам сводятся полумарковские системы (марковские процессы восстановления) [14–16]. Во-вторых, с помощью марковских систем можно аппроксимировать весьма широкий класс немарковских систем [17]. В-третьих, математический аппарат марковских процессов, подкрепленный теорией мартингалов, позволяет решить широкий класс задач оптимального оценивания состояний и параметров. Все эти выводы объясняют последующий выбор класса стохастических дифференциальных систем наблюдения для описания состояния канала и фильтрации его состояния.

3. Задача оптимальной фильтрации состояния марковского скачкообразного процесса по совокупности бесшумовых и считающих наблюдений

Далее в работе используются следующие обозначения:
- $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{A}$,
- $\mathbb{S}^N = \{e_1, \ldots, e_N\}$ – множество координатных ортов в $\mathbb{R}^N$,
- $\mathrm{col}\,(a^1, \ldots, a^N)$ – вектор-столбец, составленный из компонент a^n, $n = \overline{1, N}$,
- $\mathrm{diag}\,(a)$ – диагональная матрица, порожденная вектором a,
- $a \wedge b \triangleq \min(a, b)$.

3.1. Постановка задачи фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ рассматривается система наблюдения

$$\theta_t = \theta_0 + \int_0^t A^\top \theta_s ds + M_t^\theta, \quad \theta_0 \sim \pi_0, \tag{1}$$

$$\xi_t = C\theta_t, \tag{2}$$

$$\eta_t = \int_0^t G\theta_s ds + M_t^\eta, \tag{3}$$

где
- $\theta_t = \mathrm{col}\,(\theta_t^1, \ldots, \theta_t^N) \in \mathbb{S}^N$ – ненаблюдаемое состояние системы, представляющее собой $\mathcal{F}_t$-согласованный однородный МСП со значениями в $\mathbb{S}^N$, матрицей интенсивностей переходов (МИП) A и начальным распределением π_0; $M_t^\theta = \mathrm{col}\,(M_t^{\theta,1}, \ldots, M_t^{\theta,N})$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал,
- $\xi_t = \mathrm{col}\,(\xi_t^1, \ldots, \xi_t^M) \in \mathbb{R}^M$ – процесс наблюдений, не содержащий шума; $C \in \mathbb{R}^{M\times N}$ – матрица плана наблюдений со столбцами c^n, $n = \overline{1, N}$;
- $\eta_t = \mathrm{col}\,(\eta_t^1, \ldots, \eta_t^K) \in \mathbb{R}^K$ – наблюдаемый процесс со считающими компонентами: матрица $G \in \mathbb{R}^{K\times N}$ определяет условные интенсивности

скачков отдельных компонент η в зависимости от текущего состояния θ (G состоит из строк g^k, $k = \overline{1,K}$); $M_t^\eta = \mathrm{col}\,(M_t^{\eta,1}, \ldots, M_t^{\eta,K})$ – $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал.

Пусть $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s, \eta_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ – естественный поток σ-алгебр, порожденный наблюдаемыми процессами. *Задача оптимальной фильтрации* состояния θ_t заключается в вычислении условного математического ожидания (УМО) $\widehat{\theta}_t \triangleq \mathsf{E}\,\{\theta_t|\mathcal{O}_t\}$, $t \in [0,T]$; $T < \infty$ – некоторый конечный детерминированный момент.

Будем предполагать, что исследуемые базис с фильтрацией и система наблюдения удовлетворяют следующим условиям.

А) $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{\theta_s, \eta_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ для $\forall\, t \in [0,T]$.

Б) Мартингалы $M_t^{\eta,k}$ компонент считающих наблюдений η_t^k сильно ортогональны между собой, а также ортогональны мартингалу M_t^θ в МСП θ_t:

$$\langle \eta, \eta \rangle_t = \int_0^t \mathrm{diag}\,(G\theta_s)ds, \qquad \langle \eta, \theta \rangle_t \equiv 0.$$

В) Пусть $\{\tau_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ – моменты скачков блочного процесса (θ_t, η_t), а $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ – моменты скачков наблюдений (ξ_t, η_t), $\tau_0 = \zeta_0 \triangleq 0$. Предполагается, что

$$\lim_{j\to+\infty} \tau_j = \lim_{j\to+\infty} \zeta_j = +\infty \qquad \mathsf{P}-\text{п. н.}$$

Тогда марковские моменты $\tau_j' \triangleq \tau_j \wedge T$ и $\zeta_j' \triangleq \zeta_j \wedge T$ будут ограничены константой T. В дальнейшем изложении для простоты штрихи в обозначениях марковских моментов опущены.

Матрица G интенсивностей считающих наблюдений может быть произвольной матрицей подходящей размерности, состоящей из неотрицательных элементов. Относительно матрицы точных наблюдений C таких ограничений нет: у нее должна быть лишь подходящая размерность. Тем не менее на практике матрица C состоит из 0 и 1. Часто в качестве бесшумовых наблюдений ξ_t выступает информация о том, что в текущий момент времени θ_t находится в некотором множестве $\mathbb{S}' \subset \mathbb{S}^N$. В этом случае соответствующая строка C будет состоять из индикаторов $\mathbf{I}_{\mathbb{S}'}(e_n)$, $n = \overline{1,N}$.

3.2. Решение задачи фильтрации

Пусть $\mathcal{C}$ – множество различных столбцов матрицы C. Построим отображение $\Xi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{1\times N}$ следующим образом:

$$\Xi(c) \triangleq \sum_{n:\, Ce_n = c} e_n^\top.$$

$\Xi(\cdot)$ характеризует полный прообраз отображения $e \to Ce$ в следующем смысле:

$$\mathrm{diag}\,(\Xi(c))e = \begin{cases} e, & \text{если } Ce = c, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим: $\overline{\theta}_\ell \triangleq \theta_{\zeta_\ell}$, $\overline{\xi}_\ell \triangleq \xi_{\zeta_\ell}$, $\overline{\eta}_\ell \triangleq \eta_{\zeta_\ell}$. Рассмотрим неубывающую последовательность σ-алгебр $\mathfrak{O}_j \triangleq \sigma\{\zeta_\ell, \overline{\xi}_\ell, \overline{\eta}_\ell : \ 0 \leqslant \ell \leqslant j\}$. Известно [18], что $\mathfrak{O}_j \equiv \mathcal{O}_{\zeta_j}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

Построим также семейства σ-алгебр

$$\mathbf{O}_{j,t} \triangleq \sigma\{A \in \mathfrak{O}_j, \ \{\omega : \ t \in [\zeta_j(\omega), \zeta_{j+1}(\omega))\}\}.$$

Очевидно, что σ-алгебры $\mathbf{O}_{j,t}$ богаче, чем $\mathfrak{O}_j$, так как дополнены случайными событиями вида $\{\omega \in \Omega : \ \zeta_j(\omega) \leqslant t < \zeta_{j+1}(\omega)\}$, которые несут следующий смысл: к моменту времени t произошло ровно j скачков наблюдений.

