

© 2024 г. М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
А.В. СТЕПАНОВ (andrey8st@yahoo.com)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

СИНТЕЗ ОБОБЩЕННОГО H_∞ -СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ И АПРИОРНЫМ ДАННЫМ¹

Показано, что при отсутствии математической модели линейного непрерывного или дискретного динамического объекта закон управления, обеспечивающий субоптимальное гашение начального и/или внешнего возмущений, может быть реализован по экспериментальным и априорным данным. В основе подхода лежат методы построения робастного управления, теория двойственности и аппарат линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: обобщенная H_∞ -норма, неопределенность, робастное управление, экспериментальные данные, двойственные системы, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024010015

1. Введение

В последнее время все возрастающее внимание в теории управления уделяется построению законов управления для динамических объектов в условиях большой неопределенности относительно их математических моделей, действующих внешних возмущений и неизвестных начальных условий. В работах этого направления предполагается, что с объектом можно провести серию экспериментов, задавая входные воздействия и измеряя выходные переменные. Задача состоит в том, чтобы на основе полученных измерений, а также априорных данных, не идентифицируя неизвестные параметры объекта, непосредственно определить параметры обратных связей, при которых гарантируется определенное качество замкнутой системы управления.

В [1] было установлено, что для полной характеристики линейной стационарной динамической системы может быть использована единственная траектория, полученная при выполнении так называемого условия неисчезающего возбуждения. С учетом этого фундаментального результата в [2] для объектов с неизвестными матрицами уравнения динамики состояния и заданными матрицами уравнения целевого выхода были предложены различные варианты прямого синтеза законов управления на основе экспериментальных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2023-945).

данных, в которых выполняется указанное условие. В [3] было показано, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения условия информативности данных по отношению к синтезируемому закону управления, которое менее ограничительно по сравнению с условием неистощающего возбуждения. В [4] построение H_2 - и H_∞ -оптимальных законов управления полностью неопределенным дискретным объектом по измерениям входа и выхода осуществляется на основе матричного варианта S -леммы [5], а в [6] – на основе леммы Питерсена [7]. В [8, 9] параметры обратной связи по состоянию находятся на основе априорных данных и измерений входа и выхода дискретного неопределенного объекта, на который действует неизмеряемое возмущение из определенного класса.

В настоящей работе синтез обобщенных H_∞ -субоптимальных, обеспечивающих гашение начального и/или внешнего возмущения и, как частный случай, линейно-квадратичных законов управления для непрерывных и дискретных объектов с полностью неизвестными матрицами уравнений динамики состояния и целевого выхода осуществляется на основе априорных и экспериментальных данных. В основу синтеза положен подход, примененный в [9] и состоящий в “погружении” неопределенной системы в искусственную систему с известными уравнениями и с дополнительным возмущением, влияние которого соответствует влиянию неизвестных слагаемых в исходном уравнении. Идея такого искусственного “погружения” или, другими словами, представление неопределенной системы в виде системы, в обратной связи которой находится блок с неизвестными ограниченными параметрами или неизвестный ограниченный оператор, активно применялась в синтезе робастного управления на основе H_∞ -оптимального управления (см. обзор [10]). Однако непосредственное применение такого подхода к синтезу законов управления на основе экспериментальных данных вызывало трудности. В данной работе показано, что эта проблема разрешается, если перейти от исходной неопределенной системы к двойственной неопределенной системе, которую следует “погрузить” в соответствующую расширенную систему. Для реализации такого подхода потребовалось предварительно установить связь между обобщенными H_∞ -нормами прямой и двойственной систем.

Статья структурирована следующим образом. После введения в разделе 2 дается общая постановка задачи и показывается, как на основе априорных и экспериментальных данных выводятся два квадратичных неравенства относительно неизвестных матриц уравнений динамики состояния и целевого выхода. В разделе 3 приводятся необходимые сведения об обобщенной H_∞ -норме и доказывается утверждение о вычислении этой нормы в терминах двойственной системы. В разделе 4 описывается процедура синтеза обобщенных H_∞ -субоптимальных законов управления по априорным и экспериментальным данным и доказывается основная теорема. В разделе 5 приводятся результаты ряда экспериментов с неопределенной системой, показывающие эффективность синтезируемого управления. В разделе 6 подводятся итоги и делаются выводы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неопределенную систему вида

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad x(0) = x_0, \\ z(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управление, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – возмущение, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход. Предполагается, что возмущение $w(t) \in L_2(l_2)$ и матрицы системы A , B , C и D неизвестны. В общем плане требуется на основе априорной информации и данных, полученных из экспериментов, синтезировать линейные обратные связи по состоянию, при которых уровень гашения возмущений в замкнутой системе не превышает заданное значение.

Информация о неизвестных параметрах системы (2.1) извлекается из конечного набора измерений ее траектории. А именно, допустим, что в случае дискретной системы получены измерения ее состояния $x_0, x_1, \dots, x_N$ и целевого выхода $z_0, \dots, z_{N-1}$ при выбранных управлениях $u_0, \dots, u_{N-1}$ и некотором неизвестном возмущении $w_0, \dots, w_{N-1}$. Составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi &= (x_0 \cdots x_{N-1}), \quad \Phi_+ = (x_1 \cdots x_N), \\ U &= (u_0 \cdots u_{N-1}), \quad W = (w_0 \cdots w_{N-1}), \quad Z = (z_0 \cdots z_{N-1}). \end{aligned}$$

В случае непрерывной системы допустим, что имеются измерения в моменты времени $t_0, \dots, t_{N-1}$ состояния $x(t_0), \dots, x(t_{N-1})$, производных состояния $\dot{x}(t_0), \dots, \dot{x}(t_{N-1})$ и целевого выхода $z(t_0), \dots, z(t_{N-1})$ при выбранных управлениях $u(t_0), \dots, u(t_{N-1})$ и некоторых неизвестных возмущениях $w(t_0), \dots, w(t_{N-1})$. Составим матрицы

$$\begin{aligned} \Phi &= (x(t_0) \cdots x(t_{N-1})), \quad \Phi_+ = (\dot{x}(t_0) \cdots \dot{x}(t_{N-1})), \\ U &= (u(t_0) \cdots u(t_{N-1})), \quad W = (w(t_0) \cdots w(t_{N-1})), \quad Z = (z(t_0) \cdots z(t_{N-1})). \end{aligned}$$