Для вывода уравнений оптимальной фильтрации необходимы следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\widehat{\pi}_j \triangleq \mathsf{E}\left\{\theta_{\zeta_j} | \mathfrak{O}_j\right\}$. *Тогда* P*-п.н. верны следующие равенства*

$$\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\mathsf{E}\left\{\theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t) | \mathfrak{O}_j\right\} = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t) m_t, \tag{4}$$

$$\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mathsf{E}\left\{\theta_t | \mathbf{O}_{j,t}\right\} = \mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mu_t, \tag{5}$$

где функции m_t *и*

$$\mu_t = (\mathbf{1} m_t)^{-1} m_t \tag{6}$$

являются решениями следующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{m}_t = \left[\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right) A^\top - \sum\limits_{k=1}^{K} \operatorname{diag}\left(g^k\right)\right] m_t, \quad t > \zeta_j, \\ m_{\zeta_j} = \widehat{\pi}_j, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{\mu}_t = \left[\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right) A^\top - \sum\limits_{k=1}^{K} \operatorname{diag}\left(g^k\right)\right] \mu_t - \mu_t \left[\Xi(\overline{\xi}_j) A^\top - \sum\limits_{k=1}^{K} g^k\right] \mu_t, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t > \zeta_j, \\ \mu_{\zeta_j} = \widehat{\pi}_j. \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Лемма 2. Оценка $\widehat{\pi}_{j+1} \triangleq \mathsf{E}\left\{\theta_{\zeta_{j+1}} | \mathfrak{O}_{j+1}\right\}$ *определяется формулой*

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_{j+1} = &\sum_{k=1}^{K} \left(g^k \mu_{\zeta_{j+1}}\right)^{-1} \operatorname{diag}\left(g^k\right) \mu_{\zeta_{j+1}} (\overline{\eta}^k_{j+1} - \overline{\eta}^k_j) + \\ &+ \left(\Xi(\overline{\xi}_{j+1}) A^\top \mu_{\zeta_{j+1}}\right)^{-1} \operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_{j+1})\right) \left(I - \operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)\right) A^\top \mu_{\zeta_{j+1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где вектор $\mu_{\zeta_{j+1}}$ *– решение* (8)*, взятое в момент времени* ζ_{j+1}.

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Леммы 1 и 2 позволяют доказать основное утверждение работы.

Теорема 1. Оценка оптимальной фильтрации $\widehat{\theta}_t$ представима в виде

$$\widehat{\theta}_t = \mathsf{E}\left\{\theta_t | \mathcal{O}_t\right\} = \sum_{j\geqslant 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mu_t, \tag{10}$$

где функции μ_t на интервалах $[\zeta_j, \zeta_{j+1})$ определяются решением (8)*. В моменты ζ_{j+1} скачков наблюдений (ξ_t, η_t) оценка $\widehat{\theta}_{j+1} = \widehat{\pi}_{j+1}$ вычисляется с помощью рекуррентного соотношения* (9)*; оценка фильтрации в начальный момент равна*

$$\widehat{\theta}_0 = \left(\Xi(\xi_0)\pi_0\right)^{-1} \operatorname{diag}\left(\Xi(\xi_0)\right)\pi_0. \tag{11}$$

Оценка $\widehat{\theta}_t$ является решением стохастической системы

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}_t &= \left(\Xi(\xi_0)\pi_0\right)^{-1} \operatorname{diag}\left(\Xi(\xi_0)\right)\pi_0 + \\
&+ \int_{\zeta_j}^{t} \left[\left(\operatorname{diag}\left(\Xi(\xi_s)\right)A^\top - \sum_{k=1}^{K}\operatorname{diag}\left(g^k\right)\right)\widehat{\theta}_s - \widehat{\theta}_s\left(\Xi(\xi_s)A^\top - \sum_{k=1}^{K} g^k\right)\widehat{\theta}_s\right] ds + \\
&+ \sum_{\zeta_j:\zeta_j\leqslant t}\left[\sum_{k=1}^{K}\left(g^k\widehat{\theta}_{\zeta_j-}\right)^{-1}\operatorname{diag}\left(g^k\right)\widehat{\theta}_{\zeta_j-}\Delta\eta^k_{\zeta_j} + \right. \\
&\left. + \left(\Xi(\xi_{\zeta_j})A^\top\widehat{\theta}_{\zeta_j-}\right)^{-1}\operatorname{diag}\left(\Xi(\xi_{\zeta_j})\right)\left(I - \operatorname{diag}\left(\Xi(\xi_{\zeta_j-})\right)\right)A^\top\widehat{\theta}_{\zeta_j-} - \widehat{\theta}_{\zeta_j-}\right].
\end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Хотя интегральная часть итогового уравнения (12) является нелинейной и соответствует (8), линейная система (7) также играет важную роль в численной реализации алгоритма фильтрации. Заметим, что (8) представляет собой систему дифференциальных уравнений Риккати, численное решение которой может быть затруднено при некоторых наборах параметров. Дело в том, что точное решение μ удовлетворяет условиям неотрицательности и нормировки, и этим же условиям должно удовлетворять приближенное решение. В противном случае оно теряет вероятностный смысл условного распределения, а сама аппроксимация "разваливается". Для нейтрализации этого недостатка можно использовать более сложные алгоритмы численного решения или уменьшать временно́й шаг. В отличие от непосредственного численного решения (8), μ_t может быть вычислена с помощью (7) *точно* для любого значения временно́го шага h. Для этого достаточно однократно вычислить экспоненциал $Q = \exp\left[h\left(\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)A^\top - \sum_{k=1}^{K}\operatorname{diag}\left(g^k\right)\right)\right]$ и сумму его строк $q = \mathbf{1}Q$. Тогда точные значения условного распределения μ_{ζ_j+ih} на

равномерной временно́й сетке с шагом h, начинающейся в ζ_j, могут быть вычислены с помощью простейшей рекурсии

$$\mu_{\zeta_j+(i+1)h} = \frac{1}{q\mu_{\zeta_j+ih}} Q\mu_{\zeta_j+ih}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

4. Численный пример оценивания доступной пропускной способности

Представим более подробно устройство канала и структуру передаваемой через него информации. Схема функционирования канала приведена на рис. 1.

Данные в виде пакетов поступают в канал из двух независимых потоков. Первый поток – простейший с интенсивностью μ – частично доступен наблюдению. Второй, полностью ненаблюдаемый, описывается процессом Кокса, интенсивность $\varkappa_t$ которого может принимать значения из множества $\{\varkappa^s\}_{s=\overline{1,S}}$, и изменяется в соответствии со скрытым однородным МСП с известной матрицей интенсивностей переходов $\Lambda = \|\Lambda^{ij}\|_{ij=\overline{1,S}}$. По сути второй поток представляет собой внешнюю интегральную нестационарную нагрузку.

Канал передачи представляет собой элемент обслуживания, внутри которого одновременно может находиться не более N^p передаваемых пакетов. При этом пакеты, поступающие в полностью заполненный канал, теряются. В случае, когда канал непуст, он передает пакет, тратя на это случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с постоянным параметром ν.

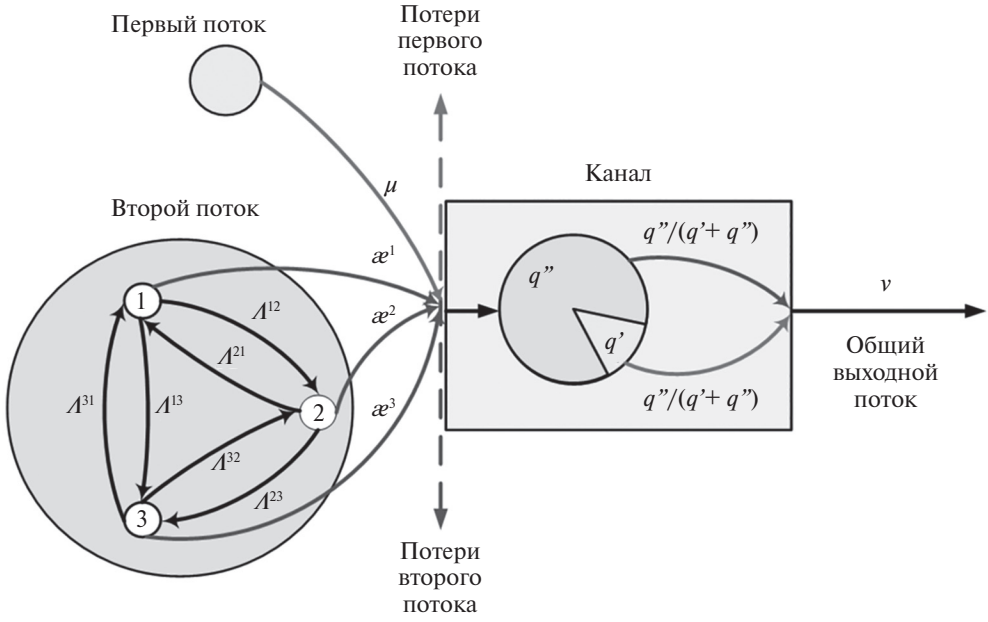


Рис. 1. Схема функционирования сетевого канала.

Передаваемый пакет выбирается случайным образом из пакетов обоих потоков: если в настоящий момент времени в канале находятся q' пакетов первого потока и q'' второго, то вероятности того, что будет передан пакет из первого или второго потоков равны соответственно $\frac{q'}{q'+q''}$ и $\frac{q''}{q'+q''}$. Таким образом, в исследуемой модели реализован механизм *Active Queueing Management* [19], обеспечивающий разным потокам справедливый доступ к ресурсам пропорционально числу пакетов каждого потока, находящихся в канале.

Очевидно, что текущая пропускная способность канала определяется двумя величинами, скрытыми от непосредственного наблюдения: общим текущим количеством пакетов в сервере $q_t^\Sigma \triangleq q'_t + q''_t$ и общей интенсивностью поступления пакетов из двух потоков $\varkappa_t^\Sigma \triangleq \mu + \varkappa_t$. Именно эти два процесса являются объектами мониторинга.

Процессы поступления пакетов обоих потоков в канал и их обработка описываются единым МСП с конечным множеством состояний $\theta_t = (s_t, q'_t, q''_t)$, где s_t – текущее состояние второго потока ($s = \overline{1,S}$), q'_t – число пакетов первого потока в сервере, q''_t – число пакетов второго потока в сервере ($0 \leqslant q', q'' : q'_t + q''_t \leqslant N^p$). Легко проверить, что общее число возможных состояний МСП равно $N = \frac{S(N^p+1)(N^p+2)}{2}$.

Матрица A интенсивностей перехода МСП X_t определяется поэлементно следующим образом:

- $(i, q', q'') \xrightarrow{\Lambda^{ij}} (j, q', q''), \quad (i, j = \overline{1,S}, \quad i \neq j, \quad q', q'' \geqslant 0 : \ q' + q'' \leqslant N^p)$ – смена интенсивности второго потока с $\varkappa^i$ на $\varkappa^i$;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\mu} (s, q' + 1, q''), \qquad (s = \overline{1,S}, \qquad q', q'' \geqslant 0 : \ q' + q'' \leqslant N^p - 1)$ – поступление в канал нового пакета первого потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\varkappa^s} (s, q', q'' + 1), \qquad (s = \overline{1,S}, \qquad q', q'' \geqslant 0 : \ q' + q'' \leqslant N^p - 1)$ – поступление в канал нового пакета второго потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\frac{q'}{q'+q''}\nu} (s, q' - 1, q''), \ (s = \overline{1,S}, \ q' > 0, \ q'' \geqslant 0 : \ q' + q'' \leqslant N^p)$ – передача по каналу пакета первого потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\frac{q''}{q'+q''}\nu} (s, q', q'' - 1), \ (s = \overline{1,S}, \ q' \geqslant 0, \ q'' > 0 : \ q' + q'' \leqslant N^p)$ – передача по каналу пакета второго потока.

Для оценивания характеристик q_t^Σ и $\varkappa_t^\Sigma$ доступна следующая статистическая информация:

- непрерывные наблюдения числа пакетов первого потока, в настоящее время находящихся в канале: $\xi_t = q'_t$,
- процесс, считающий потери пакетов первого потока, вызванные переполнением канала: $\eta_t = \int_0^t \mathbf{I}_{\{N^p\}}(q_u^\Sigma)\mu du + M_t^\eta$.

Численные эксперименты были проведены для следующих значений параметров: $N^p = 32$, $S = 3$, $N = 1683$, $\mu = 1$, $\nu = 13$, $T = 2000$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0{,}002 & 0{,}001 & 0{,}001 \\ 0{,}001 & -0{,}002 & 0{,}001 \\ 0{,}001 & 0{,}001 & -0{,}002 \end{bmatrix}, \qquad \varkappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

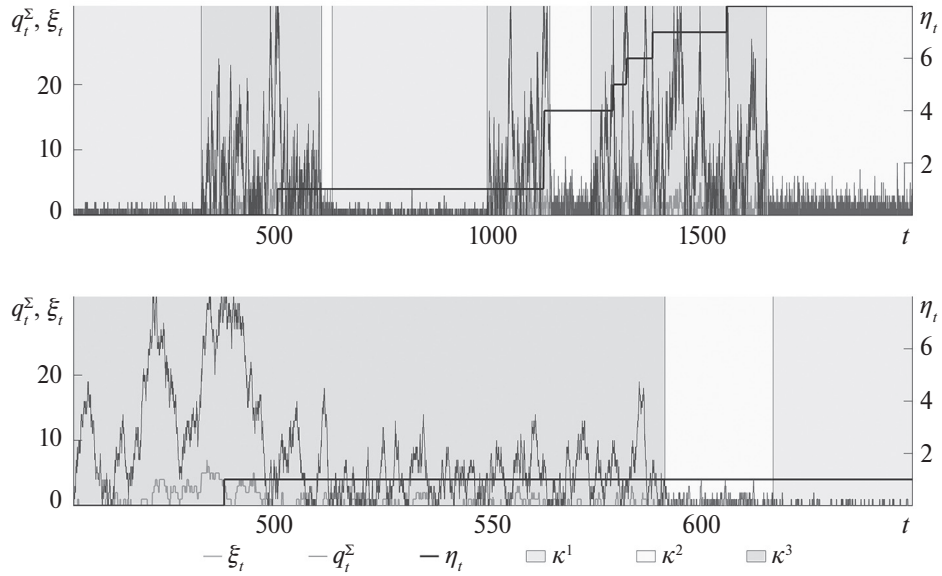


Рис. 2. Показатели загрузки канала и доступные наблюдения.

Начальное распределение МСП, описывающего передачу пакетов, совпадает со стационарным. Моделирование всех процессов и численное решение задачи оптимальной фильтрации выполнялось с шагом по времени $h = 0{,}01$.

На рис. 2 дана информация о скрытом состоянии канала и доступных наблюдениях:

- скрытое состояние интенсивности второго потока $\varkappa_t$ (отображается фоном),
- скрытая загрузка канала q_t^Σ,
- наблюдаемое количество пакетов первого потока ξ_t, находящихся в канале,
- наблюдаемый считающий процесс потерь пакетов первого потока η_t (значения отображаются на правой оси ординат).

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания $[0;\ 2000]$, на нижнем более подробно изображен интервал $[450;\ 650]$, на котором интенсивность второго потока побывала во всех возможных состояниях, а также наблюдалась одна потеря пакета первого потока.