Для матриц с экспериментальными данными в непрерывном и дискретном случаях имеют место соотношения

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Phi_+ &= A_{real}\Phi + B_{real}U + W, \\ Z &= C_{real}\Phi + D_{real}U, \end{aligned}$$

в которых A_{real} , B_{real} , C_{real} и D_{real} – реальные неизвестные матрицы уравнений системы. Обозначим:

$$\Delta_{real} = \begin{pmatrix} A_{real} & B_{real} \\ C_{real} & D_{real} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ U \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ Z \end{pmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{pmatrix} W \\ 0 \end{pmatrix}$$

и запишем уравнения (2.2) в виде линейной матричной регрессии

$$(2.3) \quad \widetilde{\Phi} = \Delta_{real}\widehat{\Phi} + \widehat{W}.$$

Допустим, что возмущение в эксперименте удовлетворяет условию

$$(2.4) \quad \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i)w^T(t_i) = WW^T \leq \Omega.$$

В частности, если возмущение при всех t удовлетворяет ограничению $\|w(t)\|_\infty \leq d_w$ для некоторого заданного d_w , которое будем называть уровнем возмущения, то $\Omega = d_w^2 n_w N I_{n_x}$. В случае, когда суммарная энергия возмущения во время эксперимента ограничена $\sum_{i=0}^{N-1} |w(t_i)|^2 \leq \alpha^2$, то $\Omega = \alpha^2 I$. Если в (2.1) $w(t) = B_w v(t)$, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ для некоторой матрицы B_w и $\|v(t)\|_\infty \leq d_v$, то $\Omega = d_v^2 n_v N B_w B_w^T$.

Из (2.4) следует, что

$$(2.5) \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \begin{pmatrix} \Omega & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widehat{\Omega}.$$

Определим множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ матриц Δ порядка $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$, которые могли бы генерировать полученные в эксперименте матрицы Φ , Φ_+ и Z при выбранных управлениях U и некоторых допустимых возмущениях W , удовлетворяющих ограничению (2.4). Для этих матриц равенство $\tilde{\Phi} = \Delta\hat{\Phi} + \widehat{W}$ должно выполняться при некоторой $\widehat{W}$, удовлетворяющей (2.5). Следовательно,

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \left\{ \Delta : \tilde{\Phi} = \Delta\hat{\Phi} + \widehat{W}, \quad \widehat{W}\widehat{W}^T \leq \widehat{\Omega} \right\}$$

и $\Delta \in \Delta_{\mathbf{p}}$ тогда и только тогда, когда

$$(2.6) \quad (\tilde{\Phi} - \Delta\hat{\Phi})(\tilde{\Phi} - \Delta\hat{\Phi})^T \leq \widehat{\Omega}.$$

Очевидно, что $\Delta_{real} \in \Delta_{\mathbf{p}}$. Для дальнейшего применения представим последнее неравенство в виде

$$(2.7) \quad (\Delta I_{n_x+n_z}) \Psi_1 (\Delta I_{n_x+n_z})^T \leq 0,$$

где симметрическая матрица Ψ_1 порядка $2n_x + n_u + n_z$ разбивается на блоки соответствующего порядка и вычисляется следующим образом:

$$(2.8) \quad \Psi_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} \Phi\Phi^T & * & * & * \\ U\Phi^T & UU^T & * & * \\ \hline -\Phi_+\Phi^T & -\Phi_+U^T & \Phi_+\Phi_+^T - \Omega & * \\ -Z\Phi^T & -ZU^T & Z\Phi_+^T & ZZ^T \end{array} \right).$$

Таким образом, множество матриц Δ , согласованных с полученными экспериментальными данными, удовлетворяет неравенству (2.7). Условия ограниченности множества $\Delta_{\mathbf{p}}$ формулируются в следующем утверждении, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 2.1. Если информационная матрица $\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^T$ невырождена, то множество $\Delta_{\mathbf{p}}$ представляет собой невырожденный “матричный эллипсоид” с центром в Δ_{LS} , определяемый неравенством

$$(2.9) \quad (\Delta - \Delta_{LS})(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^T)(\Delta - \Delta_{LS})^T \leq \Gamma,$$

в котором

$$(2.10) \quad \Gamma = \widehat{\Omega} + \widetilde{\Phi}[\widehat{\Phi}^T(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^T)^{-1}\widehat{\Phi} - I]\widetilde{\Phi}^T \geq 0,$$

а $\Delta_{LS} = \widetilde{\Phi}\widehat{\Phi}^T(\widehat{\Phi}\widehat{\Phi}^T)^{-1}$ – оптимальная оценка неизвестной матрицы Δ_{real} в (2.3) методом наименьших квадратов, минимизирующая по Δ квадрат матричной нормы невязки $\|\widetilde{\Phi} - \Delta\widehat{\Phi}\|_F^2$.

Из этой леммы следует, что при невырожденности информационной матрицы “размер” множества $\Delta_{\mathbf{p}}$ определяется матрицами регрессоров $\widehat{\Phi}$ и в конечном итоге зависит от реального объекта, выбираемых в эксперименте управлений U и возмущений W .