Полученная решением (12) оценка фильтрации $\widehat{\theta}_t$ состояния МСП представляет собой вектор, компонентами которого являются условные вероятности $\mathsf{P}\{s_t = S, q'_t = Q', q''_t = Q''|\mathcal{O}_t\}$. По вектору $\widehat{\theta}_t$ можно вычислить оценки текущей общей загрузки канала $\widehat{q}_t^\Sigma$:

$$\widehat{q}_t^\Sigma = \sum_{s,q',q''} (q' + q'')\mathsf{P}\left\{s_t = s, q'_t = q', q''_t = q''|\mathcal{O}_t\right\}, \tag{13}$$

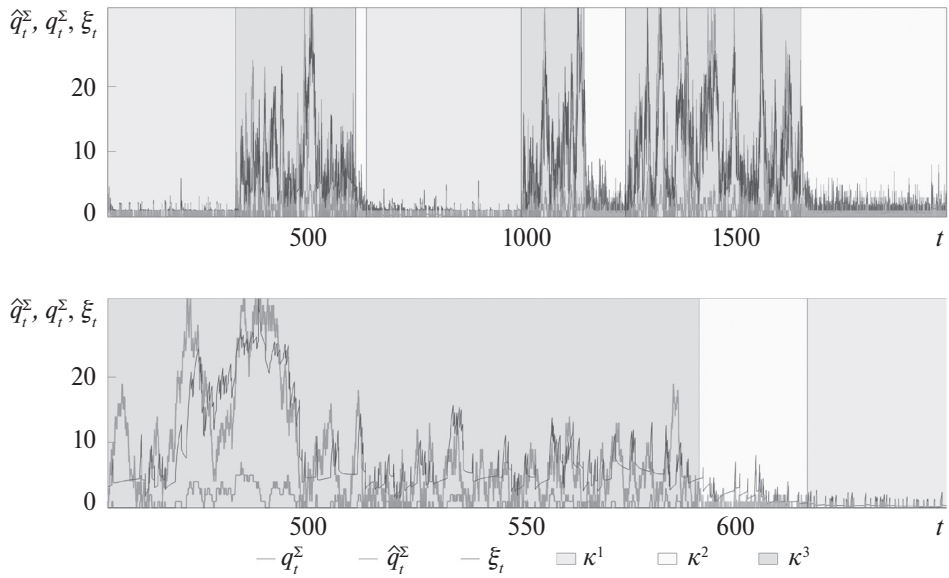


Рис. 3. Среднее число $E(\varkappa)$ пакетов в канале и вероятность $P(\varkappa)$ потери пакета.

а также оценки $\widehat{\varkappa}_t^{\Sigma}$ текущей суммарной интенсивности пакетов, поступающих в канал:

$$\widehat{\varkappa}_t^{\Sigma} = \sum_{s,q',q''} \varkappa^s \mathsf{P}\left\{s_t = s, q'_t = q', q''_t = q'' | \mathcal{O}_t\right\}. \tag{14}$$

Эти характеристики, в свою очередь, позволяют оценивать ABW в реальном масштабе времени при различных условиях QoS. Рассмотрим функционирование канала в предположении, что второй поток также является простейшим с постоянной интенсивностью $\varkappa$. В зависимости от этого параметра в стационарном режиме вычислим среднее число пакетов в канале $\mathsf{E}\left\{q^{\Sigma}\right\} = E(\varkappa)$ и вероятность $\mathsf{P}\left\{q^{\Sigma} = N^p\right\} = P_\ell(\varkappa)$ потери пакета. На рис. 3 представлены зависимости $E(\varkappa)$ и $P_\ell(\varkappa)$ (на вспомогательной оси ординат).

Пусть зафиксировано требование QoS в виде ограничения сверху на вероятность потери пакета $\overline{\mathsf{P}}_\ell$. Будем считать, что максимальная пропускная способность данного канала $\overline{B}$ равна суммарной интенсивности обоих потоков при условии, что вероятность потери пакета не превосходит $\overline{\mathsf{P}}_\ell$: $\overline{B} \triangleq P^{-1}(\overline{\mathsf{P}}_\ell) + \mu$. Например, при выборе $\overline{\mathsf{P}} = 0{,}05$ соответствующая максимальная пропускная способность равна $\overline{B} = 12{,}45$. Тогда в качестве ABW в момент t предлагается принять разность $B_t^a \triangleq \overline{B} - \varkappa_t^{\Sigma}$, т.е. такую максимальную добавку к текущей интенсивности второго потока, которая не нарушит ограничение на вероятность потери пакета. Однако величина $\varkappa_t^{\Sigma}$ недоступна прямому наблюдению, и в качестве оценки ABW предлагается использовать величину $\widehat{B}_t^a \triangleq \max(\overline{B} - \widehat{\varkappa}_t^{\Sigma}, 0)$ – функцию от полученной оценки $\widehat{\varkappa}_t^{\Sigma}$.

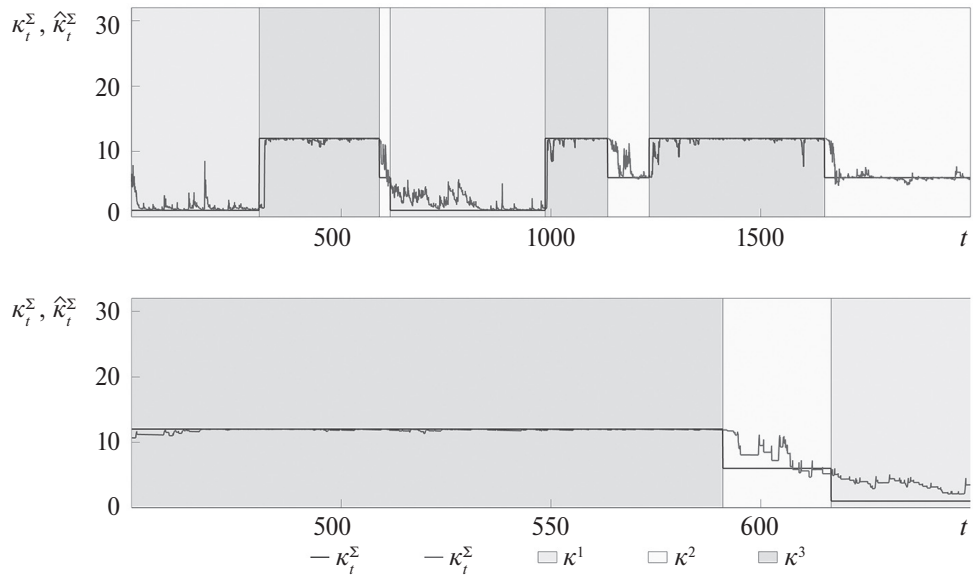


Рис. 4. Загрузка канала и ее оценка.

Рассмотрим другой вид требования QoS в виде ограничения сверху $\overline{T}$ на среднее время передачи пакета. Если пакет находится в настоящее время на сервере с текущим общим числом пакетов q_t^Σ и канал находится в стационарном режиме, то среднее время передачи может быть характеризовано величиной $\frac{q_t^\Sigma}{\nu}$. Таким образом, для выполнения данного требования QoS максимально допустимое число пакетов, находящихся одновременно на сервере, не должно превышать $\overline{Q} = \overline{T}\nu$. Например, при выборе $\overline{T} = 1$ верхнее значение $\overline{Q} = 13$ и соответствующая максимальная пропускная способность равна $\overline{B} = E^{-1}(13) = 11{,}55$. В качестве оценки ABW предлагается использовать величину $\widehat{B}_t^a \triangleq \max(\overline{B} - E^{-1}(\widehat{q}_t^\Sigma), 0)$ – функцию от полученной оценки $\widehat{q}_t^\Sigma$.