Далее, пусть имеется дополнительная информация о том, что неизвестная матрица Δ_{real} удовлетворяет ограничению

$$(2.11) \quad (\Delta - \Delta_*)(\Delta - \Delta_*)^T \leq \rho^2 I, \quad \Delta_* = \begin{pmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_*^{(1)} \\ \Delta_*^{(2)} \end{pmatrix},$$

в котором Δ_* и ρ – заданные матрица и параметр, характеризующие центр и размер области неопределенности. Запишем это неравенство в виде

$$(2.12) \quad (\Delta I_{n_x+n_z}) \Psi_2 (\Delta I_{n_x+n_z})^T \leq 0,$$

где

$$(2.13) \quad \Psi_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} I_{n_x} & \star & \star & \star \\ 0_{n_u \times n_x} & I_{n_u} & \star & \star \\ \hline -A_* & -B_* & \Delta_*^{(1)} \Delta_*^{(1)T} - \rho^2 I_{n_x} & \star \\ -C_* & -D_* & \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(1)T} & \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(2)T} - \rho^2 I_{n_z} \end{array} \right).$$

Обозначим: $\Delta_{\mathbf{a}}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенству (2.12), и $\Delta_{\mathbf{set}} = \Delta_{\mathbf{p}} \cap \Delta_{\mathbf{a}}$ – множество матриц, которые удовлетворяют неравенствам (2.7) и (2.12). Очевидно, что $\Delta_{real} \in \Delta_{\mathbf{set}}$ (см. рис. 1).

Качество системы (2.1) при заданной матрице Δ , замкнутой управлением вида линейной стационарной обратной связи по состоянию $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать уровнем гашения внешнего и начального возмущений, т.е. обобщенной H_∞ -нормой

$$\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0, w} \frac{\|z\|}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|w\|^2)^{1/2}},$$

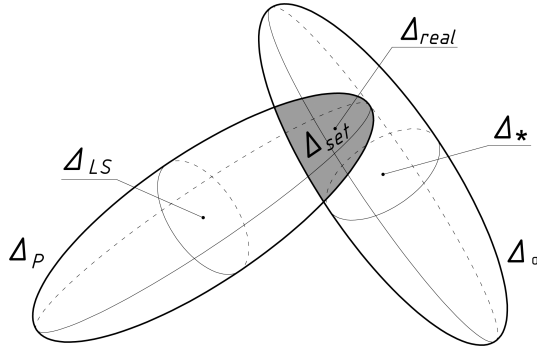


Рис. 1. Множество Δ_{set} неизвестных параметров Δ , согласованных с экспериментальными и априорными данными.

где $R = R^T > 0$ – весовая матрица, $\|\xi\|^2 = \sum_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в дискретном случае и $\|\xi\|^2 = \int_{t=0}^{\infty} |\xi(t)|^2$ в непрерывном случае. При отсутствии внешнего возмущения, т.е. при $w(t) \equiv 0$, обобщенная H_{∞} -норма принимает вид так называемой γ_0 -нормы

$$\gamma_0(\Delta, \Theta) = \sup_{x_0 \neq 0} \frac{\|z\|}{(x_0^T R^{-1} x_0)^{1/2}},$$

которая характеризует “наихудшее” значение квадратичного функционала на траекториях системы, когда начальное состояние принадлежит эллипсоиду $x^T R^{-1} x \leq 1$. Если начальное состояние нулевое, то обобщенная H_{∞} -норма (при $R \rightarrow 0$) превращается в обычную H_{∞} -норму

$$\gamma_{\infty}(\Delta, \Theta) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|}{\|w\|}.$$

Качество неопределенной системы (2.1), замкнутой управлением вида $u(t) = \Theta x(t)$, будем оценивать минимальной верхней границей уровня гашения внешнего и начального возмущений, т.е. минимальной верхней границей обобщенной H_{∞} -нормы для всех матриц объекта, согласованных с экспериментальными и априорными данными:

$$(2.14) \quad \gamma_*(\Theta) = \sup_{\Delta \in \Delta_{\text{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta).$$

Робастное обобщенное H_{∞} -оптимальное управление определяется как управление с матрицей параметров Θ_* , при которой достигается минимальное значение этой границы, т.е. которая является решением минимаксной задачи

$$(2.15) \quad \inf_{\Theta} \sup_{\Delta \in \Delta_{\text{set}}} \gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) = \inf_{\Theta} \gamma_*(\Theta) = \gamma_*(\Theta_*).$$

Задача заключается в том, чтобы, не имея и не строя математическую модель системы, синтезировать робастное обобщенное H_{∞} -субоптимальное управление с матрицей параметров Θ , при которой обобщенная H_{∞} -норма замкну-

той системы для всех объектов, матрицы которых согласованы с полученными экспериментальными данными, ограничена заданной константой, т.е. $\gamma_*(\Theta) < \gamma$.

3. Обобщенная H_∞ -норма в терминах двойственной системы

Напомним, что обобщенная H_∞ -норма от входа v к выходу z

$$(3.1) \quad \gamma_{g\infty} = \sup_{x_0, v} \frac{\|z\|}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|^2)^{1/2}}$$

устойчивой системы

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}v(t), \\ z(t) &= \mathcal{C}x(t) \end{aligned}$$

удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда разрешимы относительно матрицы $Y = Y^T > 0$ следующие линейные матричные неравенства: для непрерывной системы

$$(3.3) \quad \begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^T & -\gamma^2 I & \star \\ \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0$$

и для дискретной системы

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} -Y & \star & \star & \star \\ Y\mathcal{A}^T & -Y & \star & \star \\ \mathcal{B}^T & 0 & -\gamma^2 I & \star \\ 0 & \mathcal{C}Y & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & \star \\ I & \gamma^2 R^{-1} \end{pmatrix} > 0.$$

Как показано в [11, 12], неравенства (3.3) и (3.4) означают, что для положительно определенной функции $V(x) = x^T Y^{-1} x$ с $Y > \gamma^{-2} R$ в силу системы (3.2) выполняется соответствующее из неравенств

$$(3.5) \quad \dot{V}(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0, \quad \Delta V(x) + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall x, v.$$

Следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении, позволяет характеризовать обобщенную H_∞ -норму системы (3.2) в терминах двойственной системы.

Лемма 3.1. Обобщенная H_∞ -норма системы (3.2) удовлетворяет условию $\gamma_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V_a(x_a) = x_a^T P x_a$ с $P > R$, для которой по траектории двойственной системы

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \partial x_a(t) &= \mathcal{A}^T x_a(t) + \mathcal{C}^T v_a(t), \\ z_a(t) &= \mathcal{B}^T x_a(t) \end{aligned}$$

выполняется соответствующее из неравенств

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{V}_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |v_a(t)|^2 &< 0, \\ \Delta V_a(x_a(t)) + |z_a(t)|^2 - \gamma^2 |v_a(t)|^2 &< 0. \end{aligned}$$

Следствие 3.1. При $v(t) \equiv 0$ γ_0 -норма системы (3.2) удовлетворяет условию $\gamma_0 < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует квадратичная форма $V_a(x_a) = x_a^T P x_a$ с $P > R$, для которой по траектории двойственной системы

$$\partial x_a(t) = \mathcal{A}^T x_a(t) + \mathcal{C}^T v_a(t)$$

выполняется соответствующее из неравенств (3.7) при $z_a(t) \equiv 0$.

Замечание 1. Формально двойственная система описывается в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_a &= -\mathcal{A}^T \hat{x}_a - \mathcal{C}^T \hat{v}_a, \\ \hat{z}_a &= \mathcal{B}^T \hat{x}_a \end{aligned}$$

и

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= \mathcal{A}^T \hat{x}_a(t+1) + \mathcal{C}^T \hat{v}_a(t), \\ \hat{z}_a(t) &= \mathcal{B}^T \hat{x}_a(t+1) \end{aligned}$$

соответственно. Как показано в доказательстве этой леммы, от систем (3.8) и (3.9) можно перейти к системе (3.6), которая также будет называться двойственной и для которой выполняется соответствующее из неравенств (3.7).

Замечание 2. Матрицы квадратичных форм $V(x) = x^T Y^{-1} x$ и $V_a(x_a) = x_a^T P x_a$ прямой и двойственной систем, как следует из доказательства леммы 3.1, связаны соотношением $P = \gamma^2 Y$.

4. Синтез обобщенных H_∞ -субоптимальных законов управления

Опишем основные шаги получения верхней границы обобщенной H_∞ -нормы и соответствующих матриц параметров Θ законов управления для неопределенной замкнутой системы

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= (A + B\Theta)x(t) + w(t), \\ z(t) &= (C + D\Theta)x(t). \end{aligned}$$

Предполагая, что параметры Θ выбраны так, что замкнутая система устойчива, и учитывая введенные обозначения, представим эти уравнения в виде

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \partial x(t) &= \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_z} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t) + w(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{pmatrix} x(t), \end{aligned}$$

где Δ – неизвестная $(n_x + n_z) \times (n_x + n_u)$ -матрица, Θ – $(n_u \times n_x)$ -матрица параметров регулятора. Уравнения двойственных непрерывной и дискретной систем согласно лемме 3.1 имеют вид

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \partial x_a(t) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^T \Delta^T \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} x_a(t) + \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^T \Delta^T \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} w_a(t), \\ z_a(t) &= x_a(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему, которую назовем расширенной, с дополнительными искусственными входом $w_\Delta(t) \in L_2(l_2)$ и выходом $z_\Delta(t)$, определяемую в непрерывном и дискретном случаях уравнениями

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \partial \hat{x}(t) &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^T w_\Delta(t), \\ \hat{z}(t) &= \hat{x}(t), \quad z_\Delta(t) = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \hat{w}(t), \end{aligned}$$

в которых $\hat{x}(t)$ – состояние, $\hat{w}(t)$ – возмущение, $\hat{z}(t)$ – целевой выход. Заметим, что при $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$ уравнения (4.4) совпадают с уравнениями системы (4.3). Допустим, что дополнительные входной и выходной сигналы в системе (4.4) при всех $t \geq 0$ удовлетворяют двум неравенствам

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} \leq 0,$$

где матрицы Ψ_1 и Ψ_2 заданы в (2.8) и (2.13). Множество всех таких сигналов $w_\Delta(t)$ обозначим через $\mathbf{W}_\Delta$. При $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t)$ для всех $\Delta \in \Delta_{\text{set}}$, как следует из (2.7) и (2.12), выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi_1 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi_1 \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0, \\ \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix}^T \Psi_2 \begin{pmatrix} w_\Delta(t) \\ z_\Delta(t) \end{pmatrix} &= z_\Delta^T(t) \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix}^T \Psi_2 \begin{pmatrix} \Delta^T \\ I \end{pmatrix} z_\Delta(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $w_\Delta(t) = \Delta^T z_\Delta(t) \in \mathbf{W}_\Delta$ и, следовательно, система (4.3) с $\Delta \in \Delta_{\text{set}}$, двойственная исходной неопределенной системе, “погружена” в расширенную систему (4.4), (4.5). С учетом леммы 3.1 это позволяет получить верхнюю границу обобщенной H_∞ -нормы неопределенной системы, используя соответствующее свойство расширенной системы.

Теорема 4.1. Верхняя граница обобщенной H_∞ -нормы неопределенной системы (2.1) при законе управления $u(t) = \Theta x(t)$, где $\Theta = QP^{-1}$, меньше γ ,

если следующие линейные матричные неравенства разрешимы относительно $P = P^T > 0$, Q , $\mu_1 \geq 0$ и $\mu_2 \geq 0$: для непрерывной системы

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} I - \sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\ -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{21}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\ P - \sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{31}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{32}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{33}^{(i)} & \star \\ Q - \sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{41}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{42}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{43}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{44}^{(i)} \end{pmatrix} < 0$$

и для дискретной системы

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} -P & \star & \star & \star & \star \\ 0 & -P + I - \sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{11}^{(i)} & \star & \star & \star \\ 0 & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{21}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{22}^{(i)} - \gamma^2 I & \star & \star \\ P & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{31}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{32}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{33}^{(i)} & \star \\ Q & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{41}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{42}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{43}^{(i)} & -\sum_{i=1}^2 \mu_i \Xi_{44}^{(i)} \end{pmatrix} < 0,$$