На рис. 4 представлена эволюция загрузки канала и ее оценки:

- скрытое состояние интенсивности второго потока $\varkappa_t$ (отображается фоном),
- общая скрытая загрузка канала q_t^Σ,
- оценка общей загрузки канала $\widehat{q}_t^\Sigma$,
- наблюдаемое количество пакетов первого потока ξ_t, находящихся в канале.

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания $[0;\ 2000]$, на нижнем – интервал $[450;\ 650]$. Заметим, что на более детальном графике виден кусочно-непрерывный характер оценки: непрерывная траектория на интервалах отсутствия скачков в наблюдениях и ее скачкообразное изменение, соответствующее скачку наблюдений. Регистрация потери пакета первого потока однозначным образом сигнализирует, что в данный

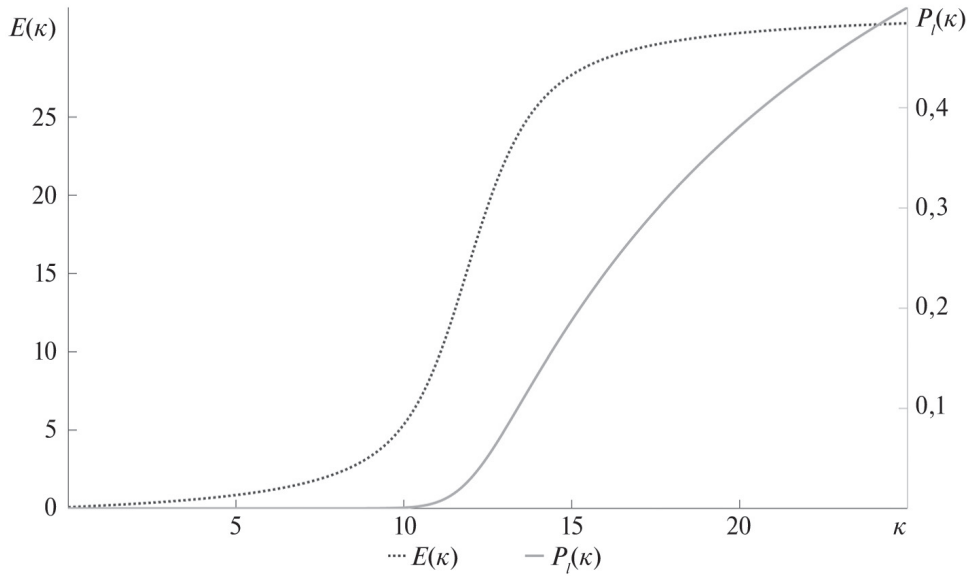


Рис. 5. Общая интенсивность поступления пакетов и ее оценка.

момент канал полон, т.е. $q_t^\Sigma = N^p$. Представленная оценка фильтрации ведет себя в полном соответствии с этим выводом: в момент времени $t = 485{,}91$ наблюдается потеря пакета, и в этот момент оценка $\widehat{q}_t^\Sigma$ совпадает с истинной загрузкой канала q_t^Σ, которая равна N^p.

Вернемся к обзору результатов численных экспериментов. На рис. 5 представлена эволюция суммарной интенсивности поступления пакетов в канал и ее оценка:

- скрытое состояние интенсивности второго потока $\varkappa_t$ (отображается фоном),
- интенсивность поступления пакетов $\varkappa_t^\Sigma$,
- оценка интенсивности $\widehat{\varkappa}_t^\Sigma$.

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания [0; 2000], на нижнем – интервал [450 : 650]. Заметим, что на более детальном графике также наблюдается кусочно-непрерывный характер оценки.

Анализируя графики, можно сделать вывод, что предложенные оценки текущих характеристик пропускной способности канала обладают высокой точностью. Сравним ее с точностью тривиальной оценки – безусловного математического ожидания процессов q_t^Σ и $\varkappa_t^\Sigma$, вычисленных для стационарного распределения МСП X. Точность тривиальных оценок $\mathsf{E}\left\{q^\Sigma\right\}$ и $\mathsf{E}\left\{\varkappa^\Sigma\right\}$ характеризуется дисперсиями $\mathsf{D}\{q^\Sigma\}$ и $\mathsf{D}\{\varkappa^\Sigma\}$. В качестве показателей точности предложенных в статье оценок используем значения

$$\varepsilon^q = 1 - \frac{\int\limits_0^T \mathsf{E}\left\{(\widehat{q}_t^\Sigma - q_t^\Sigma)^2 dt\right\}}{T\mathsf{D}\{q^\Sigma\}} \quad \text{и} \quad \varepsilon^\varkappa = 1 - \frac{\int\limits_0^T \mathsf{E}\left\{(\widehat{\varkappa}_t^\Sigma - \varkappa_t^\Sigma)^2 dt\right\}}{T\mathsf{D}\{\varkappa^\Sigma\}},$$

которые можно рассматривать как аналоги коэффициентов детерминации, принятых в математической статистике [20]. В данном примере числители обоих показателей получены методом Монте-Карло по пучку траекторий $N^{MC} = 10\,000$: $\varepsilon^q = 0{,}76$ и $\varepsilon^\varkappa = 0{,}94$.

5. Заключение

В статье исследована прикладная задача оценивания в реальном масштабе времени ABW канала пакетной передачи по наблюдениям одного из обслуживаемых потоков данных. Доступные наблюдения включают информацию о числе пакетов потока, находящихся в нем в настоящее время, а также процесс, считающий пакеты потока, потерянные в результате переполнения канала. Так как предложенная процедура оценивания не нуждается в генерации дополнительных служебных потоков через канал, отбирающих его ресурсы, то предложенный алгоритм мониторинга относится к классу пассивных.

Основной идеей, позволившей построить эффективный численный алгоритм оценивания, является описание функционирования канала и входящих потоков с помощью некоторого частично наблюдаемого МСП. В качестве статистической информации выступает совокупность некоторых функций состояния, наблюдаемых без шума, а также считающих процессов, чья интенсивность зависит от оцениваемого состояния. Искомая оценка фильтрации задается последовательностью рекуррентно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисляемых в промежутках между скачками наблюдений, и дискретных преобразований, обновляющих оценки в моменты изменений наблюдений. В работе представлены результаты численного эксперимента, иллюстрирующие высокое качество представленных оценок.

Исследования в области построения эффективных алгоритмов оценивания ABW каналов могут быть продолжены в следующих направлениях. Во-первых, практический интерес представляет решение задачи оценивания ABW для экспоненциального элемента с ограниченной очередью для случая описанного в статье нестационарного потока поступающих пакетов.

Во-вторых, важным для телекоммуникационных приложений является усложнение модели функционирования канала и поступающих потоков за счет перехода от марковских к полумарковским процессам.

В-третьих, задача оценивания ABW была решена в условиях полной априорной информации о канале и передаваемых через него потоках. Построение процедур адаптивного оценивания вероятностных параметров пары “канал – потоки” и робастной модернизации предложенного алгоритма мониторинга также представляется перспективным.

В-четвертых, в реальных сетях передачи данных доступная статистическая информация гораздо богаче, чем использованная в статье. Например, существуют данные, связывающие потоки пакетов на входе и выходе канала, имеется информация об индивидуальном времени передачи каждого пакета и пр. Вся эта информация, включенная в систему наблюдения, может

привести к тому, что расширенная стохастическая система наблюдения перестанет быть марковской, что радикально усложнит алгоритмы оценивания ABW. Поэтому перспективным представляется такое расширение класса систем наблюдения, которое, с одной стороны, сохраняет марковское свойство расширенного подходящим образом состояния системы и, с другой, позволяет использовать часть дополнительной статистической информации подобно [21, 22].