где $P > R$,

$$\begin{aligned} \Xi_{11}^{(1)} &= \Phi_+ \Phi_+^T - \Omega, & \Xi_{21}^{(1)} &= Z \Phi_+^T, & \Xi_{22}^{(1)} &= Z Z^T, \\ \Xi_{31}^{(1)} &= -\Phi \Phi_+^T, & \Xi_{32}^{(1)} &= -\Phi Z^T, & \Xi_{33}^{(1)} &= \Phi \Phi^T, \\ \Xi_{41}^{(1)} &= -U \Phi_+^T, & \Xi_{42}^{(1)} &= -U Z^T, & \Xi_{43}^{(1)} &= U \Phi^T, & \Xi_{44}^{(1)} &= U U^T, \\ \Xi_{11}^{(2)} &= \Delta_*^{(1)} \Delta_*^{(1)T} - \rho^2 I_{n_x}, & \Xi_{21}^{(2)} &= \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(1)T}, & \Xi_{22}^{(2)} &= \Delta_*^{(2)} \Delta_*^{(2)T} - \rho^2 I_{n_z}, \\ \Xi_{31}^{(2)} &= -A_*^T, & \Xi_{32}^{(2)} &= -C_*^T, & \Xi_{33}^{(2)} &= I_{n_x}, \\ \Xi_{41}^{(2)} &= -B_*^T, & \Xi_{42}^{(2)} &= -D_*^T, & \Xi_{43}^{(2)} &= 0_{n_u \times n_x}, & \Xi_{44}^{(2)} &= I_{n_u}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 4.1. Выясним условия, при которых существует положительно определенная квадратичная функция $\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T P \hat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений расширенной системы (4.4) при всех $w_\Delta(t)$, удовлетворяющих (4.5), выполняется соответствующее из неравенств (3.7). Достаточным условием для этого в силу S -процедуры является

существование функции $\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T P \hat{x}$ с $P > R$, для которой в силу уравнений (4.4) при всех $\hat{x}$, $\hat{w}$, w_Δ и некоторых $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ выполняется соответствующее неравенство

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{V}}(\hat{x}) + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |\hat{w}|^2 - \sum_{i=1}^2 \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\ \Delta \hat{V}(\hat{x}) + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |\hat{w}|^2 - \sum_{i=1}^2 \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства сводятся к следующим неравенствам для квадратичных форм относительно переменных $\hat{x}$, $\hat{w}$, w_Δ :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} 2\hat{x}^T P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^T w_\Delta + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |\hat{w}|^2 - \sum_{i=1}^2 \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \\ w_\Delta^T \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^T w_\Delta - \hat{x}^T P \hat{x} + |\hat{z}|^2 - \gamma^2 |\hat{w}|^2 - \\ - \sum_{i=1}^2 \mu_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix}^T \Psi_i \begin{pmatrix} w_\Delta \\ z_\Delta \end{pmatrix} < 0, \end{aligned}$$

где $\hat{z} = \hat{x}$ и $z_\Delta = \text{col}(\hat{x}, \hat{w})$. Так как система (4.3), являющаяся двойственной к исходной системе (4.2), “погружена” в расширенную систему и выполняется условие (4.5), то по траекториям (4.3) при всех $\Delta \in \Delta_{\text{set}}$ выполняется неравенство (3.7). Согласно лемме 3.1 отсюда следует, что для исходной неопределенной системы при любом $\Delta \in \Delta_{\text{set}}$ выполнено $\gamma_{g\infty}(\Delta, \Theta) < \gamma$ и, следовательно, $\gamma_*(\Theta) < \gamma$. Осталось только записать неравенства (4.9) для квадратичных форм в виде матричных неравенств, ввести новую матричную переменную $Q = \Theta P$ и, применяя стандартным образом лемму Шура, получить линейные матричные неравенства (4.6) и (4.7) соответственно. Теорема доказана.

Замечание 3. Для нахождения верхней границы γ_0 -нормы требуется исключить слагаемое I в блоке, стоящем в первой строке и первом столбце неравенств (4.6) для непрерывной системы, и в блоке, стоящем во второй строке и втором столбце неравенств (4.7) для дискретной системы. Это следует из того, что в случае γ_0 -нормы в неравенствах (4.8) и соответственно в (4.9) исчезает слагаемое $|\hat{z}|^2$. Для нахождения верхней границы “обычной” H_∞ -нормы в условиях теоремы 4.1 следует положить $R = 0$.

Замечание 4. Согласно неущербности S -процедуры при двух квадратичных ограничениях (теорема 4.1 [13]), если при некоторых μ_1 и μ_2 выполняется неравенство $\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 > 0$ (что проверяется непосредственным решением этого линейного матричного неравенства относительно μ_1 и μ_2), то выполнение соответствующего неравенства (4.8) является не только достаточным, но и необходимым условием существования указанной функции $\hat{V}(\hat{x}) = \hat{x}^T P \hat{x}$ для расширенной системы.

Обозначим минимальное значение γ , при котором каждое из неравенств (4.6) или (4.7) имеет решение, через $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$, где Θ_{rob} – соответствующая матрица параметров управления. Так как

$$\gamma_*(\Theta_*) \leq \gamma_*(\Theta_{rob}) \leq \gamma_{rob}(\Theta_{rob}),$$

где Θ_* – матрица параметров робастного обобщенного H_∞ -оптимального управления, определенного в (2.15), то $\gamma_{rob}(\Theta_{rob})$ является верхней границей минимального уровня гашения возмущений в неопределенной системе при робастном обобщенном H_∞ -оптимальном управлении для заданных априорных и экспериментальных данных. Отметим также, что теорема 4.1 позволяет выяснить, является ли гарантированная обобщенная H_∞ -норма замкнутой неопределенной системы (4.1) при заданной обратной связи с матрицей параметров $\hat{\Theta}$ меньше, чем заданное число γ^2 . Для этого в неравенстве (4.6) для непрерывной системы или в неравенстве (4.7) для дискретной системы следует положить $Q = \hat{\Theta}P$ и решить их относительно переменных P , μ_1 и μ_2 .

5. Иллюстративный пример

Для иллюстрации рассмотрим дискретный объект вида (2.1) пятого порядка $n_x = 5$ с двумя управлениями $n_u = 2$, возмущением при $n_w = 5$ и двумя целевыми выходами $n_z = 2$ с матрицами, каждый элемент которых был выбран случайно на интервале $[-1, 1]$. Таким образом, система содержит 49 неизвестных параметров. В эксперименте начальные условия и компоненты вектора управления выбирались случайно на интервале $[-1, 1]$, а возмущение – также случайно на интервале $[-d, d]$. Было сделано $N = 50$ измерений. Весовая матрица начального возмущения имеет вид $R = 0,01I_5$. На рис. 2 приведены типичные три графика квадратов уровней гашения возмущений замкнутой системы при управлении, синтезированном на основе только экспериментальных данных, в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Сплошная кривая соответствует квадрату гарантированной обобщенной H_∞ -нормы $\gamma_{rob}^2(\Theta_{rob})$ при законе управления с матрицей параметров Θ_{rob} , найденной в результате решения линейных матричных неравенств (4.7) при минимальном значении γ^2 . Штрих-пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{real} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{real}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞ -норме замкнутой системы, состоящей из реального объекта с матрицей параметров Δ_{real} (если бы ее знали) и обратной связи с параметрами Θ_{rob} . Пунктирная кривая отвечает квадрату уровня гашения возмущений $\gamma_{prob} = \gamma_{g\infty}(\Delta_{prob}, \Theta_{rob})$, т.е. обобщенной H_∞ -норме замкнутой системы, состоящей из пробного объекта, которому соответствует матрица $\Delta_{prob} = \Delta_{LS} + \Gamma^{1/2}(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1/2}$, находящаяся согласно лемме 2.1 на границе эллипсоида неопределенности Δ_{set} , и обратной связи с параметрами Θ_{rob} . Рост этих кривых с возрастанием уровня возмущения d в эксперименте объясняется тем, что при увеличении d возрастают размеры эллипсоида Δ_p неизвестных параметров Δ , согласованных с экспериментальными данными.

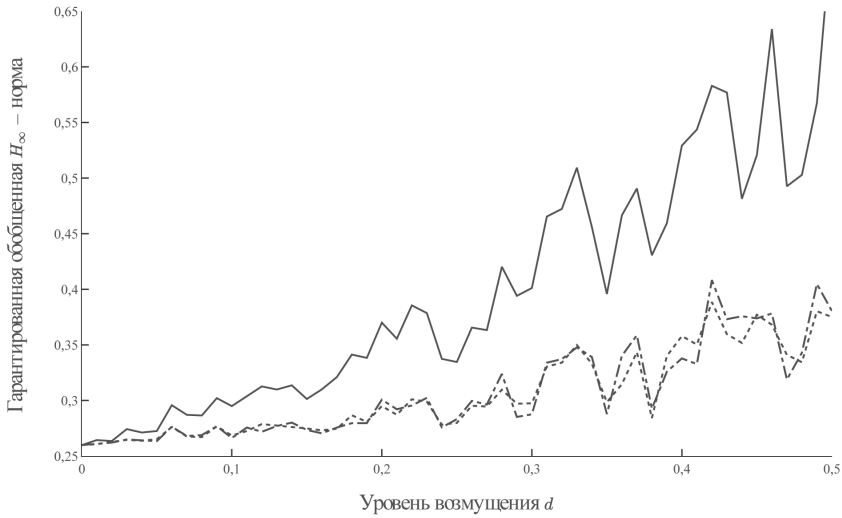


Рис. 2. Гарантированная обобщенная H_∞ -норма и обобщенные H_∞ -нормы для реального и пробного объектов как функции уровня возмущения в измерениях.

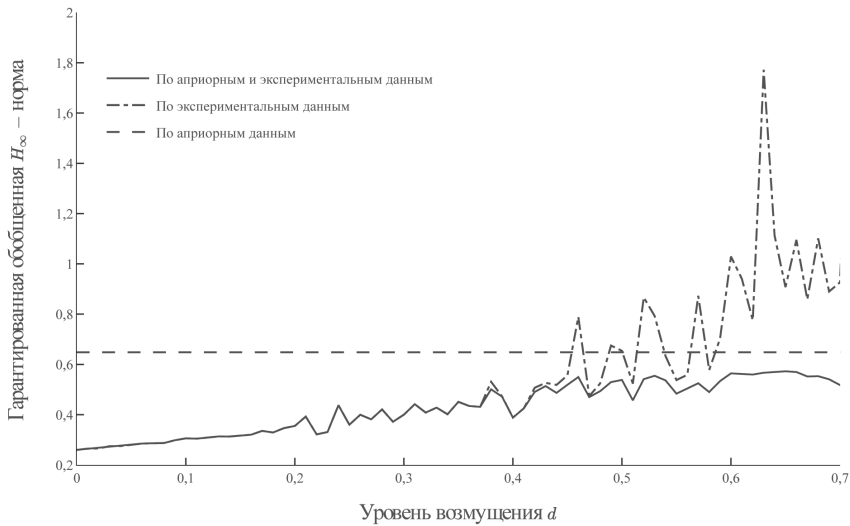


Рис. 3. Гарантированные оценки H_∞ -нормы как функции уровня возмущения в экспериментальных данных для различных видов используемой информации.

Из рис. 2 видно, что кривая γ_{rob}^2 с некоторым запасом мажорирует уровни гашения возмущений замкнутой системы для конкретных объектов с матрицами Δ_{real} и Δ_{prob} из множества Δ_{set} и что при найденном законе управления с матрицей параметров Θ_{rob} обобщенные H_∞ -нормы замкнутых систем незна-

чительно превышают (особенно при небольших уровнях возмущения d) свои минимальные значения $\gamma^2 \simeq 0,26$ для полностью известной модели. Заметим, что запас, с которым γ_{rob}^2 превышает γ_{real}^2 и γ_{prob}^2 , существенным образом зависит от экспериментальных данных и может быть значительно меньше, чем на графиках, приведенных на рис. 2.