В-пятых, использование МСП с конечным множеством состояний для решения прикладных задач сопряжено с очень серьезной сложностью. Она заключается в стремительном росте размерности МСП. Действительно, даже в рассмотренном численном примере при емкости канала $N^p = 32$ и трех возможных вариантах внешней нагрузки общее число состояний МСП равно $N = 1683$. При этом следует также учитывать, что различные состояния описываются не скалярными значениями, а векторами размерности N, что ведет к дополнительному росту объема оперативной памяти, необходимой для реализации алгоритма фильтрации. Данные обстоятельства делают актуальной разработку специального программного обеспечения, экономично реализующего алгоритмы оценивания в стохастических системах наблюдения с МСП.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

Для вывода систем (7) и (8) воспользуемся методом моментов: построим замкнутые линейные стохастические дифференциальные системы, описывающие эволюцию состояния до следующего скачка наблюдений, и осредним их.

Если $\{\zeta_\ell^{\eta,k}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+,\, k=\overline{1,K}}$ – моменты скачков компонент считающих наблюдений η, а $\{\zeta_\ell^{\xi}\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+}$ – моменты скачков бесшумовых наблюдений ξ, то момент ζ_{j+1}, следующий за ζ_j, определяется с помощью очевидной рекурсии

$$\zeta_{j+1} = \min_{\zeta_\ell^{\eta,k}>\zeta_j,\, \zeta_{\ell'}^{\xi}>\zeta_j} (\zeta_\ell^{\eta,k}, \zeta_{\ell'}^{\xi}).$$

На интервале $[\zeta_j, +\infty)$ исследуем процесс

$$U_t \triangleq \mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t) = \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{\ell'}^{\xi})}(t)}_{\triangleq V_t} \prod_{k=1}^{K} \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_\ell^{\eta,k})}(t)}_{\triangleq W_t^k}.$$

По построению на любом интервале $[\zeta_j, t)$ процессы V_t и W_t^k терпят не более одного скачка, и также верны соотношения

$$\operatorname{diag}(\Xi(\overline{\xi}_j))\theta_t \equiv \theta_{\zeta_j} \text{ для } \forall\, t \in [\zeta_j, \zeta_{\ell'}^{\xi}), \qquad \operatorname{diag}(\Xi(\overline{\xi}_j))\theta_{\zeta_{\ell'}^{\xi}} = 0.$$

По формуле Долеан [23] процессы V_t и W_t^k представимы в виде решений уравнений

$$V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left(1 + \int\limits_{\zeta_j}^{t} V_{s-}\Xi(\overline{\xi}_j)d\theta_s\right), \tag{П.1}$$

$$W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left(1 - \int\limits_{\zeta_j}^{t} W_{s-}^k d\eta_s^k\right). \tag{П.2}$$

Действительно, процесс $\int_{\zeta_j}^t \Xi(\overline{\xi}_j)d\theta_s$ является чисто разрывным семимартингалом, и решение уравнения (П.1) по формуле Долеан имеет вид

$$V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\exp\left[\Xi(\overline{\xi}_j)(\theta_t - \theta_{\zeta_j})\right] \prod_{s:\ \zeta_j<s\leqslant t}\left(1 + \Xi(\overline{\xi}_j)\Delta\theta_s\right). \tag{П.3}$$

Если до момента времени t процесс θ не совершал скачков, то $V_t = V_{\zeta_j} = 1$. Если в момент времени $s > \zeta_j$ впервые произошел скачок θ, не приведший к скачку наблюдений ξ, т.е. $\Delta\xi_s = 0$, то

$$\Xi(\overline{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{s-}) = \Xi(\overline{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{\zeta_j}) = 0,$$

и согласно (П.3) $V_s = 1$. То же значение процесс V будет сохранять и при последующих скачках θ, не приводящих к скачкам наблюдений ξ. Если в момент времени $s > \zeta_j$ впервые произошел скачок θ, приведший к скачку наблюдений ξ, т.е. $\xi_s \neq \xi_{s-} = \overline{\xi}_j$ и $s = \min\limits_{\zeta_{\ell'}^{\xi}>\zeta_j} \zeta_{\ell'}^{\xi}$, то

$$\Xi(\overline{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{s-}) = \Xi(\overline{\xi}_j)\theta_s - \Xi(\overline{\xi}_j)\theta_{s-} = 0 - 1 = -1,$$

и согласно (П.3) $V_s = 0$. Это же значение процесс V_t сохраняет в последующем. Таким образом, показано, что решение уравнения (П.1) – процесс (П.3) – совпадает с процессом $\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{\ell'}^{\xi})}(t)$ на луче $[\zeta_j, +\infty)$. Доказательство представления процессов $W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{\ell}^{\eta,k})}(t)$ в виде решения уравнений (П.2) выполняется аналогично.

Далее, из (1)–(3) следует, что V_t и W_t^k допускают следующие разложения:

$$V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left(1 + \int\limits_{\zeta_j}^{t} \Xi(\overline{\xi}_j)A^{\top}\underbrace{\theta_s V_s}_{\triangleq v_s} ds + M_t^1\right), \tag{П.4}$$

$$W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left(1 - \int\limits_{\zeta_j}^{t} g^k\underbrace{\theta_s W_s^k}_{\triangleq w_s^k} ds + M_t^{2,k}\right), \tag{П.5}$$

где $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^1$ и $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^{2,k}$ – некоторые мартингалы. Заметим, что (П.4) и (П.5) можно интерпретировать как линейные стохастические дифференциальные уравнения с мартингалами в правой части. Тем не менее данные уравнения являются незамкнутыми: в правой части уравнения для V_t присутствует процесс v_t, а правая часть W_t^k включает в себя w_t^k. Получим из (П.4) и (П.5) замкнутую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений для векторного процесса $u_t \triangleq \theta_t U_t$.

В силу правила Ито и условия Б процесс U_t допускает разложение

$$U_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[1+\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(dV_s\prod_{k=1}^{K}W_{s-}^k + V_{s-}\sum_{k=1}^{K}\prod_{i:\,i\neq k}W_{s-}^i dW_s^k\right)\right] =$$

$$= \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[1+\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)A^\top - \sum_{k=1}^{K}g^k\right)u_s ds + M_t^3\right],$$

где $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^3$ – некоторый мартингал. Из определения процессов θ и U следует, что

$$\sum_{\zeta:\,\zeta_j<\zeta\leqslant t}\Delta\theta_\zeta\Delta U_\zeta =$$

$$= -\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left[\theta_{s-}dV_s\prod_{k=1}^{K}W_{s-}^k - (I-\operatorname{diag}(\Xi(\overline{\xi}_j)))d\theta_s V_{s-}\prod_{k=1}^{K}W_{s-}^k\right],$$

поэтому

$$u_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[\theta_{\zeta_j}+\int\limits_{\zeta_j}^{t}(d\theta_s U_{s-}+\theta_{s-}dU_s)+\sum_{\zeta:\,\zeta_j<\zeta\leqslant t}\Delta\theta_\zeta\Delta U_\zeta\right] =$$

$$= \mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[\theta_{\zeta_j}+\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(\operatorname{diag}(\Xi(\overline{\xi}_j))A^\top - \sum_{k=1}^{K}\operatorname{diag}(g^k)\right)u_s ds + M_t^4\right], \tag{П.6}$$

где $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^4$ – некоторый мартингал. Вычисляя УМО обеих частей (П.6) относительно $\mathfrak{O}_j$ и используя тот факт, что

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^4|\mathfrak{O}_j\right\} = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^4|\mathcal{F}_{\zeta_j}\right\}|\mathfrak{O}_j\right\} = 0,$$

получаем систему уравнений, эквивалентную (7):

$$m_t = \widehat{\pi}_j + \int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(\operatorname{diag}(\Xi(\overline{\xi}_j))A^\top - \sum_{k=1}^{K}\operatorname{diag}(g^k)\right)m_s ds.$$

Возможность представления функции μ_t в виде решения (8) следует из правила дифференцирования сложной функции (6) и системы (7).