На рис. 3 приведены три гарантированные оценки обобщенной H_∞ -нормы, полученные только по априорной информации, только по экспериментальным данным и совместно по априорной информации и экспериментальным данным в зависимости от уровня возмущения d в эксперименте. Априорная информация состояла в том, что неизвестные матрицы системы удовлетворяют условию (2.11), в котором $\rho = 0,1$ и $A_* = A_{real} + (\rho/2)I$, $B_* = B_{real}$, $C_* = C_{real}$, $D_* = D_{real}$. Эти результаты говорят о том, что гарантированные оценки норм замкнутой неопределенной системы, синтезированной при использовании как априорных, так и экспериментальных данных, начиная с некоторого уровня возмущений в эксперименте значительно меньше соответствующих оценок норм замкнутой системы при управлениях, синтезированных только по априорным или только по экспериментальным данным.

Отметим также следующее. Рассмотрим объект с матрицами A_{LS} , B_{LS} , C_{LS} и D_{LS} , составляющими матрицу параметров Δ_{LS} , полученную методом наименьших квадратов по тем же экспериментальным данным. Найдём для него матрицу параметров обобщенной H_∞ -оптимальной обратной связи $\Theta_{LS} = QP^{-1}$, решая линейные матричные неравенства (3.4) при $Y = P$, $AY = A_{LS}P + B_{LS}Q$, $CY = C_{LS}P + D_{LS}Q$ и $B = I$. Это, по существу, так называемое не прямое, т.е. найденное по оценкам неизвестных параметров объекта, H_∞ -субоптимальное адаптивное управление. Если имеется достаточное число измерений и информационная матрица невырожденная, то обобщенная H_∞ -норма замкнутой системы, состоящей из реального объекта и обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$, может оказаться меньше, чем соответствующая гарантированная обобщенная H_∞ -норма при обратной связи с $\Theta = \Theta_{rob}$. Однако в последнем случае имеется верхняя оценка обобщенной H_∞ -нормы замкнутой системы для любого объекта из множества Δ_{set} , согласованного с полученными экспериментальными данными, а для обратной связи с $\Theta = \Theta_{LS}$ получить такую оценку из неравенств (4.7), как показывает эксперимент, удастся только при очень маленьких уровнях возмущения d . Так, в рассматриваемом примере при $d = 0,02$ имеем $\gamma_{rob}^2(\Theta_{rob}) = 0,27$, в то время как $\gamma_{rob}^2(\Theta_{LS}) = 41,77$, а при $d > 0,03$ неравенство (4.7), в котором $Q = \Theta_{LS}P$, неразрешимо.

6. Заключение

Статья посвящена методам построения обобщенного H_∞ -субоптимального и, как частный случай, линейно-квадратичного управления для линейных непрерывных и дискретных динамических объектов при полном отсутствии их математических моделей. В ней показано, что классические методы построения робастного управления по априорным данным для динамических

объектов, уравнения которых содержат неизвестные параметры со значениями в некоторых ограниченных множествах, при должной модификации могут быть применены к синтезу управления по априорным и экспериментальным данным. Эти методы, как известно, состоят в “погружении” неопределенной системы в некоторую расширенную систему с дополнительными входом и выходом, удовлетворяющими квадратичному неравенству, применении S -процедуры и приведении задачи к синтезу H_∞ -оптимального управления для расширенной системы. В данной статье показано, что требуемая модификация включает в себя характеризацию критерия управления (обобщенную H_∞ -норму системы при наличии начального и внешнего возмущений или значение квадратичного функционала при наличии только начального возмущения) в терминах двойственной системы, “погружение” двойственной неопределенной системы в некоторую расширенную систему и дальнейшее применение техники линейных матричных неравенств. В результате параметры линейных субоптимальных обратных связей выражаются в терминах решений линейных матричных неравенств, содержащих только априорные и экспериментальные данные. Иллюстративный пример со случайно генерированным объектом пятого порядка демонстрирует, что при совместном применении априорных и экспериментальных данных качество системы управления значительно улучшается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. Для неизвестной матрицы Δ_{real} в (2.3) определим оценку Δ_{LS} методом наименьших квадратов, которая минимизирует по Δ квадрат матричной нормы невязки, т.е. функцию $\|\tilde{\Phi} - \Delta\hat{\Phi}\|_F^2 = \text{tr}(\tilde{\Phi} - \Delta\hat{\Phi})^T(\tilde{\Phi} - \Delta\hat{\Phi})$. Вычисляя градиент по Δ от этой функции и приравнявая его к нулю $-2\tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T + 2\Delta\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T = 0$, найдем оптимальную оценку $\Delta_{LS} = \tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}$ в предположении, что информационная матрица $\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T$ невырождена. Далее преобразуем неравенство (2.6) к виду

$$\Delta\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T\Delta^T - \tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T\Delta^T - \Delta\hat{\Phi}\tilde{\Phi}^T + \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^T - \hat{\Omega} \leq 0$$

и запишем его как

$$[\Delta - \tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}](\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)[\Delta - \tilde{\Phi}\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}]^T \leq \Gamma,$$

где $\Gamma = \hat{\Omega} + \tilde{\Phi}[\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}\hat{\Phi} - I]\tilde{\Phi}^T$. Подставляя в Γ выражение для $\tilde{\Phi}$ из (2.3) и учитывая (2.5), получим

$$\Gamma = \hat{\Omega} + \widehat{W}[\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}\hat{\Phi} - I]\widehat{W}^T \geq \widehat{W}\hat{\Phi}^T(\hat{\Phi}\hat{\Phi}^T)^{-1}\hat{\Phi}\widehat{W}^T \geq 0.$$

Доказательство леммы 3.1. Определим линейный оператор Γ , отображающий пару $(x(0), v(t)) \in \mathbb{R}^n \times L_2(l_2) = \Xi$, состоящую из начального состояния системы и возмущения на входе, в целевой выход $z(t) \in L_2(l_2) = \Upsilon$, т.е.

$$\Gamma : \Xi = \mathbb{R}^{n_x} \times L_2(l_2) \rightarrow \Upsilon = L_2(l_2) : (x(0), v) \rightarrow z.$$

Скалярные произведения в этих пространствах определяются как

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Xi} = x_1^T(0)R^{-1}x_2(0) + \langle v_1(t), v_2(t) \rangle_{L_2(l_2)}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Upsilon} = \langle z_1(t), z_2(t) \rangle_{L_2(l_2)}.$$

При этом обобщенная H_{∞} -норма совпадает с индуцированной нормой такого оператора, так как

$$\|\Gamma\| = \sup_{(x_0, v) \neq 0} \frac{\|\Gamma(x_0, v)\|}{\|(x_0, v)\|} = \sup_{x_0, v \neq 0} \frac{\|z\|}{(x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|^2)^{1/2}} = \gamma_{g\infty}.$$

Покажем, что сопряженный оператор Γ^* определяется как

$$\Gamma^* : \Upsilon \rightarrow \Xi : \hat{v}_a(t) \rightarrow (R\hat{x}_a(0), \hat{z}_a(t)),$$

где $\hat{x}_a(t)$ и $\hat{z}_a(t)$ удовлетворяют уравнениям (3.8) и (3.9) в непрерывном и дискретном случаях соответственно.