Пусть $\mathcal{A} \in \mathfrak{O}_j$ – произвольное множество и $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \{\omega :\ \zeta_{j+1} > t\}$. Из свойств УМО следует истинность следующей цепочки равенств:

$$\begin{gathered}
\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left(\theta_t\mathbf{I}_{\mathcal{A}'}(\omega)-\mu_t\mathbf{I}_{\mathcal{A}'}(\omega)\right)\right\}= \\
=\mathsf{E}\left\{\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)-\mu_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)\right\}= \\
=\mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)-\mu_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)\right\}|\mathfrak{O}_j\right\}= \\
=\mathsf{E}\left\{\left(\mathsf{E}\left\{\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}-\mu_t\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}\right)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)\right\}= \\
=\mathsf{E}\left\{(m_t-\mathbf{1}m_t\mu_t)\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega)\right\}=0,
\end{gathered}$$

а также истинность равенства (5). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2.

Последовательность $\{(\zeta_j,\overline{\theta}_j,\overline{\xi}_j,\overline{\eta}_j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ является марковской. Построим элементы ее переходного ядра.

Процессы $\theta_t(\eta_t^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)$ допускают разложение

$$\theta_t(\eta_t^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(A^\top\theta_s(\eta_s^k-\overline{\eta}_j^k)+\operatorname{diag}(g^k)\theta_s\right)ds+M_t^5\right],$$

где $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M_t^5$ – некоторый мартингал. С другой стороны,

$$\theta_t(\eta_t^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)=\theta_t\underbrace{(\eta_t^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)}_{=0}+\theta_t(\eta_t^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\begin{gathered}
\theta_{t\wedge\zeta_{j+1}}(\eta_{t\wedge\zeta_{j+1}}^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t\wedge\zeta_{j+1})= \\
=\theta_{t\wedge\zeta_{j+1}}(\eta_{t\wedge\zeta_{j+1}}^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t\wedge\zeta_{j+1})= \\
=\overline{\theta}_{j+1}(\overline{\eta}_{j+1}^k-\overline{\eta}_j^k)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)= \\
=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\left[\int\limits_{\zeta_j}^{t}\left(A^\top\underbrace{u_s(\eta_s^k-\overline{\eta}_j^k)}_{=0}+\operatorname{diag}(g^k)u_s\right)ds+M_{t\wedge\zeta_{j+1}}^5\right].
\end{gathered}$$

Вычисляя УМО относительно $\mathfrak{O}_j$ от левой и правой частей последнего равенства и используя теорему об опциональной остановке непрерывного справа

мартингала, получаем, что

$$\mathsf{E}\left\{\overline{\theta}_{j+1}(\overline{\eta}^k_{j+1}-\overline{\eta}^k_j)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}=$$
$$=\mathsf{E}\left\{\overline{\theta}_{j+1}\mathbf{I}_{\{1\}}(\overline{\eta}^k_{j+1}-\overline{\eta}^k_j)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}=$$
$$=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\int\limits_{\zeta_j}^{t}\mathrm{diag}\,(g^k)m_s ds=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\int\limits_{\zeta_j}^{t}\mathrm{diag}\,(g^k)\mu_s(\mathbf{1}m_s)ds.$$

Рассмотренный переход соответствует случаю скачка компоненты η^k, т.е. $\zeta_{j+1}=\zeta^{\eta,k}_\ell$. Теперь рассмотрим случай, когда переход порожден скачком наблюдений ξ, т.е. когда $\overline{\xi}_{j+1}\neq\overline{\xi}_j$ и $\zeta_{j+1}=\zeta^{\xi}_\ell$. Пусть $c\in\mathcal{C}$ (одно из возможных значений наблюдения ξ) – некоторый столбец матрицы C. Заметим, что

$$\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\overline{\theta}_{j+1}=\begin{cases}0,\ \text{если } \overline{\xi}_{j+1}=\overline{\xi}_j,\\ \overline{\theta}_{j+1},\ \text{если } \overline{\xi}_{j+1}\neq\overline{\xi}_j.\end{cases}$$

Процесс $\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)$ допускает разложение

$$\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)=$$
$$=\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\left[\int\limits_{\zeta_j}^{t}A^\top\theta_s ds+M^6_t\right]\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t),$$

где $\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)M^6_t$ – некоторый мартингал. С другой стороны,

$$\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)=$$
$$=\underbrace{\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j,\zeta_{j+1})}(t)}_{=0}+$$
$$+\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_{t\wedge\zeta_{j+1}}\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t\wedge\zeta_{j+1})=$$
$$=\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\theta_{t\wedge\zeta_{j+1}}\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t\wedge\zeta_{j+1})=$$
$$=\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\overline{\theta}_{j+1}\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)=$$
$$=\mathrm{diag}\,(c)\left(I-\mathrm{diag}\,(\Xi(\overline{\xi}_j))\right)\left[\int\limits_{\zeta_j}^{t}A^\top u_s ds+M^6_{t\wedge\zeta_{j+1}}\right]\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t).$$

Вновь вычисляя УМО относительно $\mathfrak{O}_j$ от левой и правой частей равенства и используя теорему об опциональной остановке мартингала, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left\{\operatorname{diag}(c)\left(I-\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)\right)\overline{\theta}_{j+1}\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}=\\
&=\mathsf{E}\left\{\overline{\theta}_{j+1}\mathbf{I}_{\{c\}}(\overline{\xi}_{j+1})\left(1-\mathbf{I}_{\{\overline{\xi}_j\}}(\overline{\xi}_{j+1})\right)\mathbf{I}_{[\zeta_{j+1},+\infty)}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}=\\
&=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\int\limits_{\zeta_j}^{t}\operatorname{diag}(c)\left(I-\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)\right)A^{\top}m_s ds=\\
&=\mathbf{I}_{[\zeta_j,+\infty)}(t)\int\limits_{\zeta_j}^{t}\operatorname{diag}(c)\left(I-\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)\right)A^{\top}\mu_s(\mathbf{1}m_s)ds.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\overline{\theta}_{j+1}=e_i,\ \overline{\xi}_{j+1}=c,\ \overline{\xi}_{j+1}\neq\overline{\xi}_j,\ \zeta_{j+1}\in[t,t+dt)|\mathfrak{O}_j\right\}=\\
&=e_i^{\top}\operatorname{diag}(c)\left(I-\operatorname{diag}\left(\Xi(\overline{\xi}_j)\right)\right)A^{\top}\mu_t(\mathbf{1}m_t)dt
\end{aligned}\tag{П.7}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left\{\overline{\theta}_{j+1}=e_i,\ \overline{\xi}_{j+1}=\overline{\xi}_j,\ \overline{\eta}^k_{j+1}-\overline{\eta}^k_j=1,\ \zeta_{j+1}\in[t,t+dt)|\mathfrak{O}_j\right\}=\\
&=e_i^{\top}\operatorname{diag}(g^k)\mu_t(\mathbf{1}m_t)dt.
\end{aligned}\tag{П.8}$$