Действительно, в непрерывном случае в силу уравнений (3.8) имеем

$$\frac{d(x^T \hat{x}_a)}{dt} = v^T \hat{z}_a - z^T \hat{v}_a,$$

а в дискретном случае в силу уравнений (3.9) имеем

$$x^T(t+1)\hat{x}_a(t+1) - x^T(t)\hat{x}_a(t) = v^T(t)\hat{z}_a(t) - z^T(t)\hat{v}_a(t).$$

Интегрируя в первом случае и суммируя во втором, получим

$$\langle z, \hat{v}_a \rangle = x^T(0)R^{-1}[R\hat{x}_a(0)] + \langle v, \hat{z}_a \rangle.$$

Таким образом,

$$\langle \Gamma(x(0), v), \hat{v}_a \rangle_{\Upsilon} = \langle (x(0), v), \Gamma^*(\hat{v}_a) \rangle_{\Xi}.$$

Так как нормы сопряженных операторов равны, то

$$\|\Gamma\| = \|\Gamma^*\| = \sup_{\hat{v}_a \neq 0} \frac{(\|\hat{z}_a\|^2 + \hat{x}_a^T(0)R\hat{x}_a(0))^{1/2}}{\|\hat{v}_a\|}.$$

Далее покажем, что неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$ выполняется тогда и только тогда, когда существует функция $V(\hat{x}_a) = \hat{x}_a^T P \hat{x}_a$ с $P > R$, для которой по траектории непрерывной системы (3.8) или дискретной системы (3.9) выполняется соответствующее из неравенств

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}_a(t)) - |\hat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2 |\hat{v}_a(t)|^2 &> 0, \\ \Delta V(\hat{x}_a(t)) - |\hat{z}_a(t)|^2 + \gamma^2 |\hat{v}_a(t)|^2 &> 0. \end{aligned}$$

Действительно, интегрируя первое неравенство или суммируя второе неравенство и учитывая, что $P > R$, получим $\|\hat{z}_a\|^2 + \hat{x}_a^T(0)R\hat{x}_a(0) < \gamma^2 \|\hat{v}_a\|^2$ для

всех $\hat{v}_a(t)$, т.е. $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Обратно, пусть $\|\Gamma^*\| < \gamma$. Отсюда следует, что $\|\Gamma\| < \gamma$. Согласно [11, 12] это значит, что существует функция $V(x) = x^T Y^{-1} x$ с матрицей Y , удовлетворяющая неравенствам (3.3) в непрерывном случае и неравенствам (3.4) в дискретном случае. Рассмотрим здесь только непрерывный случай, так как в дискретном случае доказательство проводится аналогично. Используя лемму Шура, преобразуем первое из неравенств (3.3) к виду

$$\begin{pmatrix} Y\mathcal{A}^T + \mathcal{A}Y + \gamma^{-2}\mathcal{B}\mathcal{B}^T & \star \\ \mathcal{C}Y & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Сделаем замену $Y = \gamma^{-2}P$ и запишем это неравенство эквивалентно в виде следующего неравенства для квадратичной формы относительно абстрактных переменных $\hat{x}_a$ и $\hat{v}_a$:

$$2\hat{x}_a^T P(-\mathcal{A}^T \hat{x}_a - \mathcal{C}^T \hat{v}_a) - \hat{x}_a^T \mathcal{B}\mathcal{B}^T \hat{x}_a + \gamma^2 \hat{v}_a^T \hat{v}_a > 0,$$

которое совпадает с первым неравенством в (П.1). Учитывая, что $Y > \gamma^{-2}R$, получим, что для функции $V_a(\hat{x}_a) = \hat{x}_a^T P \hat{x}_a$ с $P > R$ по траектории системы (3.8) выполняется первое неравенство в (П.1). Таким образом, неравенство $\|\Gamma^*\| < \gamma$, а значит и неравенство $\|\Gamma\| = \gamma_{g\infty} < \gamma$, выполняется тогда и только тогда, когда в силу системы (3.8) или (3.9) выполняется соответствующее из неравенств (П.1). Теперь осталось только от уравнений (3.8) или (3.9), обратив время, перейти к системе (3.6), по траекториям которой для функции $V(x_a) = x_a^T P x_a$ будет выполняться соответствующее из неравенств (3.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B. A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
2. De Persis C., Tesi P. Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
3. Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K. Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
4. Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M. From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
5. Якубович В.А. S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун-та. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.
6. Bisoffi A., De Persis C., Tesi P. Data-driven Control via Petersen’s Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
7. Petersen I.R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
8. Berberich J., Scherer C.W., Allgower F. Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.

9. Коган М.М., Степанов А.В. Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // *АиТ*. 2023. № 8. С. 24–42.
10. Petersen I.R., Tempo R. Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // *Automatica*. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
11. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенное H_∞ -оптимальное управление как компромисс между H_∞ -оптимальным и γ -оптимальным управлениями // *АиТ*. 2010. № 6. С. 20–38.
12. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Pareto suboptimal H_∞ controls with transients // *Proc. Eur. Control Conf.* 2021, Rotterdam. P. 542–547.
13. Polyak B.T. Convexity of Quadratic Transformations and Its Use in Control and Optimization // *J. Optim. Theory Appli.* 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 28.09.2023

После доработки 27.11.2023

Принята к публикации 21.12.2023