Далее, воспользуемся приемом, стандартным для вывода уравнений оптимальной фильтрации состояний марковских систем наблюдения с дискретным временем [24, 25]. Пусть (α,β,γ) – блочный случайный вектор, $P(\mathcal{A},\mathcal{B}|\gamma)$ – условное распределение пары (α,β) относительно γ, т.е.

$$\mathsf{P}\{\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}|\gamma\}=P(\mathcal{A},\mathcal{B}|\gamma)\qquad\mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Пусть также существует такая мера $\chi(a,b|\gamma)$, что $P\ll\chi$ и $\rho(a,b|\gamma)=$ $=\frac{dP}{d\chi}(a,b|\gamma)$ – соответствующая производная Радона-Никодима. Тогда УМО $\mathsf{E}\{\alpha|\beta,\gamma\}$ может быть вычислено с помощью следующего варианта формулы Байеса:

$$\mathsf{E}\{\alpha|\beta,\gamma\}=\left(\int\rho(a',\beta|\gamma)d\chi(a',\beta|\gamma)\right)^{-1}\int a\rho(a,\beta|\gamma)d\chi(a,\beta|\gamma).\tag{П.9}$$

Формула (9) представляет собой частный случай (П.9), полученный подстановкой в нее (П.7) и (П.8). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Непосредственной подстановкой можно проверить, что оценка $\widehat{\theta}_t$, "склеенная" из решений систем (8) со скачками, описываемыми (9) и начальным условием (11), является решением (12). Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить истинность равенства (10).

Наблюдаемый процесс (ξ_t, η_t) представляет собой мультивариантный точечный процесс (МТП) с пространством состояний $\mathbf{B} \triangleq \mathcal{C} \times {\mathbb{Z}_+}^K$, который может быть представлен в эквивалентной форме стохастической меры ϕ [18], определенной на измеримом пространстве $([0,T] \times \mathbf{B}, \mathcal{B}([0,T]) \times 2^{\mathbf{B}})$:

$$\phi(\omega, dt, dy_1, dy_2) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \delta_{(\zeta_j(\omega), \overline{\xi}_j(\omega), \overline{\eta}_j(\omega))}(dt, dy_1, dy_2).$$

В [18] доказано, что естественный поток σ-алгебр, порожденный наблюдениями, совпадает с потоком, порожденным стохастической мерой, т.е.

$$\sigma\left\{\phi([a,b) \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}) : \ [a,b) \in \mathcal{B}([0,T]),\ c \in \mathcal{C},\ \mathbf{z} \in {\mathbb{Z}_+}^K\right\} \equiv \mathcal{O}_t, \quad t \in [0,T].$$

Базу σ-алгебры $\mathcal{B}([0,T]) \times 2^{\mathbf{B}}$ составляют множества вида $[a,b) \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}$, поэтому в силу теоремы о монотонных классах [23] для доказательства истинности равенства (10) достаточно проверить выполнение равенства

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{j \geqslant 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)\mu_t - \theta_t\right) \phi([a,b) \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\})\right\} \equiv 0$$

для всех множеств $[a,b) \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}$ базы.

Из свойств УМО и (4)–(6) следует цепочка равенств

$$\mathsf{E}\left\{\left(\sum_{j \geqslant 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)\mu_t - \theta_t\right) \phi([a,b) \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\})\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\sum_{j \geqslant 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)\left(\mu_t - \theta_t\right)\mathbf{I}_{[a,b)}(t) \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{I}_{[\zeta_\ell, \zeta_{\ell+1})}(t)\mathbf{I}_{\{c\}}(\overline{\xi}_\ell)\mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\overline{\eta}_\ell)\right\} =$$

$$= \mathbf{I}_{[a,b)}(t) \sum_{j \geqslant 0} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)\left(\mu_t - \theta_t\right)\mathbf{I}_{\{c\}}(\overline{\xi}_j)\mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\overline{\eta}_j)\right\} =$$

$$= \mathbf{I}_{[a,b)}(t) \sum_{j \geqslant 0} \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)\left(\mu_t - \theta_t\right)\mathbf{I}_{\{c\}}(\overline{\xi}_j)\mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\overline{\eta}_j)|\mathfrak{O}_j\right\}\right\} =$$

$$= \mathbf{I}_{[a,b)}(t) \sum_{j \geqslant 0} \mathsf{E}\left\{\left(\underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}}_{=\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)\mathbf{1}m_t}\mu_t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)\mathsf{E}\left\{\theta_t\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)|\mathfrak{O}_j\right\}}_{=\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)m_t}\right)\mathbf{I}_{\{c\}}(\overline{\xi}_j)\mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\overline{\eta}_j)\right\} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guerrero C.* Available Bandwidth Estimation: A Hidden Markov Model Approach. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010.
2. *Chaudhari S., Biradar R.* Survey of Bandwidth Estimation Techniques in Communication Networks //Wireless Pers. Commun. 2015. Vol. 83. P. 1425–1476.
3. *Airon M., Gupta N.* Bandwidth Estimation Tools and Techniques: A Review // International Journal of Research. 2017. V. 4. P. 1250–1265.
4. *Salcedo D., Cesar D. Guerrero C., Martinez R.* Available Bandwidth Estimation Tools: Metrics, Approach and Performance // Int. J. Commun. Networks Inform. Security. 2018. V. 10. No. 3. P. 580–587.
5. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems // J. Basic Engineer. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
6. *Bergfeldt E., Ekelin S., Karlsson J.* Real-time available-bandwidth estimation using filtering and change detection // Computer Networks. 2009. V. 53. No. 15. P. 2617–2645.
7. *Bozakov Z., Bredel M.* Online Estimation of Available Bandwidth and Fair Share Using Kalman Filtering // Proc. of 8th International IFIP-TC 6 Networking Conference, 2009. LNCS. V. 5550. P. 548–561. Springer, Berlin, Heidelberg.
8. *Липцер Р., Ширяев А.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
9. *Wong E., Hajek B.* Stochastic Processes in Engineering Systems. New York: Springer, 1984.
10. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
11. *Kallianpur G., Striebel C.* Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes // ТВП. 1969. Т. 14. Вып. 4. С. 597–622.
12. *Липцер Р., Ширяев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Brémaud P.* Point Process Calculus in Time and Space. N.Y.: Springer, 2021.
14. *Limnios N., Oprişan G.* Semi-Markov Processes and Reliability. N.Y.: Springer-Science+Business Media, LLC, 2001.
15. *Grabski F.* Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Amsterdam: Elsevier, 2015.
16. *Cocozza-Thivent C.* Markov Renewal and Piecewise Deterministic Processes. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021.
17. *Калашников В., Рачев С.* Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988.
18. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales // Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1975. V. 31. P. 235–253.
19. *Floyd S., Jacobson V.* Random early detection gateways for congestion avoidance // IEEE/ACM Trans Netw. 1993. V. 1. No. 4. P. 397–413.
20. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986.

21. *Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информ. и ее примен. 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37.
22. *Борисов А.* Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума // Информ. и ее примен. 2025. Т. 19. Вып. 1 (в печати).
23. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986.
24. *Sørenson H., Stubberud A.* Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density // Int. J. Contr. 1968. V. 8. No. 1. P. 33–51.
25. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 23.02.2025

После доработки 13.04.2025

Принята к публикации 15.04.2025